

NOTES SUR LES GÉNÉRALISATIONS DES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR (II)

PAR
TIBERIU POPOVICIU

Note présentée par Mr. S. Stoilow, M. A. R. dans la séance du 17 mai 1940

LES FONCTIONS D'ORDRE n PAR SEGMENTS

1. Dans la note précédente nous avons considéré les fonctions d'ordre $(n|k)$, dont les fonctions d'ordre n sont un cas particulier ($k = 0$). Nous allons maintenant étudier une autre classe de fonctions, étroitement liées à ces fonctions.

Nous dirons que l'ensemble linéaire E est décomposé en m sous-ensembles consécutifs $E_1, E_2, \dots, E_m$ si: 1° $E_i \subseteq E$, $i = 1, 2, \dots, m$, 2° tout point de E appartient à l'un des E_i , 3° tout point de E_i est à gauche de tout point de E_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, m-1$. Les sous-ensembles E_i de E sont donc des sections disjointes de E et épuisant complètement l'ensemble E .

Introduisons maintenant la

Définition 1. Nous dirons que la fonction f est d'ordre n par segments sur E si on peut décomposer l'ensemble E en un nombre fini m de sous-ensembles consécutifs

$$(1) \quad E_1, E_2, \dots, E_m,$$

tels que sur chacun de ces sous-ensembles la fonction soit d'ordre n .

En particulier, pour $n = 0$, on peut dire que f est monotone par segments sur E . Pour $n = -1$ nous avons les fonctions qui changent de signe au plus un nombre fini de fois.

Nous dirons que la décomposition (1) est une décomposition de E pour la fonction f , d'ordre n par segments.

Toute fonction définie sur une ensemble fini est, évidemment, d'ordre n par segments, quel que soit n .

Si f est d'ordre n par segments sur E , la fonction cf , où c est une constante, et, en particulier, la fonction $-f$, est aussi d'ordre n par segments sur E . Il en est ainsi, d'ailleurs, sur tout sous-ensemble de E .

Si f est d'ordre n par segments sur E , toute fonction $f + P$, où P est un polynôme de degré n , est aussi d'ordre n par segments sur E . Nous préciserons plus tard cette propriété.

Si on peut décomposer l'ensemble E en un nombre fini de sous-ensembles consécutifs, tels que sur chacun de ces sous-ensembles la fonction soit d'ordre n par segments, cette fonction est d'ordre n par segments sur E .

2. Nous dirons qu'une décomposition (1) de E pour la fonction f , d'ordre n par segments, est une *décomposition propre* si la fonction n'est d'ordre n sur aucun des ensembles $E_i + E_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, m-1$. Dans le cas contraire, nous dirons que (1) est une *décomposition impropre*. Il existe alors au moins un $E_i + E_{i+1}$ sur lequel la fonction est d'ordre n . En groupant convenablement les ensembles E_i on peut réduire une décomposition impropre à une décomposition propre. Cette réduction peut s'effectuer en réunissant successivement deux ensembles consécutifs E_i, E_{i+1} tels que sur $E_i + E_{i+1}$ la fonction soit d'ordre n .

En général pour une fonction d'ordre n par segments il y a plusieurs, et même une infinité (si E est infini), de décompositions (1) de E . Le nombre m des sous-ensembles (1) peut varier même d'une décomposition propre à une autre décomposition propre si $n \geq 0$.

Le nombre m des sous-ensembles de la décomposition (1) pour une fonction d'ordre n par segments a évidemment un minimum. Nous désignerons ce minimum par h et nous introduirons la

Définition 2. Le nombre h , minimum de m , sera appelé le nombre caractéristique ou simplement la caractéristique de la fonction f , d'ordre n par segments sur E .

Il existe, évidemment, au moins une décomposition (1) ayant exactement h termes. Il est clair que toute décomposition (1) ayant h termes est une décomposition propre. On peut remarquer, en passant, que si la caractéristique de f est h , l'ensemble E doit avoir au moins $(n+2)h - n - 1$ points.

3. Soit (1) une décomposition propre de E pour la fonction f , d'ordre n par segments sur E . Soit E_1^* le sous-ensemble de E formé par les points $x \in E$ tels que f soit d'ordre n sur l'intersection de E avec l'intervalle (a, x) , a étant l'extrémité gauche de E . On voit que E_1^* n'est pas vide puisque $E_1 \subseteq E_1^*$. On a aussi $E_1^* \subseteq E_1 + E_2$, puisque la fonction n'est pas d'ordre n sur $E_1 + E_2$, la décomposition (1) étant, par hypothèse, une décomposition propre. L'ensemble $F_2 = (E_1 + E_2) - E_1^*$ n'est pas vide et on a $F_2 \subseteq E_2$.

La fonction f est d'ordre n par segments sur $E - E_1^*$ et nous avons la décomposition

$$(2) \quad F_2, E_3, E_4, \dots, E_m,$$

de cet ensemble pour la fonction f . La décomposition (2) est, d'ailleurs, ou bien une décomposition propre de $E - E_1^*$, ou bien alors

$$F_2 + E_3, E_4, \dots, E_m,$$

est une décomposition propre de cet ensemble.

Tout comme nous avons déduit E_1^* de E , nous pouvons déduire E_2^* de $E - E_1^*$, puis E_3^* de $E - (E_1^* + E_2^*)$, ..., etc.

On voit immédiatement que nous avons le

Lemme 1. La suite $E_1^*, E_2^*, \dots$, est nécessairement finie et a au plus m termes.

De ce lemme nous déduisons le

Théorème 1. La suite $E_1^*, E_2^*, \dots$ a exactement h termes, h étant la caractéristique de la fonction f .

Il est clair, en effet, que cette suite s'obtient indépendamment de toute décomposition propre, (1) (et même indépendamment de toute décomposition propre ou impropre). Mais il existe une décomposition propre ayant h termes, donc la suite a $h' \leq h$ termes. Il est clair, d'autre part, que cette suite est une décomposition propre de E pour la fonction f , donc $h' \geq h$, d'après la définition du nombre h . On a donc $h' = h$, ce qui démontre le théorème.

Définition 3. Nous dirons que

$$(3) \quad E_1^*, E_2^*, \dots, E_h^*,$$

est la décomposition canonique de E pour la fonction f d'ordre n par segments sur E .

Bien entendu, ils peuvent exister d'autres décompositions propres ayant h termes.

Remarquons que $E_i^*, E_{i+1}^*, \dots, E_j^*$ est la décomposition canonique de la somme $E_i^* + E_{i+1}^* + \dots + E_j^*$, $i \geq 1, j \leq h$ et la fonction f a le nombre caractéristique $j - i + 1$ sur cet ensemble.

4. Démonstrons la propriété suivante

Théorème 2. Si h est la caractéristique de la fonction f , d'ordre n par segments sur E , le nombre m des termes d'une décomposition propre de E pour la fonction f , est toujours compris entre h et $2h - 1$, $h \leq m \leq 2h - 1$.

Il suffit de démontrer l'inégalité $m \leq 2h - 1$. Nous allons démontrer la propriété par induction sur le nombre h . Soit (1) une décomposition propre et (3) la décomposition canonique.

La propriété est vraie pour $h = 1$. Dans ce cas, en effet, la fonction est d'ordre n sur E , donc on ne peut avoir que $m = 1$. Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour $h - 1$ ($h > 1$) et démontrons-la pour h . Considérons les ensembles $F = E - E_m$, $F^* = E - E_h^*$. La décomposition canonique de F^* est $E_1^*, E_2^*, \dots, E_{h-1}^*$. Trois cas peuvent se présenter:

1° $F \subseteq F^*$, alors

$$(4) \quad E_1, E_2, \dots, E_{m-1}, F^* - F$$

est une décomposition de F^* pour la fonction f . Si (4) est une décomposition propre nous avons $m \leq 2h - 3$, donc à fortiori $m \leq 2h - 1$. Si (4) est une décomposition impropre, la décomposition

$$(5) \quad E_1, E_2, \dots, E_{m-2}, E_{m-1} + (F^* - F)$$

est une décomposition propre, donc $m - 1 \leq 2h - 3$ et nous avons encore $m \leq 2h - 1$ (D'ailleurs, si $m = 2$, ce qui ne peut arriver que si $h = 2$, la suite (5) se réduit au seul terme F^*).

2° $F = F^*$, alors

$$E_1, E_2, \dots, E_{m-1},$$

est une décomposition propre de F^* , donc $m - 1 \leq 2h - 3$ et $m \leq 2h - 1$.

3° $F^* \subset F$, alors on ne peut avoir $E_{m-1} \subseteq E_h^*$, car on aurait $E_{m-1} + E_m \subseteq E_h^*$, contrairement à l'hypothèse que (1) est une décomposition propre. On voit immédiatement que l'une des suites

$$E_1, E_2, \dots, E_{m-2}, F^* - \sum_{i=1}^{m-2} E_i,$$

$$E_1, E_2, \dots, E_{m-3}, E_{m-2} + \left(F^* - \sum_{i=1}^{m-2} E_i \right)$$

est une décomposition propre de F^* . On a donc $m - 1 \leq 2h - 3$ ou $m - 2 \leq 2h - 3$, donc toujours $m \leq 2h - 1$ (si $h = 2$ on voit facilement que $m \leq 3$).

La propriété est donc vraie aussi pour h et le théorème 2 en résulte.

Le nombre m peut effectivement prendre toutes les valeurs comprises entre h et $2h - 1$. Soit, en effet, la fonction

$$f(3i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, h - 1$$

$$f(3i + 1) = 1, \quad i = 0, 1, \dots, h - 1$$

$$f(3i + 2) = 2, \quad i = 0, 1, \dots, h - 2$$

définie sur l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, 3h - 2\}$ et monotone par segments sur cet ensemble. Les décompositions

$$(6_0) \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7, 8\}, \dots, \{3h - 6, 3h - 5, 3h - 4\}, \{3h - 3, 3h - 2\}$$

$$(6_i) \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}, \dots, \{3i - 2\}, \{3i - 1, 3i\}, \{3i + 1, 3i + 2\},$$

$$\{3i + 3, 3i + 4, 3i + 5\}, \{3i + 6, 3i + 7, 3i + 8\}, \dots,$$

$$\{3h - 6, 3h - 5, 3h - 4\}, \{3h - 3, 3h - 2\},$$

$$(6_{h-2}) \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}, \dots, \{3h - 8\}, \{3h - 7, 3h - 6\}, \{3h - 5, 3h - 4\}$$

$$\{3h - 3, 3h - 2\},$$

$$(6_{h-1}) \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}, \dots, \{3h - 5\}, \{3h - 4, 3h - 3\}, \{3h - 2\},$$

sont des décompositions propres de E . La décomposition (6_i) a $h + i$ termes, $i = 0, 1, \dots, h - 1$. La décomposition (6_0) est précisément la décomposition canonique.

Le nombre h est toujours compris entre $\frac{m+1}{2}$ et m . Il en résulte que si $m = 2$, on doit avoir $h = 2$. Si $m > 2$, h peut être plus petit que m sauf si $n = -1$, lorsque nous avons le

Théorème 3. Si $n = -1$, toute décomposition propre de E a h termes.

En effet, si (1) est une décomposition propre de E , on peut trouver les points $x_i \in E_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, tels que $f(x_i) f(x_{i+1}) < 0$, $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Deux points consécutifs x_i, x_{i+1} ne peuvent donc appartenir à un même E_j^* . On a donc $m \leq h$. D'autre part, $m \geq h$, d'après la définition du nombre h . Donc $m = h$.

Cernăuți, le 22 avril 1940.