52

PUBLICAŢIILE INSTITUTULUI REGAL DE CERCETĂRI ŞTIINŢIFICE
AL ROMÂNIEI

TIBERIU POPOVICIU. *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (~~VI~~).*

IV

(Extrait des „Disquisitiones Mathematicae et Physicae"
t. I, fasc. 2, 1940)

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ, BUCUREŞTI 1940
ROMÂNIA

NOTES SUR LES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR (IV)[1]

PAR

TIBERIU POPOVICIU (à Cernăuţi)

Sur une inégalité vérifiée par les fonctions d'ordre n.

1. Avant de nous occuper des inégalités que nous voulons établir dans ce travail, il est nécessaire de résumer quelques propriétés des polynomes orthogonaux que nous utiliserons plus loin.

Une suite de polynomes en x

$$(1) \qquad P_0\ P_1, \dots,\ P_m, \dots$$

où

$$P_m = P_m(x) = x^m + \dots,\ m = 0,\ 1, \dots,\ (P_0 = 1)$$

est *une suite orthogonale* si:

1°. On peut trouver une opération linéaire $U(f)$, définie dans le champ des polynomes, telle que

2°. On ait

$$a) \quad U(P_i P_j) = 0,\ i \neq j \qquad b) \quad U(P_i^2) > 0,$$

quels que soient $i,\ j = 0,\ 1,\ 2, \dots$

Il en résulte que la suite orthogonale est complètement caractérisée par les *moments*

$$U(x^i) = c_i, \qquad i = 0,\ 1, \dots$$

et on a alors

$$U(a_0 x^i + a_1 x^{i-1} + \dots + a_i) = a_0 c_i + a_1 c_{i-1} + \dots + a_i c_0.$$

[1]) Cette Note paraît avec un retard considérable pour des raisons indépendantes de la volonté de l'auteur. Les Notes I—III, V—VIII ont déjà paru dans d'autres périodiques.

A l'aide de 2° on montre facilement que les polynomes (1) sont complètement déterminés et on peut les calculer explicitement. On sait, d'ailleurs, que l'opération $U(f)$ est nécessairement de la forme [2])

$$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\alpha(x),$$

où $\alpha(x)$ est une fonction non-décroissante dans $(-\infty, +\infty)$.

On peut supposer que seuls les $2r$ moments $c_0, c_1, \ldots c_{2r-1}$ sont donnés ($\alpha(x)$ ne prend alors qu'un nombre fini de valeurs distinctes). Dans ce cas nous prenons dans 2° *a)* $i, j = 0, 1 \ldots, r$ et dans 2° *b)* $i = 0, 1 \ldots, r-1$. On a alors une suite orthogonale finie $P_0, P_1, \ldots, P_r$. Mais, on le voit facilement, une telle suite est toujours la section d'une suite infinie (1).

2. Soit (1) une suite orthogonale. On sait que les zéros du polynome P_i $(i > 0)$ sont tous réels et distincts. Deux polynomes consécutifs P_{i-1}, P_i n'ont jamais de zéros communs et les zéros de P_i séparent ceux de P_{i-1}.

Soient $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ les zéros du polynome P_m. Considérons le système de $2m$ équations

$$c_i = \lambda_1 x_1^i + \lambda_2 x_2^i + \ldots + \lambda_m x_m^i, \qquad i = 0, 1 \ldots, 2m-1, \tag{2}$$

dans les inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, x_1, x_2, \ldots, x_m$. On trouve immédiatement que les x_i sont précisément les zéros du polynome P_m et les λ_i, qui sont alors déterminés complètement par les m premières équations, sont des nombres *positifs*. Nous dirons que ces nombres λ_i sont *les poids* du polynome P_m. Ces poids jouissent, d'ailleurs, de la propriété que l'opération

$$U_m(f) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)$$

est une opération $U(f)$ correspondant à la suite orthogonale finie P_0, $P_1, \ldots, P_m$. Ces résultats s'obtiennent facilement en remarquant que la condition d'orthogonalité 2° *a)* nous donne $U(x^i P_m) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, qui expriment justement que les x_i sont les zéros de P_m et que le système (2) est alors compatible en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. La positivité des poids résulte facilement du fait que ces nombres sont inversement proportionnels aux nombres $P_{m-1}(x_i)\, P_m'(x_i)$. On peut aussi remarquer que

$$c_{2r} = U(x^{2r}) = U\left(\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^r P_m(x)}{(x - x_i)\, P_m'(x_i)}\right)^2\right) = \tag{3}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i^{2r}\, U\left(\left(\frac{P_m(x)}{(x - x_i)\, P_m'(x_i)}\right)^2\right), \quad r = 0, 1, \ldots, m-1,$$

donc

$$\lambda_i = U\left(\left(\frac{P_m(x)}{(x - x_i)\, P_m'(x_i)}\right)^2\right) > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

car l'opération $U(f)$ est positive.

[2]) Voir H. Hamburger. «*Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems*». Math. Ann., **81**, 235—319 (1920).

Remarquons encore que dans une suite orthogonale (1) on peut prendre arbitrairement les polynomes P_{m-1}, P_m avec les seuls conditions de réalité et de séparation de leurs zéros. On peut aussi prendre arbitrairement le polynome P_m à zéros réels et distincts et les poids positifs de ce polynome. Par ces données les polynomes $P_0, P_1, \ldots, P_m$ de la suite (1) sont déterminés complètement.

Considérons maintenant le polynome $P_m + \varrho P_{m-1}$ où ϱ est une constante $\neq 0$. On voit facilement que les zéros $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$ de ce polynome sont tous réels et distincts. Nous avons les propriétés de séparation

$$y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \ldots < y_m < x_m \quad \text{si} \quad \varrho > 0,$$

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_m < y_m \quad \text{si} \quad \varrho < 0.$$

Le nombre ϱ est complètement déterminé par le fait que y_1 a une valeur donnée quelconque $< x_1$ ou y_m une valeur donnée quelconque $> x_m$. On peut aussi remarquer que les zéros de P_{m-1} séparent toujours ceux de $P_m + \varrho P_{m-1}$.

Le système

$$c_i = \nu_1 y_1^i + \nu_2 y_2^i + \ldots + \nu_m y_m^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, 2m-2 \tag{4}$$

est encore compatible en ν_i. Nous dirons encore que les nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$, déterminés par ce système, sont *les poids* du polynome $P_m + \varrho P_{m-1}$. Ces poids *sont positifs quel que soit* ϱ. En effet, la formule (3) *est encore applicable*. Nous avons

$$c_{2r} = U(x^{2r}) = \sum_{i=1}^{m} y_i^{2r}\, U\left(\left(\frac{Q(x)}{(x - y_i)\, Q'(y_i)}\right)^2\right)$$

$$r = 0, 1, \ldots, m-1,$$

donc

$$\nu_i = U\left(\left(\frac{Q(x)}{(x - y_i)\, Q'(y_i)}\right)^2\right) > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

où nous avons posé $Q(x) = P_m(x) + \varrho P_{m-1}(x)$.

On peut aussi montrer facilement qu'on obtient ainsi toutes les solutions du système (4).

3. Revenons maintenant aux fonctions convexes. Nous allons donner tout d'abord une interprétation de la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ d'ordre $n+1$. Nous pouvons écrire

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \ldots + p_{n+2} f(x_{n+2}),$$

où les p_i ne dépendent pas de la fonction $f(x)$. Si nous supposons $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, l'expression bien connue, par le quotient de deux déterminants, de la différence divisée, nous montre que les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_{n+2}$ sont alternativement positifs et négatifs, le dernier étant toujours positif, $p_{n+2} > 0$. D'autre part, ces coefficients sont, à un facteur constant près, déterminés par les relations

$$p_1 x_1^i + p_2 x_2^i + \ldots + p_{n+2} x_{n+2}^i = 0, \quad i = 0,1,\ldots, n.$$

Nous pouvons donc énoncer les propriétés suivantes:

Si $n = 2m - 3$ *est impair et* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, *nous pouvons écrire*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_{2i-1}) - \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j f(x_{2j})$$

et alors $x_2, x_4, \ldots, x_{2m-2}$ *sont les zéros et* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$ *les poids du polynome* P_{m-1} *de la suite orthogonale* $P_0, P_1, \ldots, P_m$, *où* $x_1, x_3, \ldots, x_{2m-1}$ *sont les zéros et* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *les poids du polynome* P_m.

Si $n = 2m - 2$ *est pair et* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2m}$, *nous pouvons écrire*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_{2i}) - \sum_{j=1}^{m} \nu_j f(x_{2j-1})$$

et alors $x_1, x_3, \ldots, x_{2m-1}$ *sont les zéros et* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ *les poids d'un polynome* $P_m + \varrho P_{m-1}$, *où* $\varrho > 0$ *et* P_{m-1}, P_m *appartiennent à la suite orthogonale* $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}, P_m, \ldots$, *déterminée par les zéros* $x_2, x_4, \ldots, x_{2m}$ *et les poids* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *du polynome* P_m.

4. Supposons $n = 2m - 1$ impair et écrivons l'inégalité

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i) \geqq \sum_{j=1}^{m} \mu_j f(y_j)$$

où $r > m$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont positifs et $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$.

Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'inégalité (5) soit vérifiée pour toute fonction $f(x)$, non-concave d'ordre n, définie sur les points x_i, y_j, $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

En nous reportant à la Note précédente [3]), nous voyons que les conditions

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^s = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j^s \quad, \quad s = 0, 1, \ldots, n \; (n = 2m - 1)$$

sont nécessaires. Il faut donc que les y_j soient les zéros et les μ_j les poids du polynome P_m de la suite orthogonale $P_0, P_1, \ldots, P_m, \ldots, P_r$, déterminée par les zéros x_i et les poids λ_i du polynome P_r.

[3]) Voir la note III dans Mathématica, **16**, 74—86 (1940).

Nous nous proposons de démontrer que *les égalités* (6) *sont aussi suffisantes.* Nous ferons cette démonstration par induction. La propriété est vraie pour $r = m + 1$, car alors l'inégalité (5) est une inégalité de définition de la non-concavité d'ordre n. En effet, la différence entre le premier et le second membre est, à un facteur constant positif près, une différence divisée d'ordre $n + 1$. Montrons maintenant qu'en supposant vraie la propriété si dans le premier membre de (5) il y a $r - 1$ termes ($r > m + 1$), elle résultera vraie pour r termes. Par hypothèse, si nous déterminons les y'_j et les $\mu'_j > 0$ par les égalités

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i x_i^s = \sum_{j=1}^{m} \mu'_j {y'_j}^s \quad, \quad s = 0,1,\ldots, n,$$

nous avons

$$\sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i f(x_i) \geqq \sum_{j=1}^{m} \mu'_j f(y'_j)$$

donc

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i) \geqq \sum_{j=1}^{m} \mu'_j f(y'_j) + \lambda_r f(x_r).$$

Mais, nous savons que les y'_j sont distincts et tous compris entre x_1 et x_{r-1}. Nous pouvons donc déterminer les y''_j et les $\mu''_j > 0$ par les égalités

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{m} \mu'_j {y'_j}^s + \lambda_r x_r^s = \sum_{j=1}^{m} \mu''_j {y''_j}^s \quad, \quad s = 0, 1, \ldots, n.$$

Nous avons alors

$$(10) \qquad \sum_{j=1}^{m} \mu'_j f(y') + \lambda_r f(x_r) \geqq \sum_{j=1}^{m} \mu''_j f(y''_j).$$

Mais, (7) et (9) comparés avec (6) nous montrent que $\mu''_j = \mu_j$, $y''_j = y_j$ et alors, de (8) et (10), il résulte l'inégalité (5).

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante:

Si $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *sont les zéros et* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ *les poids du polynome* P_m *de la suite orthogonale* $P_0, P_1, \ldots, P_m, \ldots, P_r$ *déterminée par les zéros* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *et les poids* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ $(r > m)$ *du polynome* P_r, *l'inégalité* (5) *est vérifiée pour toute fonction non-concave d'ordre impair* $n = 2m - 1$, *définie sur les points* x_i, y_j.

Si, de plus, la fonction est convexe d'ordre $n = 2m - 1$ *sur les points* x_i, y_j *on a dans* (5) *le signe* $>$.

La dernière partie de l'énoncé se justifie immédiatement.

5. Si $m = 1$, $n = 1$, l'inégalité (5) devient

$$\frac{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i} \geqq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i}\right)$$

qui est l'inégalité classique de J e n s e n pour les fonctions non-concaves ordinaires (d'ordre 1) [4].

Considérons un intervalle fini et fermé (a, b) et soit $f(x)$ une fonction continue non-concave d'ordre 1, 3, 5, ..., donc de tout ordre impair.

Soit alors (1) une suite orthogonale choisie de manière que les zéros de tous les polynomes P_m soient dans (a, b). On peut par exemple, prendre la suite orthogonale correspondant à l'opération

$$(11) \qquad U(f) = \int_a^b p(x) f(x)\, dx$$

où $p(x)$ est une fonction sommable positive dans l'intervalle (a, b). Désignons par $x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mm}$ les zéros et par $\lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \ldots, \lambda_{mm}$ les poids du polynome P_m, $m = 1, 2, \ldots$, Si nous posons

$$M_m(f) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{mi} f(x_{mi}),$$

nous avons les inégalités

$$M_1(f) \leqq M_2(f) \leqq \ldots \leqq M_m(f) \leqq \ldots$$

La suite

$$(12) \qquad M_1(f),\ M_2(f), \ldots, M_m(f), \ldots$$

est donc non-décroissante. Elle est, d'ailleurs, bornée puisque

$$|M_m(f)| \leqq \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{mi}\right) \max_{(a,\,b)} |f(x)| = c_0 \max_{(a,\,b)} |f(x)|.$$

Il en résulte que la suite (12) est convergente. Il est facile de voir que dans ce cas $U(f)$ a un sens parfaitement déterminé et nous avons

$$\lim_{m \to \infty} M_m(f) = U(f).$$

En effet, il suffit de remarquer que la formule est vraie pour un polynome et que l'opération $U(f)$, définissant la suite (1), se prolonge immédiatement sur l'ensemble des fonctions continues dans (a, b).

Par exemple, si nous avons (11) on peut écrire

$$\lim_{m \to \infty} M_m(f) = \int_a^b p(x) f(x)\, dx.$$

[4]) J. L. W. V. J e n s e n. « *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes* ». Acta Math., **30**, 175—193 (1906).

En choisissant convenablement la fonction $f(x)$ [5]), on arrive à diverses inégalités entre les zéros des polynomes orthogonaux.

6. Examinons maintenant le problème analogue pour les fonctions d'ordre pair $n = 2m - 2$. Considérons encore l'inégalité (5), où λ_i, μ_j sont positifs et $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$. Pour que cette inégalité soit vérifiée pour toute fonction non-concave d'ordre $n = 2m - 2$, définie sur les points x_i, y_j les conditions

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^s = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j^s, \quad s = 0, 1, \ldots, n \ (n = 2m - 2)$$

sont nécessaires. Donc, si $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}, P_m, \ldots, P_r$ est la suite orthogonale déterminée par les zéros x_i et les poids λ_i de polynome P_r, il faut que les y_j soient les zéros et μ_j les poids d'un polynome de la forme $P_m + \varrho P_{m-1}$, ϱ étant une constante. Mais, en dehors de (12), il y a encore une condition nécessaire. Il faut, en effet, que l'on ait

$$(12') \qquad a)\ y_1 < x_1 \quad \text{ou} \quad b)\ y_1 = x_1,\ \ \mu_1 > \lambda_1.$$

Montrons d'abord que ces deux possibilités peuvent s'écrire sous la forme unique

$$(13) \qquad y_1 \leqq x_1.$$

On voit, en effet, de (12), que si $y_1 = x_1$, il faut que l'on ait $\mu_1 > \lambda_1$. Dans le cas contraire on pourait écrire

$$(\lambda_1 - \mu_1)\, x_1^s + \sum_{i=2}^{r} \lambda_i x_i^s = \sum_{j=2}^{m} \mu_j y_j^s, \quad s = 0, 1, \ldots, n \ (n = 2m - 2)$$

ce qui, d'après la remarque du Nr. 2, est impossible.

Nous nous proposons de démontrer maintenant que *les égalités* (12) *et l'inégalité* (13) *sont aussi suffisantes*. On peut encore procéder par induction. Si $r = m$ la propriété est évidente par suite des résultats du Nr. 3. Montrons maintenant qu'en supposant vraie la propriété si dans le premier membre de (5) il y a $r - 1$ termes ($r > m$), elle résultera vraie aussi pour r termes. Par hypothèse, si nous déterminons les y'_j et les $\mu'_j > 0$ par les égalités

$$\sum_{i=2}^{r} \lambda_i x_i^s = \sum_{j=1}^{m} \mu'_j y'^s_j, \quad s = 0, 1, \ldots, n$$

et $y'_1 = x_1$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i) \geqq \sum_{j=1}^{m} \mu'_j f(y'_j) + \lambda_1 f(x_1).$$

[5]) Par exemple $\log \dfrac{1}{x}$ est un telle fonction dans un intervalle (a, b), $0 < a < b$.

Nous pouvons ensuite déterminer les y''_j et les $\mu''_j > 0$ de manière que l'on ait

$$\sum_{j=1}^{m} \mu'_j y'^s_j + \lambda_1 x_1^s = \sum_{j=1}^{m} \mu''_j y''^s_j \quad , \quad s = 0, 1, \ldots, n$$

et $y''_1 \leqq x_1$.

Nous voyons immédiatement que $y''_j = y_j$, $\mu''_j = \mu_j$ et l'inégalité (5) en résulte.

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante:

Si $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$ sont les zéros et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ les poids d'un polynome $P_m + \varrho P_{m-1}$ où P_{m-1}, P_m appartiennent à la suite orthogonale $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}, P_m, \ldots, P_r$ déterminée par les zéros $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ et les poids $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ du polynome P_r et où ϱ est une constante (positive) déterminée de manière que l'on ait $y_1 \leqq x_1$, l'inégalité (5) *est vérifiée pour toute fonction non-concave d'ordre pair $n = 2m - 2$, définie sur les points x_i, y_j.*

Si, de plus, la fonction est convexe d'ordre $n = 2m - 2$ sur les points x_i, y_j et si $r > m$ ou $r = m$, $y_1 < x_1$ le signe $>$ est valable dans (5).

7. On peut déduire de l'inégalité (5) des inégalités intégrales par des passages à la limite.

Supposons $n = 2m - 1$ impair. Soit $p(x)$ une fonction sommable et positive dans l'intervalle fini (a, b) [6]), $\varphi(x)$ une fonction sommable et bornée dans (a, b) et soit $A \leqq \varphi(x) \leqq B$. Nous avons alors la propriété suivante:

Si $f(x)$ est une fonction continue, non-concave d'ordre $n = 2m - 1$ dans l'intervalle (A, B), on a l'inégalité

$$(14) \qquad \frac{\int_a^b p(x) f(\varphi(x))\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx} \geqq \sum_{i=1}^{m} \mu_i f(y_i)$$

où y_i sont les zéros et μ_i les poids du polynome P_m de la suite orthogonale $P_0, P_1, P_2, \ldots$, déterminée par les moments

$$(15) \qquad c_i = \frac{\int_a^b p(x) \varphi^i(x)\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx} \quad , \quad i = 0, 1, \ldots$$

[6]) Plus généralement il suffit que $p(x) \geq 0$ dans (a, b) et $\int_a^b p(x)\, dx > 0$.

Dans le cas $m = 1$, $n = 1$, nous retrouvons l'inégalité

$$\frac{\int_a^b p(x) f(\varphi(x))\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx} \geqq f\left(\frac{\int_a^b p(x)\varphi(x)\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx}\right)$$

bien connue pour les fonctions non-concaves d'ordre 1.

Pour $n = 2m - 2$ pair nous avons une propriété analogue:

Si $f(x)$ est une fonction continue, non-concave d'ordre $n = 2m - 2$ dans l'intervalle (A, B), on a l'inégalité (14), *où $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$ sont les zéros et μ_j les poids d'un polynome $P_m + \varrho P_{m-1}$ dans lequel P_{m-1}, P_m sont les polynomes orthogonaux de degré $m - 1$, m de la suite déterminée par les moments* (15) *et ϱ une constante choisie de manière que $y_1 \leqq A$.*