17

ACADÉMIE ROUMAINE
BULLETIN DE LA SECTION SCIENTIFIQUE
TOME XXII-ème No. 8

NOTES SUR LES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR (V)

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Note présentée par Mr. S. Stoilow, Mc. A. R., dans la séance du 23 février 1940

INÉGALITÉS VÉRIFIÉES PAR UNE FONCTION D'ORDRE n ET PAR SES DÉRIVÉES

1. Dans les deux notes précédentes (III et IV [1]) nous avons étudié les inégalités de la forme

$$\sum_{i=1}^{m} p_i f(x_i) \geq 0, \tag{1}$$

vérifiées par toute fonction non-concave d'ordre n, les points

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m, \tag{2}$$

étant donnés et les coefficients p_i étant indépendants de la fonction f.

Les conditions nécessaires et suffisantes, que doivent satisfaire les coefficients p_i, pour qu'il en soit ainsi, s'obtiennent facilement, par exemple, à l'aide de la formule que nous pouvons appeler *la formule fondamentale de transformation des différences divisées.* Cette formule s'écrit [2])

$$\sum_{i=1}^{m} p_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} A_i[x_1, x_2, \ldots, x_i; f] + \sum_{i=1}^{m-n-1} C_i[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}; f],$$

où A_i, C_i sont indépendants de la fonction f.

On obtient alors des conditions *suffisantes* pour l'inégalité (1) en écrivant

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_{n+1} = 0, \quad C_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-n-1. \tag{3}$$

Ces conditions sont aussi *nécessaires* si la fonction est *définie seulement sur les points* (2).

[1]) La note III est sous presse dans Mathematica, **16**, 74—86. La note IV doit paraître dans cette même revue.

[2]) Pour les notations voir mes travaux antérieurs.

On peut, d'ailleurs, obtenir facilement les coefficients A_i, C_i en particularisant convenablement la fonction f. En prenant d'abord

$$f = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{j-1}),\ j = 1, 2, \dots, n+1,\ (\text{pour } j=1,\ f=1)$$

nous obtenons

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} p_i (x_i - x_1)\dots(x_i - x_{j-1}) = \sum_{i=j}^{m} p_i (x_i - x_1)\dots(x_i - x_{j-1})$$
$$j = 1, 2, \dots, n+1.$$

Si nous prenons ensuite

$$f = \begin{cases} 0, & \text{pour } x = x_1, x_2, \dots, x_{j+n}, \\ (x - x_{j+1})(x - x_{j+2})\dots(x - x_{j+n}), & \text{pour } x = x_{j+n+1}, x_{j+n+2}, \dots, x_m, \end{cases}$$
$$j = 1, 2, \dots, m-n-1,$$

nous obtenons

$$C_j = (x_{j+n+1} - x_j) \sum_{i=j+n+1}^{m} p_i (x_i - x_{j+1})(x_i - x_{j+2})\dots(x_i - x_{j+n})$$
$$j = 1, 2, \dots, m-n-1.$$

Lorsque la fonction f est définie dans un intervalle contenant les points (2) les conditions (3) ne sont plus nécessaires pour $n > 1$. Pour que l'inégalité (1) ait lieu, quelle que soit la fonction f définie dans un intervalle contenant à son intérieur les points (2), il faut et il suffit que cette inégalité soit vraie pour tout polynome de degré n et pour toute fonction de la forme $(|x-\lambda| + x - \lambda)^n$, λ étant une constante. En effet, toute fonction non-concave d'ordre n est la limite d'une suite de fonctions qui sont, à un polynome additif de degré n près, des sommes de telles fonctions $(|x-\lambda| + x - \lambda)^n$ à coefficients positifs [3]).

On trouve ainsi les égalités nécessaires et suffisantes

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i = \dots = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i^n = 0,$$

qui ne sont autre que $A_1 = A_2 = \dots = A_{n+1} = 0$, exprimant que le premier membre de (1) est identiquement nul pour tout polynome de degré n.

On trouve ensuite les inégalités nécessaires et suffisantes

$$\sum_{i=r+1}^{m} p_i (x_i - x)^n \geq 0, \quad x \in (x_r, x_{r+1}), \quad r = 1, 2, \dots, m-1.$$

[3]) Tiberiu Popoviciu, *Sur le prolongement des fonctions convexes d'ordre supérieur*, Bull. Math. Soc. Roumaine des Sci., **36**, 75—108 (1934).

2. On peut généraliser l'inégalité (1) en introduisant aussi les valeurs des dérivées de f aux points x_i. Pour simplifier supposons f définie dans un intervalle contenant les points (2). Si $n > 1$ la fonction f, non-concave d'ordre n, a des dérivées continues $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ et des dérivées à gauche et à droite d'ordre n, $f_g^{(n)}$, $f_d^{(n)}$ $[f_g^{(n)} = (f^{(n-1)})'_g,\ f_d^{(n)} = (f^{(n-1)})'_d]$ en tout point intérieur.

On peut alors chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} p_{ij} f^{(j)}(x_i) \geq 0, \tag{4}$$

où $0 \leq k_i \leq n$ et $f^{(n)}$ désigne l'une des dérivées $f_g^{(n)}$, $f_d^{(n)}$ (non pas nécessairement la même pour tous les x_i), quelle que soit la fonction f, non-concave d'ordre n dans un intervalle contenant à son intérieur les points x_i. On voit facilement que les conditions nécessaires et suffisantes sont encore que l'inégalité ait lieu pour tout polynome de degré n et pour toute fonction de la forme $(|x-\lambda| + x - \lambda)^n$. Ces conditions peuvent donc s'écrire

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} p_{ij}\, r(r-1)\dots(r-j+1)\, x_i^{r-j} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} p_{ij}\, n(n-1)\dots(n-j+1)\, (x_i - x)^{n-j} \geq 0, \quad x \in (x_r, x_{r+1}),$$
$$r = 1, 2, \dots, m-1.$$

Si, de plus,

$$\sum_{j=0}^{k_i} |p_{ij}| \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

on peut affirmer que pour une fonction convexe d'ordre n le signe $>$ a lieu dans (4).

Dans le cas $\sum_{i=1}^{m} (k_i + 1) = n + 2$, l'inégalité peut s'écrire

$$[\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{k_1+1}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{k_2+1}, \dots, \underbrace{x_m, x_m, \dots, x_m}_{k_m+1}; f] \geq 0. \tag{5}$$

Le premier membre est la limite d'une différence divisée d'ordre $n+1$, lorsque $k_i + 1$ de ses $n+2$ points tendent vers x_i, $i = 1, 2, \dots, m$. Il est facile d'obtenir la forme explicite de cette différence divisée généralisée.

3. On peut aussi établir, quelques fois, l'exactitude de l'inégalité (4) en exprimant le premier membre sous la forme d'une somme de différences divisées d'ordre $n+1$ (de la forme généralisée (5)) choisies convenablement. Nous allons établir de cette façon une inégalité particulière intéressante.

Soient $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ n points distincts de l'axe réel et posons

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Soient $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1}$ les zéros, tous réels, de la dérivée $\varphi'(x)$ du polynome $\varphi(x)$. Nous avons

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1} < x_n.$$

Nous avons les formules suivantes

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n; f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)}, \quad [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}; f'] = n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f'(\xi_i)}{\varphi''(\xi_i)},$$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_j, \xi_j; f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - \xi_j)^2 \varphi'(x_i)} + \frac{f'(\xi_j)}{\varphi(\xi_j)},$$

$$j = 1, 2, \ldots, n-1$$

Nous en déduisons

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(\xi_j)}{\varphi''(\xi_j)}[x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_j, \xi_j; f] = \tag{6}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} \left(-\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varphi(\xi_j)}{(x_i - \xi_j)^2 \varphi''(\xi_j)} \right) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f'(\xi_j)}{\varphi''(\xi_j)}.$$

Le polynome

$$\psi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{n}\left(x - \frac{x_2 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)\varphi'(x)$$

étant de degré $n-2$ nous avons

$$\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\psi(\xi_j)}{(x - \xi_j)\varphi''(\xi_j)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varphi(\xi_j)}{(x - \xi_j)\varphi''(\xi_j)}$$

et

$$-\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varphi(\xi_j)}{(x_i - \xi_j)^2 \varphi''(\xi_j)} = \left[\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}\right]'_{x=x_i} =$$

$$= \left[\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} - \frac{1}{n}\left(x - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)\right]'_{x=x_i} = \frac{n-1}{n}.$$

La formule (6) peut donc s'écrire

$$\frac{n-1}{n}[x_1, x_2, \ldots, x_n; f] - \frac{1}{n}[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}; f'] =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varphi(\xi_j)}{\varphi''(\xi_j)}[x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_j, \xi_j; f].$$

Nous avons

$$-\frac{\varphi(\xi_j)}{\varphi''(\xi_j)} > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

et nous pouvons énoncer le théorème suivant

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n points de l'axe réels et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ sont les zéros de la dérivée du polynome $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, toute fonction f, non-concave d'ordre n dans un intervalle contenant à son intérieur les points x, vérifie l'inégalité

$$(n-1)[x_1, x_2, \ldots, x_n; f] \geq [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}; f']. \tag{7}$$

Nous avons démontré la propriété dans le cas où les points x_i sont distincts. Elle reste vraie aussi, par suite de la continuité, lorsque ces points ne sont pas distincts [les différences divisées étant alors de la forme généralisée (5)].

Remarques I. On voit facilement que si de plus la fonction f est convexe d'ordre n, l'égalité dans (7) ne peut avoir lieu que si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

II. La restriction que les x_i soient à l'intérieur de l'intervalle de définition de f n'est pas essentielle. Le résultat reste le même si l'une ou les deux extrémités de cet intervalle coïncident avec un zéro simple de $\varphi(x)$. Le résultat est vraie même sans restriction si la fonction est dérivable un nombre suffisant de fois aux extrémités de l'intervalle.

4. Du théorème précédent nous pouvons tirer quelques conclusions simples. Désignons par $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(j)}, \ldots, \xi_{n-i}^{(i)}$ les zéros de la dérivée d'ordre i de $\varphi(x)$. Nous avons alors, dans les mêmes conditions,

$$(n-1)!\,[x_1, x_2, \ldots, x_n; f] \geq (n-2)!\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}; f'] \geq \ldots$$

$$\ldots \geq (n-i-1)!\left[\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots, \xi_{n-i}^{(i)}; f^{(i)}\right] \geq \ldots \geq \left[\xi_1^{(n-1)}; f^{(n-1)}\right].$$

Mais,

$$\left[\xi_1^{(n-1)}; f^{(n-1)}\right] = f^{(n-1)}\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

donc:

Si la fonction f est non-concave d'ordre n dans un intervalle contenant les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous avons l'inégalité

$$(n-1)!\,[x_1, x_2, \ldots, x_n; f] \geq f^{(n-1)}\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

Si f est convexe d'ordre n, l'égalité n'est possible que pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Prenons, en particulier, la fonction $f = x^{n+r-1}$. Alors si r est un nombre naturel, la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_n; f]$ est égale à la fonction symétrique bien connue

$$W_r = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = r} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Désignons par W'_r les mêmes fonctions symétriques de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ et, en général, par $W_r^{(i)}$ les fonctions symétriques correspondantes de $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots, \xi_{n-i}^{(i)}$. Remarquons que la fonction x^{n+r-1} est convexe d'ordre n dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ si r est un nombre naturel pair et est convexe d'ordre n dans $(0, +\infty)$ si r est un nombre naturel impair. Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante:

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les zéros, tous réels, d'un polynome de degré n et $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots, \xi_{n-i}^{(i)}$ sont les zéros de la $i^{\text{ème}}$ dérivée de ce polynome $\left(\xi_1^{(n-1)} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$, nous avons les inégalités

$$(8) \qquad \frac{W_r}{\binom{n+r-1}{r}} \geq \frac{W'_r}{\binom{n+r-2}{r}} \geq \ldots \geq \frac{W_r^{(i)}}{\binom{n+r-i-1}{r}} \geq \ldots \geq \left(\frac{x_1+x+\ldots+x_n}{n}\right)^r$$

pour tout nombre naturel pair $r \geq 2$.

Si, de plus, les zéros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont non-négatifs, ces inégalités sont vraies aussi pour $r \geq 3$ impair.

Le signe $\geq$ ne devient $=$ dans ces inégalités que si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

L'inégalité (7) est à rapprocher de l'inégalité de M. K. Toda [4])

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \geq \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_{n-1})}{n-1}$$

valable pour toute fonction non-concave d'ordre 1 [5]). Pour $f = x^p$ où, $p \geq 1$ ou $p < 0$, cette inégalité revient à celle de MM. H. E. Bray [6]) et S. Kakeya [7])

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n} \geq \frac{\xi_1^p + \xi_2^p + \ldots + \xi_{n-1}^p}{n-1}, \qquad (x_i > 0)$$

qui est à rapprocher de (8).

Cernăuţi, le 27 février 1940.

[4]) K. Toda, *On certain functional inequalities*, Journal of the Hiroshima. Univ., A,, **4** 27—40 (1934).

[5]) Voir aussi la note III, *loc. cit.* (1).

[6]) H. E. Bray, *On the zeros of a polynomial and of its derivatives*, Amer. Journal of Math., **53**, 864—872 (1931).

[7]) S. Kakeya, *On an inequality between the roots of an equation and its derivative*, Proceedings Phys.-Math. Soc. Japan (3), **15**, 149—154 (1933).