

46
EXTRAS DIN

MATHEMATICA

VOLUMUL XVI

Pag. 74—86

TIBERIU POPOVICIU

**Notes sur les fonctions convexes
d'ordre supérieur (III)**

CLUJ

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE »ARDEALUL«, STRADA MEMORANDULUI 2

1940

NOTES SUR LES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR (III)

par

Tiberiu Popoviciu

à Cernăuți

Reçu le 31 Mai 1938.

Sur certaines inégalités vérifiées par les fonctions convexes

1. — Soit $f(x)$ une fonction non-concave (d'ordre 1) dans l'intervalle (a, b) . Cette fonction est caractérisée par l'inégalité

$$(1) \quad [x_1, x_2, x_3; f] \geq 0, \quad (1)$$

vérifiée par tout groupe de trois points distincts x_1, x_2, x_3 de (a, b) .

De (1) résultent d'autres inégalités bien connues. Telle est l'inégalité de JENSEN ⁽²⁾

$$(2) \quad f\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \leq \frac{\sum p_i f(x_i)}{\sum p_i}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum p_i > 0.$$

MM. G. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYA ont déterminé toutes les inégalités de la forme

$$(3) \quad \sum_{i=1}^m f(x_i) \geq \sum_{i=1}^m f(y_i) \quad (3).$$

(¹) Pour les notations voir mes travaux antérieurs.

(²) J. L. W. V. JENSEN, «*Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*», Acta Math., **30**, 175—193 (1906).

(³) G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. POLYA, «*Some simple inequalities satisfied by convex functions*», Mess. of Math. **58**, 145—152 (1929). Voir aussi J. KARAMATA, «*Sur une inégalité relative aux fonctions convexes*», Publ. Math. Univ. Belgrade, **1**, 145—148 (1932).

En particulier, M. K. TODA a démontré que

$$(4) \quad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(x_i) \geq \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} f(y_i),$$

si y_i sont les zéros de la dérivée du polynôme $\prod_{i=1}^m (x-x_i)$ ⁽⁴⁾. Ce résultat a été déjà établi pour la fonction particulière $f(x) = x^p$, dans le cas de p entier positif par M. H. BRAY ⁽⁵⁾, et dans le cas de $p \geq 1$ quelconque par M. S. KAKEYA ⁽⁶⁾.

2. — Il est facile de trouver les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les constantes non nulles p_i et les points $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ de (a, b) pour que l'on ait ($m \geq 3$)

$$(5) \quad \sum_{i=1}^m p_i f(x_i) \geq 0,$$

quelle que soit la fonction non-concave $f(x)$.

Nous pouvons écrire

$$(6) \quad \sum_{i=1}^m p_i f(x_i) = A_0 f(x_1) + A_1 [x_1, x_2; f] + \sum_{r=1}^{m-2} C_r \Delta_r^r,$$

où

$$\Delta_r^r = [x_r, x_{r+1}, x_{r+2}; f], \quad r = 1, 2, \dots, m-2,$$

les constantes A_0, A_1, C_r sont complètement déterminées et sont indépendantes de la fonction $f(x)$. Les conditions nécessaires et suffisantes sont

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad C_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, m-2.$$

En effet, on peut construire une fonction non-concave $f(x)$ telle que $f(x_1), [x_1, x_2; f]$ aient des valeurs quelconques et Δ_r^r des valeurs non-négatives quelconques.

Pour déterminer les coefficients A_0, A_1, C_r il suffit de choisir $f(x)$ convenablement. Si nous prenons d'abord $f(x) = \alpha x + \beta$, α, β

⁽⁴⁾ K. TODA, «On certain functional inequalities». Journal of the Hiroshima Univ. (A), 4, 27—40, (1934), et «A method of approximation of convex functions». The Tôhoku Math. Journal, 42, 311—317 (1936).

⁽⁵⁾ H. E. BRAY, «On the zeros of a polynomial and of its derivatives». Amer. Journal of Math. 53, 864—872 (1931).

⁽⁶⁾ S. KAKEYA, «On an inequality between the roots of an equation and its derivatives». Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, (3), 15, 149—154 (1933).

étant des constantes quelconques, on trouve

$$A_0 = \sum_{i=1}^m p_i, \quad A_1 = \sum_{i=1}^m p_i x_i - x_1 \sum_{i=1}^m p_i = \sum_{i=2}^m p_i (x_i - x_1).$$

Prenons ensuite $f(x) = x - x_{r+1} + |x - x_{r+1}|$, $1 \leq r \leq m-2$, nous avons

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f] = \begin{cases} 0, & i \neq r \\ \frac{2}{x_{r+2} - x_r}, & i = r \end{cases}$$

et l'égalité (6) nous donne

$$C_r = (x_{r+2} - x_r) \sum_{i=r+2}^m p_i (x_i - x_{r+1}), \quad r = 1, 2, \dots, m-2.$$

Nous avons donc la propriété suivante :

Pour que l'inégalité (5) soit vérifiée pour toute fonction non-concave (d'ordre 1) $f(x)$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(7) \quad \sum_{i=1}^m p_i = \sum_{i=1}^m p_i x_i = 0, \quad \sum_{i=r+2}^m p_i (x_i - x_{r+1}) \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, m-2.$$

Si ces relations sont vérifiées et si de plus $f(x)$ est convexe, on a

$$\sum_{i=1}^m p_i f(x_i) > 0.$$

La dernière partie de l'énoncé résulte du fait qu'on ne peut avoir $\sum_{i=r+2}^m p_i (x_i - x_{r+1}) = 0$, $r = 1, 2, \dots, m-2$, les p_i étant $\neq 0$ par hypothèse.

3. — Sous la forme (7) les conditions précédentes ne sont pas très commodes pour les applications.

Reprenons d'abord l'inégalité (3). Supposons que les x_i soient donnés et disons que :

Les $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ vérifient la condition (C) si on peut trouver m^2 nombres non-négatifs p_{ij} tels que

$$1^\circ. \quad \sum_{i=1}^m p_{ij} = \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

$$2^0. y_i = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \dots + p_{im}x_m, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

En appliquant l'inégalité (2) de JENSEN, on voit que :

Si $y_1, y_2, \dots, y_m$ vérifient la condition (C), l'inégalité (3) est vérifiée quelle que soit la fonction non-concave $f(x)$.

Considérons, dans l'espace ordinaire à m dimensions, le point $P(y_1, y_2, \dots, y_m)$ de coordonnées $y_1, y_2, \dots, y_m$. Nous dirons que ce point vérifie la condition (C) si ses coordonnées $y_1, y_2, \dots, y_m$ vérifient cette condition.

Supposons que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m, y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_m$ et disons alors que :

Les $y_1, y_2, \dots, y_m$ vérifient la condition (C') si on a

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_i \leq y_1 + y_2 + \dots + y_i, & i = 1, 2, \dots, m-1 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_m \end{cases} \quad (7).$$

Nous avons alors que (8)

La condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité (3) soit vérifiée quelle que soit la fonction non-concave $f(x)$ est que les $y_1, y_2, \dots, y_m$ vérifient la condition (C').

4. — Nous nous proposons maintenant de démontrer que les conditions (C) et (C') sont équivalentes (9). Pour cela il suffit de démontrer que si $y_1, y_2, \dots, y_m$ vérifient la condition (C') le point $P(y_1, y_2, \dots, y_m)$ vérifie la condition (C).

Remarquons que si un nombre quelconque de points $P_1, P_2, \dots$ vérifient la condition (C) tout point qui appartient au plus petit domaine convexe qui contient les points $P_1, P_2, \dots$ vérifie également la condition (C). On voit, d'autre part, que les points P vérifiant la condition (C') forment un domaine convexe et borné D. Or, le domaine D est formé par les hyperplans

$$(9) \quad \begin{cases} y_i = y_{i+1}, y_1 + y_2 + \dots + y_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i, & i = 1, 2, \dots, m-1 \\ y_1 + y_2 + \dots + y_m = x_1 + x_2 + \dots + x_m. \end{cases}$$

(7) La condition (C') peut se mettre sous la forme symétrique

$$\min (x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}) \leq y_{j_1} + y_{j_2} + \dots + y_{j_k} \leq \max (x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k})$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

où le min et le max sont relatifs à toutes les combinaisons $i_1, i_2, \dots, i_k$ des nombres $1, 2, \dots, m$ pris k à k et $j_1, j_2, \dots, j_k$ sont k nombres quelconques de la suite $1, 2, \dots, m$.

(8) voir loc. cit. (3).

(9) Cette propriété est due à MM. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYA. Voir: „Inequalities“ Cambridge Univ. Press, XII—314 pp. (1934). (Note après la correcture).

Ce domaine peut aussi être considéré comme le plus petit domaine convexe contenant ceux des points d'intersections des hyperplans (9) qui vérifient la condition (C'). Il est facile de voir qu'il y a en tout 2^{m-1} de tels points. Ces points sont

$$(\underbrace{\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_1}_{i_1}, \underbrace{\xi_2, \xi_2, \dots, \xi_2}_{i_2}, \dots, \underbrace{\xi_k, \xi_k, \dots, \xi_k}_{i_k})$$

où

$$i_1 + i_2 + \dots + i_k = m, \quad \xi_r = \frac{1}{i_r} \sum_{s=1}^{i_r} x_{i_1+i_2+\dots+i_{r-1}+s}, \quad r = 1, 2, \dots, k.$$

Mais, tous ces points vérifient évidemment la condition (C). L'équivalence des deux conditions (C) et (C') est donc démontrée.

5. — Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité (3) soit vérifiée, quelle que soit la fonction non-concave $f(x)$, est que les $y_1, y_2, \dots, y_m$ vérifient la condition (C).

Nous pouvons toujours mettre une inégalité (b) sous la forme

$$(10) \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i f(x_i) \geq \sum_{i=1}^s \beta_i f(y_i) \quad (r+s \geq 3),$$

où $\alpha_i > 0, \beta_i > 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s = 1, x_1 < x_2 < \dots < x_r, y_1 < y_2 < \dots < y_s$. On obtient cette inégalité de (3) en supposant d'abord que certains des points x_i, y_j viennent de coïncider et ensuite par des passages à la limite (si les α_i, β_i ne sont pas tous rationnels). Il est facile de déduire alors de ce qui précède la propriété générale suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité (10) soit vérifiée, quelle que soit la fonction non-concave $f(x)$, est qu'on puisse trouver r, s nombres non-négatifs p_{ij} de manière que l'on ait

$$1^0. \sum_{j=1}^s p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$(11) \quad 2^0. \sum_{i=1}^r \beta_i p_{ij} = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

$$3^0. y_i = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \dots + p_{ir}x_r, \quad i = 1, \dots, s.$$

Il est clair que si $f(x)$ est convexe c'est le signe $>$ qui convient toujours dans (10).

6. — Comme application reprenons l'inégalité (4) de M. K. TODA. Considérons le polynôme $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)$ où nous pouvons supposer que les zéros (réels) $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont dis-

tincts et soient $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ les zéros de la dérivée $P'(x)$. Nous allons montrer qu'on peut effectivement satisfaire aux conditions (11) où, dans ce cas,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = \frac{1}{m}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{m-1} = \frac{1}{m-1}.$$

Nous avons

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \dots + \frac{1}{x-x_m}$$

d'où

$$\frac{1}{y_i-x_1} + \frac{1}{y_i-x_2} + \dots + \frac{1}{y_i-x_m} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

qui nous donne

$$y_i = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{x_j}{(y_i-x_j)^2}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{(y_i-x_j)^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Il reste à démontrer que

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{(y_i-x_j)^2}} = - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{P(y_i)}{P''(y_i)} \cdot \frac{1}{(x_i-y_i)^2} = \frac{m-1}{m}$$

$j = 1, 2, \dots, m.$

Considérons le polynôme

$$F(x) = P(x) - \frac{1}{m} \left(x - \frac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m} \right) P'(x)$$

de degré $m-2$. Nous avons

$$\frac{F(x)}{P'(x)} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{F(y_i)}{P''(y_i)(x-y_i)} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{P(y_i)}{P''(y_i)(x-y_i)}.$$

Le premier membre de (12) peut donc s'écrire

$$\left[\frac{F(x)}{P'(x)} \right]'_{x=x_j} = \left[\frac{P(x)}{P'(x)} - \frac{1}{m} \left(x - \frac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m} \right) \right]'_{x=x_j} = \frac{m-1}{m}.$$

On voit donc que l'inégalité de M. K. TODA est de cette façon une conséquence immédiate de l'inégalité (2).

7. — Pour fixer les idées supposons que

$$(13) \quad x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \dots \leq x_{m-1} \leq y_{m-1} \leq x_m,$$

nous pouvons alors écrire les inégalités (7) qui expriment la condition (C'). Les deux premières égalités (7) sont évidemment vérifiées. Il restent $2m-3$ inégalités qui, écrites sous une forme convenable, sont

$$(14) \quad (m-1)(x_1+x_2+\dots+x_i)+ix_{i+1} \leq m(y_1+y_2+\dots+y_i) \\ i = 1, 2, \dots, m-2.$$

$$(14') \quad (m-1)(x_1+x_2+\dots+x_i) \leq m(y_1+y_2+\dots+y_i)-iy_i \\ i = 1, 2, \dots, m-1.$$

On voit facilement que les inégalités (14') résultent de (13) et (14) et de

$$(15) \quad \frac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m} = \frac{y_1+y_2+\dots+y_{m-1}}{m-1}$$

donc

Si $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$ sont les zéros d'un polynôme de degré m et $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{m-1}$ les zéros du polynôme dérivé, nous avons les inégalités (14).

La première de ces inégalités n'est qu'une inégalité de LAGUERRE. D'après cette inégalité le zéro y_i est toujours compris dans l'intervalle $\left(x_i + \frac{x_{i+1}-x_i}{m}, x_{i+1} - \frac{x_{i+1}-x_i}{m} \right)$. M. R. GODEAU a généralisé ce théorème de LAGUERRE en démontrant une inégalité qui revient en somme à la suivante⁽¹⁰⁾

$$(16) \quad \frac{(m-i)x_i+x_{i+1}}{m-i+1} \leq y_i \leq \frac{ix_{i+1}+x_i}{i+1} \\ i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Il est à remarquer que les inégalités (14) ne résultent pas en général de (13), (15) et (16). Pour le voir il suffit de prendre

$$m=5, \begin{cases} x_1=0, x_2=60, x_3=120, x_4=180, x_5=240 \\ y_1=15, y_2=80, y_3=163, y_4=222. \end{cases}$$

Les inégalités (14) sont donc des inégalités nouvelles entre les zéros d'un polynôme et les zéros du polynôme dérivé.

⁽¹⁰⁾ R. GODEAU „Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont réelles“ Mathesis, 45, 245—252 (1931). Ceci résulte aussi des propriétés démontrées au Chap. III de mon travail „Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles“ Mathematica, 9, 157—181 (1935),

9. — Supposons maintenant qu'il s'agit d'une fonction définie dans un intervalle (a, b) qui contient les points x_i . Les conditions (20) sont encore suffisantes mais *elles ne sont plus nécessaires*. Ceci résulte de mon travail sur le prolongement des fonctions convexes⁽¹¹⁾. En effet, dans ce cas les nombres Δ_{n+1}^r vérifient certaines inégalités, en dehors des inégalités évidentes $\Delta_{n+1}^r \geq 0$. Rappelons nous d'abord ces résultats. Considérons les fonctions $\psi_i(x)$ définies dans l'intervalle (x_1, x_m) de la manière suivante

$$(22) \quad \psi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{dans } (x_1, x_i) \\ -\sum_{j=0}^k \frac{(x_{i+j} - x)^n}{Q_i(x_{i+j})}, & \text{dans } (x_{i+k}, x_{i+k+1}), k=0, 1, \dots, n \\ 0, & \text{dans } (x_{i+n+1}, x_m) \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, m-n-1$

où nous avons posé

$$Q_i(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{i+n+1}), i = 1, 2, \dots, m-n-1.$$

Nous avons alors démontré le résultat suivant:

Pour qu'il existe une fonction non-concave d'ordre n définie dans l'intervalle (x_1, x_m) et prenant les valeurs $f(x_i)$ aux points x_i il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{r=1}^{m-n-1} \lambda_r \Delta_{n+1}^r \geq 0$$

quels que soient les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-n-1}$ choisis de manière que la fonction

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{m-n-1} \lambda_r \psi_r(x)$$

soit non-négative dans l'intervalle (x_1, x_m) ⁽¹²⁾

De plus nous savons qu'on peut prendre, par exemple,

$$\Delta_{n+1}^r = \psi_r(x), r = 1, 2, \dots, m-n-1$$

x étant un point de (x_1, x_m) .

Revenons maintenant à notre problème. Les $n+1$ premières égalités (20) sont encore nécessaires. Pour le voir il suffit de re-

⁽¹¹⁾ TIBERIU POPOVICIU „Sur le prolongement des fonctions convexes d'ordre supérieur“ Bull. Math. Soc. Roumanie des Sc. **36**, 75-108 (1934).

⁽¹²⁾ Nous prenons comme intervalle (a, b) l'intervalle (x_1, x_m) . Ceci ne restreint pas la généralité puisque nous savons qu'on peut prolonger une fonction d'ordre n en dehors de l'intervalle. Voir loc. cit.⁽¹¹⁾.

marquer qu'on peut choisir comme fonction $f(x)$ un polynôme quelconque de degré $\leq n$.

D'après la remarque précédente la condition

$$(23) \quad \psi^*(x) = \sum_{r=1}^{m-n-1} C_r \psi_r(x) \geq 0, \text{ pour } x_1 \leq x \leq x_m$$

est nécessaire et on voit immédiatement que cette condition est aussi suffisante.

Pour que l'inégalité (5) soit vérifiée pour toute fonction non-concave d'ordre n $f(x)$, définie dans un intervalle (a, b) contenant les points x_i il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{i=1}^m p_i x_i = \dots = \sum_{i=1}^m p_i x_i^n = 0$$

$$\psi^*(x) \geq 0, \text{ pour } x_1 \leq x \leq x_m,$$

$\psi^*(x)$ étant la fonction (23).

Si la fonction est convexe d'ordre n c'est le signe $>$ qui convient dans (5).

10. — L'inégalité (23) peut se mettre sous une autre forme. Compte tenant de (21) et (22) on trouve, par un calcul sur lequel il est inutile d'insister,

$$(24) \quad \psi^*(x) = -\sum_{s=1}^r p_s (x_s - x)^n, \text{ dans } (x_r, x_{r+1}), r = 1, 2, \dots, m-1.$$

Compte tenant des $n+1$ premières égalités (20) on a aussi

$$\sum_{s=1}^m p_s (x_s - x)^n = 0,$$

donc

$$(24') \quad \psi^*(x) = \sum_{s=r+1}^m p_s (x_s - x)^n, \text{ dans } (x_r, x_{r+1}), r = 1, 2, \dots, m-1.$$

Nous pouvons donc énoncer la propriété cherchée sous la forme suivante

Pour que l'inégalité (5) soit vérifiée pour toute fonction non-concave $f(x)$, définie dans un intervalle (a, b) contenant les points x_i , il faut et il suffit que

$$1^\circ \sum_{i=1}^m p_i = \sum_{i=1}^m p_i x_i = \dots = \sum_{i=1}^m p_i x_i^n = 0.$$

2° Le polynome $-\sum_{s=1}^m p_s(x_s-x)^n$ [ou $\sum_{s=r+1}^m p_s(x_s-x)^n$] soit non-négatif dans l'intervalle (x_r, x_{r+1}) pour $r=1, 2, \dots, m-1$.

Remarquons, en passant, que la condition nécessaire et suffisante de prolongeabilité peut aussi s'énoncer de la manière suivante

Pour que la fonction non-concave d'ordre n $f(x)$, définie sur les points $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ soit prolongeable dans l'intervalle (x_1, x_m) il faut et il suffit que quels que soient les nombres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ choisis de manière que

$$1^\circ \sum_{i=1}^m \mu_i = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i = \dots = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i^n = 0.$$

2°. Le polynome $-\sum_{s=1}^r \mu_s(x_s-x)^n$ [ou $\sum_{s=r+1}^m \mu_s(x_s-x)^n$] soit non-négatif dans l'intervalle (x_r, x_{r+1}) pour $r=1, 2, \dots, m-1$, on ait l'inégalité

$$\sum_{i=1}^m \mu_i f(x_i) \geq 0.$$

11. — Revenons à l'inégalité (5). Prenant $r=m-1$ nous voyons que la condition $p_m > 0$ est nécessaire. Prenant $r=1$ nous trouvons qu'il faut que $-p_1(x_1-x)^n > 0$ dans (x_1, x_2) , donc $(-1)^{n+1}p_1 > 0$ est aussi nécessaire. On peut donc dire que

Si l'inégalité (5) est vérifiée pour toute fonction non-concave d'ordre n définie dans un intervalle (a, b) contenant les points $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ il est nécessaire que l'on ait

$$(25) \quad (-1)^{n+1}p_1 > 0, \quad p_m > 0.$$

Considérons le polynome $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)$ ayant comme zéros les nombres $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$ distincts ou non et posons

$$M_f(P) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_m)}{m}.$$

Nous avons des expressions analogues $M_f(P')$, $M_f(P'')$, ... pour les dérivées successives P' , P'' , ... du polynome P .

Formons alors l'expression suivante

$$F_n f(P) = \binom{n}{0} M_f(P) - \binom{n}{1} M_f(P') + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} M_f(P^{(n)})$$

qui est une sorte de différence d'ordre n ⁽¹³⁾.

⁽¹³⁾ Si $P(x) = (x-x_1)(x-x_1-mh)^{m-1}$ l'expression $F_n f(P)$ ne diffère que par un facteur constant positif de la différence divisée $[x_1, x_1+h, x_1+2h, \dots, x_1+nh, x_1+mh; f]$.

Un problème de M. K. TODA, examiné dans ses travaux cités ⁽¹⁴⁾ peut se poser de la manière suivante:

L'expression $F_n f(P)$ reste-elle non-négative quelle que soit la fonction $f(x)$ non-concave d'ordre n et quel que soit le polynome $P(x)$ ayant ses zéros dans l'intervalle (a, b) ?

La réponse est que ceci n'est possible que si $n=1$.

M. K. TODA a bien démontré que $F_n f(P)$ est nul lorsque $f(x)$ est un polynome de degré $\leq n$ et cette propriété constitue des relations fort intéressantes entre les zéros d'un polynome et ceux de ses dérivées successives.

L'expression $F_n f(P)$ est une expression de la forme du premier membre de (5).

Il est clair maintenant que la propriété ne peut être vraie pour n pair. Il suffit, en effet, de prendre $P(x)$ tel que $x_1 < x_2 \leq \dots \leq x_{m-1} < x_m$ et alors le premier et le dernier coefficient p_i sont tous les deux égaux à $\frac{1}{m}$. Les conditions nécessaires (25) ne sont pas vérifiées.

Dans le cas de n impair > 1 prenons le polynome $P(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^{m-2}$, $x_1 < x_2$, $m \geq n+3$. Le premier coefficient p_1 est égal à

$$\frac{2}{m} - \frac{n}{m-1} = -\frac{(n-2)m+2}{m(m-1)} < 0$$

et le dernier coefficient p_i est égal à

$$\begin{aligned} & \frac{m-2}{m} - \binom{n}{1} \frac{m-3}{m-1} + \binom{n}{2} \frac{m-4}{m-2} - \dots + (-1)^n \frac{m-n-2}{m-n} = \\ & = (-1)^{n+1} 2 \left[\frac{1}{m-n} - \binom{n}{1} \frac{1}{m-n+1} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \frac{1}{m-1} + (-1)^n \frac{1}{m} \right] = \\ & = (-1)^{n+1} 2 \int_0^1 x^{m-n-1} (1-x)^n dx > 0. \end{aligned}$$

Il en résulte donc que la propriété ne peut être vraie pour n impair > 1 .

On peut facilement voir que, plus généralement, $F_n f(P)$ ne peut être de signe constant pour tout P et pour toute fonction non-concave d'ordre n que si $n=1$.

⁽¹⁴⁾ loc. cit. (4).