

Asupra poligoanelor regulate

de TIBERIU POPOVICIU

1. Să considerăm un poligon regulat $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ de n laturi într'un plan. Fie P un punct din plan și

$$M_1(P) = \frac{\overline{PA_0} + \overline{PA_1} + \dots + \overline{PA_{n-1}}}{n},$$

$$M_2(P) = \sqrt{\frac{\overline{PA_0}^2 + \overline{PA_1}^2 + \dots + \overline{PA_{n-1}}^2}{n}}.$$

$M_1(P)$ este media aritmetică iar $M_2(P)$ media patratică a distanțelor lui P de vârfurile poligonului. Avem totdeauna inegalitatea

$$M_1(P) \leq M_2(P)$$

și egalitatea nu este posibilă decât dacă $\overline{PA_0} = \overline{PA_1} = \dots = \overline{PA_{n-1}}$. Acest lucru are efectiv loc dacă și numai dacă P este centrul de greutate al poligonului. Cu alte cuvinte raportul

$$(1) \quad E(P) = \frac{M_1(P)}{M_2(P)}$$

are maximum egal cu 1 și acest maximum este atins dacă și numai dacă P este centrul poligonului.

În cele ce urmează ne propunem să determinăm minimum raportului (1). E suficient să presupunem că centrul poligonului este originea și că vârfurile sunt reprezentate prin numerele complexe $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Punctul variabil P va fi reprezentat prin numărul complex $\rho e^{i\theta}$, ρ fiind modulul iar θ argumentul, $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Avem atunci

$$\overline{PA_k} = \sqrt{\rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$M_2(P) = \sqrt{\rho^2 + 1}$$

2. Putem demonstra direct următoarea

Lemă. Raportul (1) are un minimum pozitiv atins pentru cel puțin un punct P din plan.

$E(P)$ este o funcție continuă în tot planul și nu se anulează niciodată. Pe baza observațiilor de mai sus, dacă P_1 este un punct diferit de origine, avem

deci

$$0 < E(P_1) = \alpha < 1,$$

$$\min E(P) \leq \alpha < 1.$$

Dar $\overline{PA_k} \geq |\rho - 1|$, $M_2(P) \leq \rho + 1$, deci

$$E(P) \geq \frac{|\rho - 1|}{\rho + 1}$$

Dacă luăm $\rho > \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$, avem

$$E(P) > \alpha.$$

Rezultă că minimum lui $E(P)$ în tot planul este același cu minimum lui $E(P)$ în cercul cu centrul în origine și de rază $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$. Acest din urmă cerc este un domeniu închis și mărginit deci, după o teoremă a lui *Weierstrass*, minimum lui $E(P)$ este atins. Acest minimum nu poate fi nul căci $E(P)$ nu se anulează, deci

$$\min E(P) > 0.$$

Putem observa de altfel că, din cauza simetriei, minimum este atins în cel puțin n puncte formând un poligon regulat cu centrul în origine.

3. Să trecem acum la determinarea efectivă a minimumului. Să presupunem că P se mișcă pe o semi-dreaptă ce pleacă din origine, cu alte cuvinte că θ este fix și ρ variază de la 0 la $+\infty$. Să punem

$$t = \frac{2\rho}{\rho^2 + 1}$$

Dacă ρ variază de la 0 la $+\infty$, t crește întâi de la 0 până la maximum său 1 pe care-l atinge pentru $\rho = 1$, pentru ca apoi să descrească tinzând către 0. Avem

$$(2) \quad E(P) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 - t \cos\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

$E(P)$ este atunci o funcție continuă de t în intervalul închis $[0, 1]$ și este indefinit derivabilă în intervalul semi-inchis $[0, 1)$. Avem

$$\frac{d^2 E(P)}{dt^2} = -\frac{1}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos^2\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)}{\left[\sqrt{1 - t \cos\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)}\right]^3}$$

deci

$$\frac{d^2 E(P)}{dt^2} < 0, \text{ în intervalul } [0, 1).$$

Se știe atunci că $E(P)$ este o funcție *concavă* de t în intervalul închis $[0, 1]$. Această funcție nu se reduce la o constantă, deci minimum ei nu poate fi atins decât pentru extremitățile intervalului, adică pentru $t=0$ sau $t=1$. Pentru $t=0$ avem $E(P)=1$ deci minimum nu este atins decât pentru $t=1$ și atunci avem $\rho=1$.

Minimum expresiei (1) nu poate fi deci atins decât pe cercul circumscris poligonului. Fie deci $\rho=1$ și să variem pe θ . E destul să considerăm, din cauza simetriei, cazul $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$. Avem atunci

$$(3) \quad E(P) = \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{k\pi}{n}\right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{n} \left[\sin \frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\theta}{2}\right) \right]$$

Avem însă

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \cotg \frac{\pi}{2n}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n} = 0$$

deci

$$E(P) = \frac{\sqrt{2}}{n} \left[\sin \frac{\theta}{2} + \cotg \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

și

$$\min E(P) = \frac{\sqrt{2}}{n} \cotg \frac{\pi}{2n}$$

care este atins numai pentru $\theta=0$ și $\theta=\frac{2\pi}{n}$.

Putem așa dar enunța proprietatea următoare:

Teorema 1. Dacă $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ este un poligon regulat de n laturi și P un punct din planul poligonului, avem

$$M_1(P) \geq \frac{\sqrt{2}}{n} \cotg \frac{\pi}{2n} M_2(P)$$

sau

$$(\overline{PA_0} + \overline{PA_1} + \dots + \overline{PA_{n-1}})^2 \geq 2 \cotg^2 \frac{\pi}{2n} (\overline{PA_0}^2 + \overline{PA_1}^2 + \dots + \overline{PA_{n-1}}^2)$$

egalitatea nefiind adevărată decât dacă P coincide cu unul din vârfurile poligonului.

4. Unele din rezultatele precedente se pot generaliza ușor. Să considerăm, în loc de media aritmetică $M_1(P)$, media de putere r a distanțelor lui P la vârfurile poligonului, adică

$$M_r(P) = \left[\frac{\overline{PA_0}^r + \overline{PA_1}^r + \dots + \overline{PA_{n-1}}^r}{n} \right]^{\frac{1}{r}}$$

Dacă $0 < r < 2$ avem încă $M_r(P) \leq M_2(P)$ iar dacă $r > 2$ avem $M_r(P) \geq M_2(P)$, egalitatea neputând avea loc, în ambele cazuri, decât dacă P este centrul poligonului. Fie

$$E_r(P) = \frac{M_r(P)}{M_2(P)}$$

Dacă $0 < r < 2$, $E_r(P)$ are un minimum atins, iar dacă $r > 2$ un maximum atins. În cazul de față expresia (2) devine

$$E_r(P) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[1 - t \cos \left(\theta - \frac{2k\pi}{n} \right) \right]^{\frac{r}{2}}$$

și

$$\frac{d^2 E_r(P)}{dt^2} = \frac{r(r-2)}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \left(\theta - \frac{2k\pi}{n} \right) \left[1 - t \cos \left(\theta - \frac{2k\pi}{n} \right) \right]^{\frac{r}{2}-2}$$

care este < 0 resp. > 0 după cum $0 < r < 2$ resp. $r > 2$.

Se deduce ca mai sus că minimumul resp. maximumul lui $E_r(P)$

nu poate fi atins decât pe cercul circumscris poligonului

Expresia (3) devine acum

$$E_r(P) = \frac{(\sqrt{2})^r}{n} \left[\sin^r \frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sin^r \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

Această expresie este o funcție continuă de θ în intervalul $\left[0, \frac{2\pi}{n} \right]$. Avem, în intervalul deschis $(0, \frac{2\pi}{n})$

$$\frac{d^2 E_r(P)}{dt^2} = -\frac{r(\sqrt{2})^{r-2}}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sin^{r-2} \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\theta}{2} \right) \right| \left[1 - r \cos^2 \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

și se vede că această derivată este totdeauna negativă dacă $r \leq 1$. Se poate dar enunța următoarea generalizare a teoremei 1.

Teorema 2. Dacă $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ este un poligon regulat de n laturi, r un număr pozitiv ≤ 1 și P un punct din planul poligonului, avem

$$M_r(P) \geq \frac{\sqrt{2}}{n} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \sin^r \frac{k\pi}{n} \right]^{\frac{1}{r}} M_2(P)$$

egalitatea nefiind adevărată decât dacă P coincide cu unul din vârfurile poligonului.

5. Dară $r > 1$ problema e mai complicată. Vom examina aici numai cazul când r este un număr întreg pozitiv și par, $r = 2m$. Totul revine atunci la evaluarea sumei

$$S_m = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^{2m} \left[\frac{k\pi}{n} - \frac{\theta}{2} \right]$$

Să ne reamintim formula

$$\sin^{2m} \alpha = \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} + 2 \sum_{s=1}^m \frac{(-1)^s \binom{2m}{m+s}}{2^{2m}} \cos 2s\alpha$$

Avem însă

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2s \left[\frac{k\pi}{n} - \frac{\theta}{2} \right] = \begin{cases} 0, & \text{dacă } s \not\equiv 0 \pmod{n} \\ n \cos \theta, & \text{dacă } s \equiv 0 \pmod{n} \end{cases}$$

deci

$$S_m = \frac{n}{2^{2m}} \binom{2m}{m} + 2n \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{jn} \binom{2m}{m+jn}}{2^{2m}} \cos jn\theta$$

$[\lambda]$ însemnând cel mai mare întreg $\leq \lambda$.

În special dacă $m < n$, avem

$$S_m = \frac{n}{2^{2m}} \binom{2m}{m}$$

și se poate enunța următoarea

Teorema 3. Dacă m este un număr întreg (> 1) și $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ un poligon regulat de $n > m$ laturi iar P un punct în planul poligonului, avem

$$M_{2m}(P) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2m}{m} \right)^{\frac{1}{2m}} M_2(P)$$

egalitatea nefiind adevărată decât dacă P este pe cercul circumscris poligonului.

Dacă avem $m > n$, se vede pe structura lui S_m că maximum este atins pentru $\theta = 0$ și $\theta = \frac{2\pi}{n}$ dacă n este par și pentru $\theta = \frac{\pi}{n}$ dacă n este impar, deci

Teorema 4. Dacă $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ este un poligon regulat de $n (\geq 3)$ laturi și m un număr întreg și pozitiv $> n$, oricare ar fi punctul P din planul poligonului avem

$$\frac{M_{2m}(P)}{M_2(P)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\binom{2m}{m} + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} \binom{2m}{m+jn} \right]^{\frac{1}{2m}}$$

egalitatea nefiind adevărată decât dacă

1^o n fiind par, P coincide cu unul din vârfurile poligonului.

2^o n fiind impar, P coincide cu mijlocul unui arc de cerc circumscris limitat de două vârfuri consecutive ale poligonului.

6. Pentru a încheia atrag atenția cititorilor asupra faptului că mai multe din rezultatele precedente ar fi interesante de complectat. În primul rând ar trebui văzut, în cazul special examinat de noi, ce se întâmplă dacă r este un număr pozitiv oarecare mai mare ca 1. Ar trebui pe urmă examinat cazul când în loc de un poligon regulat se ia un poligon oarecare. Se poate ușor vedea că în general (pentru un poligon oarecare) raportul

$$\frac{M_p(P)}{M_q(P)}$$

unde $0 < p < q$, are un minimum atins. Acest minimum depinde de poligonul considerat și are un maximum când acest poligon variază. Este foarte probabil că acest „maximum minimum” este atins, în particular, pentru un poligon regulat.

București, 29 Noembrie 1941.