PUBLICAŢIILE INSTITUTULUI DE CERCETĂRI ŞTIINŢIFICE
REGELE CAROL II

DISQUISITIONES MATHEMATICAE ET PHYSICAE

TOMUS I

FASC. I

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ, BUCUREŞTI 1940
ROMÂNIA

CONTENU DU TOME I

NOTES SUR LES GÉNÉRALISATIONS DES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR (I)

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Dans une série de notes intitulées « *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* » nous poursuivons l'étude des fonctions d'ordre n. Dans cette nouvelle série de notes nous nous proposons d'examiner les diverses classes de fonctions qui généralisent les fonctions d'ordre n d'une variable.

Les fonctions d'ordre $(n \mid k)$.

1. Rappelons d'abord la définition des fonctions d'ordre n. La fonction $f = f(x)$, réelle, finie, uniforme et définie sur un ensemble linéaire quelconque E est dite *d'ordre n* sur E si sa différence divisée d'ordre $n+2$, $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ ne change pas de signe sur E. Plus exactement nous avons la définition suivante

La fonction f est convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe resp. concave d'ordre n sur E, suivant que l'inégalité

$$(1) \qquad [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] >, \geqq, =, \leqq \text{ resp. } < 0$$

est vérifiée, quels que soient les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \varepsilon E$.

La convexité et la polynomialité d'ordre n sont des cas particuliers de la non-concavité d'ordre n. Si f est convexe, non-concave,... etc. d'ordre n, la fonction $-f$ este concave, non-convexe,... etc., d'ordre n et réciproquement. On peut donc prendre comme type de fonction d'ordre n la fonction non-concave d'ordre n.

En particulier, la définition s'applique pour $n = -1$ et nous avons alors les fonctions qui ne changent pas de signe sur E, plus exactement les fonctions positives, non-négatives, identiquement nulles, non-positives resp. négatives. Pour $n = 0$ nous avons les fonctions *monotones*, croissantes, non-décroissantes, constantes, non-croissantes resp. décroissantes. Enfin, pour $n = 1$, nous avons les fonctions convexes, non-concaves, linéaires, non-convexes resp. concaves habituelles.

Il est clair que les fonctions d'ordre n ne sont ainsi définies que sur des ensembles E ayant au moins $n + 2$ points. Toutefois, dans certains énoncés, il est utile de supposer que toute fonction définie sur moins de $n + 2$ points est d'ordre n et indifféremment convexe ou concave d'ordre n.

Nous désignérons par $\{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$ une suite *ordonnée* de points, donc de points tels que l'on ait $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Pour que la fonction f soit convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe, resp. concave d'ordre n sur la suite ordonnée $\{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$ $(m \geqq n + 2)$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\Delta^i_{n+2}(f) > , \geqq , = , \leqq \text{ resp. } < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m - n - 1,$$

en posant

$$(2) \qquad \Delta^i_j(f) = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}; f], \; \Delta^i_0(f) = f(x_i)$$
$$i = 1, 2, \ldots, m - j, \; j = 0, 1, \ldots, m - 1.$$

Cette propriété est une conséquence immédiate de ce que nous pouvons appeler *le théorème de la moyenne des différences divisées.* Ce théorème exprime la propriété que toute différence divisée $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}; f]$ sur $n + 2$ points de la suite ordonnée $\{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$, est une moyenne arithmétique (généralisée) des différences divisées

$$\Delta^1_{n+1}(f), \; \Delta^2_{n+1}(f), \ldots, \; \Delta^{m-n-1}_{n+1}(f).$$

2. Nous allons maintenant généraliser les fonctions d'ordre n en introduisant les fonctions d'ordre $(n \mid k)$.

Soit $e = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$ un sous-ensemble (une suite) fini de E.

Définition 1. *Nous dirons que la suite* (avec les notations (2))

$$(3) \qquad \Delta^1_{n+1}(f), \; \Delta^2_{n+1}(f), \ldots, \; \Delta^{m-n-1}_{n+1}(f),$$

est la suite d_{n+1} correspondante à la suite e, ou simplement la suite d_{n+1} de e.

En particulier, la suite d_0 de e est

$$f(x_1), \; f(x_2), \ldots, \; f(x_m).$$

Introduisons maintenant la définition suivante.

Définition 2. *Nous dirons que la fonction f est d'ordre $(n \mid k)$ sur E si le nombre maximum des variations des suites d_{n+1}, de toutes les suites finies e de E, est égal à k.*

Le nombre k est égal à 0 ou à un nombre naturel. La définition exige donc que k soit fini, donc que le nombre des variations des suites d_{n+n} soit borné. Il est clair qu'il existe alors au moins une suite e dont la suite d_{n+1} présente exactement k variations. Le nombre n peut prendre les valeurs $-1, 0, 1, 2, \ldots$

Les fonctions d'ordre $(n \mid 0)$ coincident avec les fonctions d'ordre n. Pour simplifier le langage, nous dirons que l'ordre $(n \mid k)$ est plus petit, au plus égal, égal, au moins égal resp. plus grand que l'ordre $(n \mid k')$ suivant que $k < , \leqslant , = , \geqslant$ resp. $> k'$.

Il est clair que si f est d'ordre $(n \mid k)$ sur E, elle est au plus d'ordre $(n \mid k)$ sur tout $E_1 \subset E$. Si f est d'ordre $(n \mid k)$, la fonction cf, où c est une constante non nulle est aussi d'ordre $(n \mid k)$. Il en est de même de la fonction $f + P$, où P est un polynome quelconque de degré n.

3. Les fonctions d'ordre $(n \mid k)$ sont donc caractérisées par une propriété des suites d_{n+1} des sous-ensembles finis de E. Nous devons donc étudier d'abord de plus près la structure de ces suites d_{n+1}.

D'un théorème plus général de M. I. Schoenberg[1]), il résulte le

Lemme 1. *Si λ_i, μ_i, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$ sont des nombres non négatifs, le nombre des variations de la suite*

$$(4) \qquad \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2, \; \lambda_2 c_2 + \mu_2 c_3, \ldots, \; \lambda_{m-1} c_{m-1} + \mu_{m-1} c_m$$

est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$(5) \qquad c_1, c_2, \ldots, c_m.$$

Nous complétons cette propriété par le

Lemme 2. *Si les suites* (4) *et* (5) *ont le même nombre k de variations, les premiers termes non nuls dans ces suites ont le même signe et les derniers termes non nuls ont aussi le même signe.*

Dans une suite (5) le premier terme non nul est le terme c_s tel que $c_1 = c_2 = \ldots = c_{s-1} = 0$, $c_s \neq 0$ et le dernier terme non nul est défini d'une façon analogue. La démonstration du lemme 2 se fait facilement par induction sur le nombre k. On suppose bien entendu que, si $k = 0$, aucune des suites (4), (5) n'est identiquement nulle.

Considérons maintenant une suite finie $e = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$ de E. Nous avons le

Théorème 1. *Le nombre des variations de la suite d_{n+1} d'une suite partielle de e est au plus égal au nombre des variations de la suite d_{n+1} de e.*

Il suffit évidemment de démontrer la propriété pour les suites partielles $e_j = \{ x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1} \ldots, x_m \}$, $l \leqq j \leqq m$ de e. Soient (3) la suite d_{n+1} de e et

$$(6) \qquad \overset{*}{\Delta}{}^{1}_{n+1}(f), \; \overset{*}{\Delta}{}^{2}_{n+1}(f), \ldots, \; \overset{*}{\Delta}{}^{m-n-2}_{n+1}(f)$$

[1]) I. Schoenberg: *Uber variationsvermindernde lineare Transformationen*, Math. Zeitschrift, 32, 321—328, (1930).

la suite d_{n+1} de e_j. Nous avons

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta^{*i}_{n+1}(f) = \Delta^{i}_{n+1}(f), & i = 1, 2, \ldots, j-n-2 \\ \Delta^{*i}_{n+1}(f) = \dfrac{(x_j - x_i)\, \Delta^{i}_{n+1}(f) + (x_{i+n+2} - x_j)\, \Delta^{i+1}_{n+1}(f)}{x_{i+n+2} - x_i} & \\ & i = j-n-1,\ j-n, \ldots, j-1 \\ \Delta^{*i}_{n+1}(f) = \Delta^{i+1}_{n+1}(f), & i = j,\ j+1, \ldots, m-n-2 \end{cases}$$

et la propriété résulte du lemme 1. Dans les formules (7) les deux premiers groupes sont à supprimer si $j = 1$. Le premier groupe est à supprimer et dans le second i varie de 1 à $j-1$ si $1 < j \leqq n+2$. Il en est de même pour les deux derniers groupes si $j \geqq m-n-1$.

Il en résulte aussi que si la suite d_{n+1} d'une suite partielle de e présente exactement autant de variations que la suite (3), les premiers termes non nuls dans les deux suites d_{n+1} ont le même signe et les derniers termes non nuls ont aussi le même signe.

4. Considérons une fonction f définie sur E et un entier $n \geqq -1$.

Definition 3. *Nous dirons que la suite finie $e = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ de E est irréductible si on ne peut supprimer aucun point de e sans diminuer le nombre des variations de sa suite d_{n+1}.*

Dans le cas contraire nous dirons que la suite e est réductible.

Il est clair que la réductibilité dépend de n, de la fonction f et du nombre k des variations de la suite d_{n+1} de e. Nous verrons que si n et k sont donnés, le nombre des termes d'une suite irréductible a un maximum indépendant de la fonction f.

Dans le cas $k = 0$, pour que e soit irréductible il faut et il suffit qu'il soit formé par $n+2$ points. Dans les démonstrations qui vont suivre nous supposerons $k > 0$. Les résultats pour $k = 0$ s'en déduisent facilement.

Pour que e soit irréductible il faut et il suffit, d'après le théorème 1, que les suites d_{n+1} des suites partielles $e_j = \{x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ présentent toutes moins de variations que la suite d_{n+1} de e. Pour que la suite e soit réductible il faut et il suffit que la suite d_{n+1} de l'une au moins des suites e_j présente exactement autant de variations que la suite d_{n+1} de e.

Soient toujours (3) la suite d_{n+1} de e et (6) la suite d_{n+1}, de e_j. Les formules (7) nous montrent que si la suite partielle

$$\Delta^{j-n-1}_{n+1}(f), \Delta^{j-n}_{n+1}(f), \ldots, \Delta^{j}_{n+1}(f)$$

ne présente pas de variations, le nombre des variations des suites (3), (6) est le même. Il en résulte immédiatement que si la suite partielle de (3).

$$(8)\qquad \Delta^{\alpha-n}_{n+1}(f),\ \Delta^{\alpha-n+1}_{n+1}(f), \ldots,\ \Delta^{\beta}_{n+1}(f),\ \alpha < \beta,$$

ne présente pas de variations, la suite d_{n+1}, de la suite $\{x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, x_{\beta+1}, \ldots, x_m\}$ présente exactement autant de variations que la suite (3). On voit facilement comment il faut modifier la propriété si

$$\alpha - n < 1 \text{ ou } \beta > m-n-1.$$

On en déduit qu'on peut toujours trouver un $e^* \leqq e$ dont la suite d_{n+1} présente autant de variations que la suite (3) et dans laquelle les deux premiers termes sont non nuls et de signe contraires et les deux derniers termes sont aussi non nuls et de signes contraires. Il en résulte:

Théorème 2. *Si* (3) *est la suite d_{n+1} d'une suite irréductible e, nous avons*

$$\Delta^{1}_{n+1}(f) \cdot \Delta^{2}_{n+1}(f) < 0,\ \Delta^{m-n-2}_{n+1}(f) \cdot \Delta^{m-n-1}_{n+1}(f) < 0.$$

Théorème 3. *Lorsque $k = 0, 1$, toute suite irréductible e a $n+k+2$ points.*

En particulier si $k = 1$, la suite d_{n+1} d'un e irréductible est formée par deux termes non nuls et de signes contraires.

On voit aussi, facilement:

Théorème 4. *Lorsque $n = -1, 0$, toute suite irréductible e a $n+k+2$ points.*

Il est clair que les termes de la suite d_{n+1} de e sont alors tous différents de zéro et alternativement positifs et négatifs.

Examinons le cas $n \geqq 1$. Supposons que dans les formules (7) on ait $\alpha > n$, $m-n-1 \geqq \beta \geqq \alpha + 2$ et que la suite partielle (8) présente une variation. On peut alors trouver un γ tel que $\alpha - n < \gamma \leqq \beta$, $\Delta^{\gamma}_{n+1}(f) \neq 0$ et que les suites

$$(9)\qquad \Delta^{\alpha-n}_{n+1}(f), \Delta^{\alpha-n+1}_{n+1}(f), \ldots, \Delta^{\gamma-1}_{n+1}(f)$$

$$(10)\qquad \Delta^{\gamma}_{n+1}(f), \Delta^{\gamma+1}_{n+1}(f), \ldots, \Delta^{\beta}_{n+1}(f)$$

ne présentent pas de variations. Dans (9) il y a, d'ailleurs, au moins un terme non nul et de signe contraire avec $\Delta^{\gamma}_{n+1}(f)$. Les résultats précédents nous montrent qu'on peut supposer que les suites (9), (10) aient chacune au plus $n+1$ termes. On peut, en effet, revenir à ce cas en supprimant un certain nombre de points x_i sans modifier le nombre des variations de la suite d_{n+1} de e. Il en résulte aussi que les suites (9) et (10) ont chacune au moins deux termes. Si maintenant la suite (9) a au plus n termes, en supprimant le point $x_{\alpha+1}$ on ne diminue pas le nombre des variations de la suite (8) et par suite on ne diminue pas le nombre de variations de la suite (3). Si la suite (9) a $n+1$ termes on arrivè au même résultat en supprimant le point $x_{\alpha+2}$. On en déduit que si la suite (3) présente k variations, on peut trouver un $e^* \leqq e$ dont la suite d_{n+1} présente k variations et qui est formé par au plus $\left[\frac{k}{2}\right] n+k+1$ termes [1]) Il en résulte le

Théorème 5. *Si $n \geqq 0$, toute suite irréductible, dont la suite d_{n+1} présente k variations, a au plus $\left[\frac{k+2}{2}\right] n+k+2$ points.*

On peut remarquer qu'en supprimant le point $x_{\alpha+1}$, on ne diminue pas le nombre des variations de la suite (3) si $\beta = \alpha + 1$ et $\Delta_{n+1}^{\gamma-1}(f) = 0$. En appliquant cette propriété au cas $n = 1$, on voit facilement que si $n = -0,1$ et si la suite (3) présente k variations, on peut trouver un $e^* \leqslant e$ dont la suite d_{n+1} présente k variations et a tous ses termes non nuls. Donc

Théorème 6. *Lorsque $n = -1, 0, 1$, tous les termes de la suite d_{n+1} d'une suite irréductible e sont différents de zéro.*

On peut voir facilement que dans les suites d_{n+1}, de toutes les suites partielles irréductibles de e, dont les suites d_{n+1} ont autant de variations que la suite d_{n+1} de e, les premiers termes sont de même signe et les derniers termes sont aussi de même signe.

Il est évident, d'ailleurs, que si e est réductible, on peut trouver un $e^* < e$ irréductible dont la suite d_{n+1} présente exactement autant de variations que la suite d_{n+1} de e.

4 bis. Le nombre maximum des points d'une suite irréductible peut effectivement être atteint. Il suffit de considérer le cas $n > 0$. Prenons la suite $e = \{1, 2, \ldots, m\}$, $m = \left[\frac{k+2}{2}\right] n+k+2$ et choisissons la fonction f de manière que l'on ait

$$\Delta_{n+1}^{i(n+2)+1}(f) = 1, \qquad i = 0,1,\ldots,\left[\frac{k}{2}\right],$$

$$\Delta_{n+1}^{i(n+2)}(f) = \Delta_{n+1}^{j(n+2)+2}(f) = -n-2,$$

$$i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right], \quad j = 0, 1, \ldots, \left[\frac{k-1}{2}\right],$$

$$\Delta_{n+1}^{l}(f) \leqq 0, \quad i \neq 0, 1, 2, \pmod{n+2}.$$

[1]) Nous désignons, comme d'habitude, par $[a]$ le plus grand entier $\leqq a$.

La suite e est alors irréductible. Cet exemple nous montre que si $n > 1$ la suite d_{n+1} d'une suite e irréductible peut avoir effectivement des termes nuls.

5. Revenons aux fonctions d'ordre $(n \mid k)$. Introduisons d'abord la

Définition 4. *Nous dirons que la suite finie e de E est une suite maximisante, pour la fonction f d'ordre $(n \mid k)$, si sa suite d_{n+1} présente exactement k variations.*

Il existe évidemment des suites maximisantes. Toute suite finie de E qui contient une suite partielle maximisante est encore maximisante. On en déduit immédiatement que si la suite d_{n+1} de e présente k variations, la fonction est d'ordre $(n \mid k)$ sur e. Il en résulte aussi que dans les suites d_{n+1} des suites maximisantes, les premiers termes non nuls ont le même signe et les derniers termes non nuls ont aussi le même signe. Le signe du dernier terme non nul (ou du premier terme non nul) est donc caractéristique pour la fonction.

Définition 5. *Nous dirons que la fonction f d'ordre $(n \mid k)$ est d'ordre $(n \mid k)^+$ ou d'ordre $(n \mid k)^-$ suivant que le dernier terme non nul de la suite d_{n+1} d'une suite maximisante de E est positif ou négatif.*

Les fonctions d'ordre $(n \mid 0)^+$ sont les fonctions non-concaves d'ordre n et les fonctions d'ordre $(n \mid 0)^-$ les fonctions non-convexes d'ordre n. Les fonctions polynomiales d'ordre n échappent ainsi à cette définition, mais nous pouvons convenir qu'une telle fonction soit indifféremment d'ordre $(n \mid 0)^+$ ou d'ordre $(n \mid 0)^-$.

Si f est d'ordre $(n \mid k)^+$ resp. d'ordre $(n \mid k)^-$, il en est de même de cf, où c est une constante positive et de la fonction $f + P$, où P est un polynome de degré n. La fonction $-f$ est d'ordre $(n \mid k)^-$ resp. d'ordre $(n \mid k)^+$.

Si la fonction f n'est pas d'ordre $\leqq (n \mid k)$ sur E, on peut trouver un sous-ensemble de E sur lequel f soit d'ordre $(n \mid k+1)$. On voit aussi, facilement, qu'on peut trouver un sous-ensemble fini de E sur lequel f soit d'ordre $(n \mid k)^+$ et un sous-ensemble fini de E sur lequel f soit d'ordre $(n \mid k)^-$.

6. Rappelons la propriété bien connue, exprimée par le

Lemme 3. *Si la suite*

$$c_2 - c_1,\ c_3 - c_2, \ldots,\ c_m - c_{m-1} \tag{11}$$

présente k variations, la suite

$$c_1,\ c_2, \ldots,\ c_m, \tag{12}$$

présente au plus $k+1$ variations.

Nous pouvons completer ce lemme par le suivant

Lemme 4. *Si la suite* (11) *présente* k ($\geqq 0$) *variations et la suite* (12) *exactement* $k+1$ *variations, les derniers termes non nuls dans les deux suites sont de même signe.*

Considérons la fonction $f(x_i) = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sur l'ensemble $e = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Si $m = k+2$ et la suite (12) présente $k+1$ variations, la suite (11) présente nécessairement k variations et le lemme se démontre facilement. Si $m > k+2$, la fonction étant d'ordre $(-1 \mid k+1)$ sur e, on peut trouver une suite partielle $e^* = \{x_1^*, x_2^* \ldots, x_{k+2}^*\}$ de $k+2$. termes de e, maximisante et irréductible. f est aussi d'ordre $(0 \mid k)$ et par rapport à cet ordre e et e^* sont maximisantes. Le lemme 4 en résulte immédiatement.

Compte tenu des égalités

$$\Delta_{n+1}^i(f) = \frac{\Delta_n^{i+1}(f) - \Delta_n^i(f)}{x_{n+i+1} - x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-n-1$$

relatives à un $e = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, le lemme 3 nous donne le

Théorème 7. *Toute fonction d'ordre* $(n \mid k)$, $n \geqq 0$, *est au plus d'ordre* $(n-1 \mid k+1)$. *En général, toute fonction d'ordre* $(n \mid k)$ *est au plus d'ordre* $(n-1 \mid k+i)$, *quel que soit* $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Du lemme 4 il résulte encore la propriété plus complète suivante.

Théorème 8. *Si une fonction d'ordre* $(n \mid k)^+$ *est d'ordre* $(n-1 \mid k+1)$, *elle est nécessairement d'ordre* $(n-1 \mid k+1)^+$. *En général, si la fonction est d'ordre* $(n-i \mid k+i)$, *elle est nécessairement d'ordre* $(n-i \mid k+i)^+$, *quel que soit* $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Dans les notes suivantes nous examinerons quelques propriétés des fonctions d'ordre $(n \mid k)$.

Manuscrit reçu le 2 mai 1940.