ANNALES SCIENTIFIQUES

DE

L'UNIVERSITÉ DE JASSY

PREMIÈRE PARTIE

(Mathématiques, Physique, Chimie)

TOME XXVIII, ANNÉE 1942

FASCICULE 1.

IAȘI – INST. GRAFIC „PRESA BUNĂ" – 1942

TABLE DES MATIÈRES

ANNALES SCIENTIFIQUES DE l'UNIVERSITÉ DE JASSY
Tome XXVIII, Fasc. 2, *Juillet 1942*

NOTES SUR LES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR (X)

par
TIBERIU POPOVICI
à Iaşi

Sur quelques propriétés des différences divisées et des polynomes de Lagrange.

Considérons une fonction $f = f(x)$, réelle, de la variable réelle x, définie sur un ensemble linéaire E. A tout groupe de $n+1$ points de E on peut attacher le polynome de Lagrange pour la fonction f, donc le polynome de degré minimum qui prend les mêmes valeurs que cette fonction aux points considérés.

En supposant E fini, au § 3 nous étudions le problème des polynomes de Lagrange qui sont majorants (ou minorants) pour la fonction f. Un polynome $P(x)$ est majorant pour la fonction $f(x)$ si on a

$$P(x) \geq f(x), \quad x \in E.$$

Nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynome de Lagrange, attaché à un groupe donné, de points de E, soit majorant pour la fonction f. Nous en déduisons, pour toute fonction f, l'existence d'au moins un polynome de Lagrange majorant de degré donné.

En supposant toujours E fini, au § 4 nous cherchons si une fonction non-concave d'ordre k peut admettre un polynome de Lagrange de degré donné n qui soit aussi non-concave d'ordre k sur E. Pour $k = -1$, donc pour le cas de la non-négativité, la réponse, toujours affirmative, est une conséquence des résultats du § 3. Il n'en est plus ainsi pour $k \geq 0$. Dans ce cas, si k et n sont de parités différentes il existe toujours au moins un polynome de Lagrange de degré n qui soit aussi non-concave d'ordre k sur E. Mais, si k et n sont de même parité, nous démontrons par un exemple que la propriété peut ne pas être vraie. Dans ce dernier cas le problème de l'existence dépend non seulement de la fonction f mais aussi de la distribution des points de E. Nous terminons ce § par l'étude plus détaillée de quelques cas particuliers simples.

Dans le § 5 nous disons quelques mots sur les problèmes traités aux §§ 3 et 4 dans le cas où E est un intervalle fini et fermé. Ce cas est assez différent du précédent, donc de celui où E est fini. Nous nous bornons d'ailleurs de donner seulement quelques indications sur ces problèmes.

Dans le § 1 nous rappelons quelques définitions et formules bien connues et dans le § 2 nous donnons quelques nouvelles propriétés qui sont utilisées plus loin.

Les problèmes que nous nous posons dans ce travail en soulèvent bien d'autres. Nous espérons que les cas simples, qui sont d'ailleurs aussi les plus faciles, que nous avons exposés, suffisent pour montrer l'interêt de ces questions.

§ 1.

Quelques propriétés et formules préliminaires [1].

1. — Nous allons considérer uniquement des fonctions réelles, uniformes et finies de la variable réelle x.

Soit $f=f(x)$ une telle fonction, définie sur les $n+1$ points distincts

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}.$$

La différence divisée de la fonction f sur les points (1) est complètement caractérisée par les trois propriétés suivantes

I. *Elle est une fonctionnelle linéaire de f.*

II. *Elle est nulle pour les fonctions $f=1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.*

III. *Elle est égale à 1 pour la fonction $f=x^n$.*

La propriété I signifie que la différence divisée est de la forme

---

1) Pour plus de détails et les démonstrations, voir mes travaux antérieurs. En particulier: *„Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles"*. Mathematica, 8, 1—85 (1934) et *„Introduction à la théorie des différences divisées"*. Bull. Math. Soc. Roumaine des Sci., **42**, 65—78 (1941)

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i),$$

λ_i étant indépendants de la fonction f. Les propriétés II, III déterminent alors complètement ces coefficients.

Nous désignerons, comme d'habitude, par

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f], \tag{2}$$

ou aussi par

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f(x)]$$

la différence divisée ainsi définie.

Nous avons les formules suivantes

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; x^r] = \begin{cases} 0, & r = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 1, & r = n, \end{cases} \tag{3}$$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; Cf] = C[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \tag{4}$$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f+g] = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] + [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; g], \tag{5}$$

où C est une constante et f, g deux fonctions définies sur (1).

La différence divisée (2) peut aussi se mettre sous la forme d'un quotient de deux déterminants d'ordre $n+1$,

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)}{V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} \tag{6}$$

où

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f) = |1 \; x_i \; x_i^2 \ldots x_i^{n-1} f(x_i)|$$

et

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = U(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}; x^n) =$$

$$= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n+1} (x_i - x_j) = \prod_{i=2}^{n+1} (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2}) \ldots (x_i - x_1)$$

est le déterminant de Vandermonde des nombres x_i.

La formule (3) peut se compléter par les suivantes, correspondantes aux valeurs -1 et $n+1$ de r,

(7) $$\left[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; \frac{1}{x}\right] = \frac{(-1)^n}{x_1 x_2 \ldots x_{n+1}},$$

(8) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; x^{n+1}] = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}$$

La différence divisée (2) est symétrique par rapport aux points (1).

2. — Considérons maintenant une fonction f définie sur un ensemble linéaire quelconque E. Sur tout groupe de $n+1$ points (1) de E on peut définir la différence divisée. Nous disons qu'une différence divisée définie sur $n+1$ points est *d'ordre* n. Si, en particulier, l'ensemble E est fini et est formé par m points

(9) $$x_1, x_2, \ldots, x_m,$$

la fonction f a des différences divisées d'ordre $0, 1, \ldots, m-1$. En tout, la fonction a $\binom{m}{n+1}$ différences divisées d'ordre n $(m \geq n+1)$. Si l'ensemble E est infini la fonction a des différences divisées de tout ordre. Par définition, la différence divisée d'ordre 0 sur le point x_i est la valeur $f(x_i)$ de la fonction en ce point,

$$[x_i; f] = f(x_i).$$

Si nous posons

(10) $$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1}),$$

nous avons

(11) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

où φ' est la dérivée du polynome φ [1].

A l'aide de la formule (11) il est facile d'établir *la formule de récurrence des différences divisées*,

(12) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}; f] - [x_1, x_2, \ldots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_1}$$

---

[1] La dérivation est ici une opération linéaire applicable aux polynomes et telle que

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

On prend d'habitude cette formule comme définition des différences divisées de divers ordres [1].

La formule (11) permet aussi d'établir la suivante

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = & \left[x_1, x_2, \ldots, x_r; \frac{f(x)}{(x-x_{r+1})(x-x_{r+2})\ldots(x-x_{n+1})} \right] + \\
& + \left[x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{n+1}; \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r)} \right].
\end{aligned}
$$

Les formules (3), (4) et (5) nous montrent que la différence divisée d'ordre n d'un polynome de degré $< n$ est constamment nulle et la différence divisée d'ordre n du polynome $c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots$ est constamment égale à c_0 [2].

Remarquons aussi la formule suivante

$$
(14)\quad [x_1 + h, x_2 + h, \ldots, x_{n+1} + h; f(x)] = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f(x+h)].
$$

3. — La formule (5) donne la différence divisée d'une somme de deux fonctions. De même, nous avons la formule

$$
(15)\quad [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; fg] = \sum_{i=1}^{n+1} [x_1, x_2, \ldots, x_i; f]\, [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; g],
$$

qui donne la différence divisée du produit de deux fonctions f et g. C'est *la formule de Leibniz* des différences divisées.

Considérons une fonction f définie sur l'ensemble fini (9). Pour simplifier nous posons

$$
(16)\quad \Delta_j^i(f) = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}; f],\ j = 0, \ldots, m-1,\ i = 1, 2, \ldots, m,
$$

et

$$
(17)\quad \varphi_{i,j+1} = \varphi_{i,j+1}(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_{i+j}),\ \varphi_{i,0} = 1,
$$
$$
j = 0, \ldots, m-i,\ i = 1, 2, \ldots, m.
$$

---

1) C'est de cette façon que A. M. AMPÈRE a, pour la première fois, introduit les différences divisées. Voir N. E. NÖRLUND, „*Differenzenrechnung*", J. Springer, Berlin 1924.

2) Toute fonction de la forme $c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots$ est un polynome de *degré n*. Si $c_0 \neq 0$, ce polynome est de *degré effectif n*; c_0 *est le premier coefficient* du polynome. On voit que la notion de premier coefficient est relative au degré et non pas au degré effectif du polynome. La constante 0 est un polynome de degré -1 ou de degré effectif -1.

Nous avons donc, compte tenant de (11),

$$\Delta_j^i(f) = \sum_{r=i}^{i+j} \frac{f(x_r)}{\varphi'_{i,j+1}(x_r)} . \tag{18}$$

Avec cette notation, la formule (15), pour m points, devient

$$\Delta^1_{m-1}(fg) = \sum_{i=1}^{m} \Delta^i_{m-i}(g)\, \Delta^1_{i-1}(f). \tag{19}$$

Remarquons que si la fonction g est donnée, $\Delta^1_{m-1}(fg)$ est une fonctionnelle linéaire de f. Réciproquement, toute fonctionnelle linéaire de f,

$$F[f] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i), \tag{20}$$

définie pour les fonctions f définies sur l'ensemble fini (9), peut s'écrire sous la forme d'une différence divisée d'ordre $m-1$ du produit $f.g$, en déterminant convenablement la fonction g. Prenons, en effet,

$$g(x_i) = \frac{\lambda_i}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_m)} = \frac{\lambda_i}{\varphi'_{1,m}(x_i)} , \tag{21}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

et nous avons alors

$$F[f] = \Delta^1_{m-1}(fg) = [x_1, x_2, \ldots x_m;\ fg]. \tag{22}$$

4\. — La fonctionnelle linéaire (20) peut s'écrire sous la forme

$$F[f] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{(n)} \Delta^1_{i-1}(f) + \sum_{i=1}^{m-n} \nu_i^{(n)} \Delta^i_n(f), \qquad (m \geq n+1), \tag{23}$$

où les coefficients $\mu_i^{(n)}$, $\nu_i^{(n)}$ sont indépendants de la fonction f. Ces coefficients sont linéaires, homogènes en λ_i et sont complètement déterminés. Il est facile de les obtenir en tenant compte des formules (19), (21) et (22) et de la relation de récurrence (12). On a d'abord $\mu_i^{(n)} = \Delta^i_{m-i}(g)$ et, en exprimant $\Delta^1_{i-1}(f)$, $i > n$, en fonction de $\Delta^1_n(f), \Delta^2_n(f), \ldots, \Delta^{i-n}_n(f)$ à l'aide de (12), on a les coefficients $\nu_i^{(n)}$.

Une autre manière d'obtenir les coefficients $\mu_i^{(n)}, \nu_i^{(n)}$ est de particulariser convenablement la fonction f.

Avec les notations (17), nous avons

$$\mu_i^{(n)} = F[\varphi_{1, i-1}] = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{i-1}),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pour calculer les coefficients $\nu_i^{(n)}$ nous introduisons les fonctions

$$\text{(24)} \quad f_{n,i}^{*} = f_{n,i}^{*}(x) = \begin{cases} 0, \text{ pour } x = x_r, \ 1 \leq r \leq n+i-1 \ (\text{ou } 1 \leq r \leq i), \\ \varphi_{i+1, n-1}(x), \text{ pour } x = x_r, \ n+i \leq r \leq m \ (\text{ou } i < r \leq m), \end{cases}$$
$$i = 1, 2, \ldots, m-n.$$

Nous avons alors

$$\Delta'_{j-1}(f_{n,i}^{*}) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\Delta'_{n}(f_{n,j}^{*}) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m-n.$$

Compte tenant de (18) et des relations de récurrence

$$\varphi_{i, j+1} = (x - x_{i+j}) \varphi_{i,j} = (x - x_i) \varphi_{i+1, j},$$

nous trouvons

$$\Delta'_n(f_{n,i}^{*}) = \frac{\varphi_{i+1, n-1}(x_{i+n})}{\varphi_{i, n+1}(x_{i+n})} = \frac{1}{x_{i+n} - x_i}$$

et nous en déduisons donc

$$\nu_i^{(n)} = (x_{i+n} - x_i) F[f_{n,i}^{*}] = (x_{i+n} - x_i) \sum_{j=i+n}^{m} \lambda_j (x_j - x_{i+1})(x_j - x_{i+2}) \cdots (x_j - x_{i+n-1}),$$
$$i = 1, 2, \ldots, m-n.$$

La formule (23) devient

$$\text{(25)} \quad F[f] = \sum_{i=1}^{n} F[\varphi_{1, i-1}] \Delta'_{i-1}(f) + \sum_{i=1}^{m-n} (x_{i+n} - x_i) F[f_{n,i}^{*}] \Delta'_i(f).$$

C'est la formule fondamentale de transformation des différences divisées.

Pour $n = 1$ cette formule devient la formule, bien connue, d'Abel.

Pour $n = m - 1$ ce n'est qu'une autre forme de la formule de Leibniz.

Lorsque la fonctionnelle linéaire $F[f]$ est nulle pour tout polynome de degré $r\,(<n)$, nous avons

$$\mu_1^{(n)}=\mu_2^{(n)}=\cdots=\mu_{r+1}^{(n)}=0.$$

Si $F[f]$ est nulle pour tout polynome de degré $n-1$, tous les coefficients $\mu_i^{(n)}$ sont nuls et la formule fondamentale (25) devient

$$F[f]=\sum_{i=1}^{m-n}(x_{i+n}-x_i)\,F[f_{n,i}^*]\,\Delta_n^i(f). \tag{26}$$

En particulier, considérons la différence divisée

$$[x_{i_1},\,x_{i_2},\ldots,\,x_{i_{n+1}};\,f],$$

sur $n+1$ points x_{i_j}, $j=1,\,2,\ldots,n+1$ extraits de la suite (9). La formule (26) nous donne alors

$$[x_{i_1},\,x_{i_2},\ldots,\,x_{i_{n+1}};\,f]=\sum_{i=1}^{m-n}(x_{i+n}-x_i)\,[x_{i_1},\,x_{i_2},\ldots,\,x_{i_{n+1}};\,f_{n,i}^*]\,\Delta_n^i(f). \tag{27}$$

5. — Supposons maintenant que la suite (9) soit *ordonnée*, donc que

$$x_1<x_2<\cdots<x_m.$$

Alors les coefficients des $\Delta_n^i(f)$ dans la formule (27) sont tous non-négatifs et nous obtenons le

THÉORÈME 1. *Si la suite* (9) *est ordonnée, toute différence divisée* $[x_{i_1},\,x_{i_2},\ldots,\,x_{i_{n+1}};\,f]$, *prise sur* $n+1$ *de ces points, est une moyenne arithmétique* (généralisée) *des différences divisées* $\Delta_n^1(f),\ \Delta_n^2(f),\ldots,\ \Delta_n^{m-n}(f)$.

Nous avons donc

$$[x_{i_1},\,x_{i_2},\ldots,\,x_{i_{n+1}};\,f]=\sum_{i=1}^{m-n}A_i\,\Delta_n^i(f), \tag{28}$$

$$A_i\geq 0,\quad i=1,\,2,\ldots,\,m-n,\quad \sum_{i=1}^{m-n}A_i=1,$$

où les A_i *sont indépendants de la fonction* f.

C'est *le théorème de la moyenne des différences divisées*.

Nous avons, d'ailleurs,

$$A_i=(x_{i+n}-x_i)\,[x_{i_1},\,x_{i_2},\ldots,\,x_{i_{n+1}};\,f_{n,i}^*],\quad i=1,2,\ldots,\,m-n. \tag{29}$$

On peut démontrer cette propriété par induction, en partant de l'identité

$$(x_{n+2}-x_1)[x_1, x_2,\dots, x_{i-1}, x_{i+1},\dots, x_{n+2}; f] =$$
$$=(x_i-x_1)[x_1, x_2,\dots, x_{n+1}; f] + (x_{n+2}-x_i)[x_2, x_3,\dots, x_{n+2}; f].$$

Dans le § suivant nous démontrerons directement la non-négativité des différences divisées d'ordre n des fonctions $f^*_{x,j}$, ce qui fournira une autre démonstration du théorème de la moyenne.

Il en résultera, d'ailleurs, de plus, que, si nous prenons $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$, nous avons

$$(30) \qquad \begin{aligned} &A_i = 0,\ i = 1, 2,\dots, i_1-1, i_{n+1}-n+1, i_{n+1}-n+2,\dots, m-n, \\ &A_i > 0,\ i = i_1, i_1+1,\dots, i_{n+1}-n. \end{aligned}$$

Du théorème 1 il résulte immédiatement la propriété suivante

Théorème 2. — *Si la suite* (9) *est ordonnée, nous avons*

$$\min_{i=1,2,\dots,m-n} \{\Delta^i_n(f)\} \leq [x_{i_1}, x_{i_2},\dots, x_{i_{n+1}}; f] \leq \max_{i=1,2,\dots,m-n} \{\Delta^i_n(f)\}$$

quelle que soit la suite partielle $x_{i_1}, x_{i_2},\dots, x_{i_{n+1}}$ *de* $n+1$ *termes de* (9).

6. — Rappelons maintenant la définition des fonctions d'ordre n.

Définition. — *La fonction* $f(x)$, *définie sur l'ensemble linéaire* E, *est* **convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe** *resp.* **concave** *d'ordre* n *sur* E *si*

$$[x_1, x_2,\dots, x_{n+2}; f] >, \geq, =, \leq \text{ resp. } < 0,$$

quels que soient les $n+2$ *points* $x_1, x_2,\dots, x_{n+2}$ *de* E.

Toutes ces fonctions sont des fonctions **d'ordre n.**

Une fonction d'ordre n sur E est donc une fonction dont la différence divisée d'ordre $n+1$ ne change pas de signe sur E. La convexité et la polynomialité d'ordre n sont des cas particuliers de la non-concavité d'ordre n. Si f est convexe non-concave, polynomiale, non-convexe resp. concave d'ordre, n sur E, la fonction $-f$ est concave, non-convexe, polynomiale, non-concave resp. convexe d'ordre n sur E et réciproquement. On peut prendre comme type de fonction d'ordre n la fonction non-concave d'ordre n. Une fonction polynomiale d'ordre n se réduit aux valeurs sur E d'un polynome de degré n.

La définition précédente est valable pour tout entier

$n \geq -1$. Les fonctions d'ordre -1 sont les fonctions de signe invariable et les fonctions d'ordre 0 les fonctions monotones.

Le théorème 1 nous montre que nous avons le

THÉORÈME 3 — *Pour que la fonction f, définie sur la suite ordonnée (9) de $m (\geq n+2)$ points, soit convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe resp. concave d'ordre n sur ces points, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\Delta^{i}_{n+i}(f) >, \geq, =, \leq \text{ resp. } < 0, \; i = 1, 2, \ldots, m-n-1.$$

Les formules (4), (5) nous montrent aussi que

THÉORÈME 4. — *Si C est une constante positive et si les fonctions f et g, définies sur l'ensemble linéaire E jouissent d'une même propriété de convexité sur E, les fonctions Cf et $f+g$ jouissent aussi de la même propriété de convexité sur E.*

Si la fonction est définie dans un intervalle et si elle a une dérivée d'ordre $n+1$, la non-négativité de cette dérivée est nécessaire et suffisante pour que la fonction soit non-concave d'ordre n.

7. — Disons maintenant quelques mots sur le polynome de Lagrange. Reprenons la fonction f, définie sur les points (1). Nous avons la propriété, bien connue, exprimée par le

THÉORÈME 5. — *Il existe un polynome et un seul de degré effectif minimum qui prend les valeurs $f(x_i)$ aux points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Ce polynome est de degré n.*

Le polynome unique ainsi déterminé est *le polynome* (d'interpolation) *de Lagrange de la fonction f* sur les points (1). Nous le désignons par

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x). \tag{31}$$

On voit immédiatement que c'est aussi l'unique polynome de degré n prenant les valeurs $f(x_i)$ aux points x_i. D'ailleurs, la forme générale des polynomes prenant les valeurs $f(x_i)$ aux points x_i est

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x) + \varphi(x)\, Q(x),$$

où φ est le polynome (10) et Q un polynome quelconque.

Les points x_i sont *les noeuds* du polynome (31).

Si l'on donne à x une valeur fixe, le polynome (31) devient une fonctionnelle linéaire de f. Le polynome (31) est, d'ailleurs, évidemment symétrique par rapport aux points x_i[1]).

On trouve facilement la formule

(32) $L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x) = -\varphi(x)[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x; fg]$,

où

$$g(x_i) = \begin{cases} 1, & i = 1, 2, \ldots, n+1, \\ 0, & x_i = x. \end{cases}$$

On en déduit diverses expressions, bien connues, du polynome (31) et, en particulier, la formule

(33) $L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x) - f(x) = -\varphi(x)[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x; f]$.

On voit aussi que

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x) &= L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x) + \\ &+ (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]. \end{aligned} \tag{34}$$

Le premier coefficient du polynome (31) est donc précisément la différence divisée de la fonction f sur les points (1).

Remarquons aussi que si f est un polynome de degré n, nous avons

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x) = f(x).$$

Soit maintenant f une fonction définie sur l'ensemble linéaire E. A tout groupe de $n+1$ points de E correspond, pour la fonction, un polynome de Lagrange ayant ces points comme noeuds. Dans la suite nous convenons qu'un polynome de Lagrange est de degré n s'il a $n+1$ noeuds. Deux polynomes de Lagrange sont considérés comme différents s'ils n'ont pas les mêmes noeuds, mais deux polynomes de Lagrange différents peuvent être identiques sur E. Dans ce cas, il est clair, que la fonction se réduit à ce polynome sur tous les noeuds des polynomes considérés.

§ 2.

Nouvelles propriétés des différences divisées des fonctions définies sur un ensemble fini.

8. — Nous allons reprendre d'abord l'étude des fonctions $f^{*}_{x_i, i}$, données par la formule (24). Ces fonctions sont définies

---

1) A. CAUCHY en déduit la symétrie de la différence divisée. Ceci revient à remarquer que le polynome de Lagrange est unique, indépendant de l'ordre des noeuds et que son premier coefficient est la différence divisée prise sur les noeuds. Voir : „*Sur les fonctions interpolaires*". C. R. Acad. Sci. Paris, 11, 775-789 (1840).

sur la suite ordonnée (9), où nous pouvons supposer, bien entendu, $m \geq n+1$. Nous supposerons toujours que toute suite partielle $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ extraite de (9) est aussi ordonnée, donc que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1} \leq m$.

Nous avons vu que du théorème de la moyenne résulte la non-concavité d'ordre $n-1$ des fonctions $f^*_{n,i}$. Mais, il y a intérêt à démontrer directement cette non-concavité. De cette façon le théorème de la moyenne sera une conséquence de cette non-concavité. Il est à remarquer que nous ne pouvons pas ici appliquer le théorème 3, sans commettre un cercle vicieux. Nous allons démontrer directement que toutes les différences divisées d'ordre n de la fonction $f^*_{n,i}$ sont non-négatives, donc la propriété suivante

Théorème 6.—*Les différences divisées d'ordre n sur $n+1$ points de la suite ordonnée (9) et relatives aux fonctions $f^*_{n,i}$, données par la formule (24), sont toutes positives ou nulles* [1].

La démonstration se fait par induction sur le nombre n.

Pour $n=1$, on vérifie immédiatement que

$$(35)\qquad [x_{i_1}, x_{i_2}; f^*_{1,i}] = \begin{cases} 0, & i=1,2,\ldots,i_1-1, i_2, i_2+1, \ldots, m-1, \\ \dfrac{1}{x_{i_2}-x_{i_1}} > 0, & i = i_1, i_1+1, \ldots, i_2-1. \end{cases}$$

Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour les fonctions $f^*_{n-1,i}$ et démontrons-la pour les fonctions $f^*_{n,i}$ $(n>1)$. Remarquons d'abord que, par suite de la définition des fonctions $f^*_{n,i}$, dans

$$(36)\qquad [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}; f^*_{n,i}] \geq 0,$$

le signe = est valable pour

---

1) Nous supposons $n \geq 1$. La propriété reste vraie aussi pour $n=0$, les fonctions $f^*_{0,i}$ étant définies par la formule

$$f^*_{0,i}(x_r) = \begin{cases} 0, & r=1,2,\ldots,i-1, i+1, \ldots, m \\ 1, & r=i, \end{cases}$$
$$i=1,2,\ldots,m.$$

Le théorème 7 est aussi vrai pour $n=0$.

$$i=1,2,\ldots,i_1-1,\ i_{n+1}-n+1,\ i_{n+1}-n+2,\ldots,m-n.$$

Il suffit donc d'examiner les valeurs de i pour lesquelles

(37) $$i_1 \leq i \leq i_{n+1}-n.$$

Compte tenant de la formule de récurrence

$$f^*_{n,i}=(x-x_{i+n-1})f^*_{n-1,i}$$

et en appliquant la formule (15), nous avons

(38) $$[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{n+1}};f^*_{n,i}]=[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{n+1}};f^*_{n-1,i}](x_{i_{n+1}}-x_{i+n-1})+$$
$$+[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n};f^*_{n-1,i}].$$

Mais, la formule de récurrence (12) permet d'écrire

$$[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{n+1}};f^*_{n-1,i}]=\frac{[x_{i_2},x_{i_3},\ldots,x_{i_{n+1}};f^*_{n-1,i}]-[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n};f^*_{n-1,i}]}{x_{i_{n+1}}-x_{i_1}}$$

et nous en déduisons la formule

(39) $$[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{n+1}};f^*_{n,i}]=$$
$$=\frac{(x_{i_{n+1}}-x_{i+n-1})[x_{i_2},x_{i_3},\ldots,x_{i_{n+1}};f^*_{n-1,i}]+(x_{i+n-1}-x_{i_1})[x_{i_1},\ldots,x_{i_n};f^*_{n-1,i}]}{x_{i_{n+1}}-x_{i_1}}$$

d'où résulte la propriété, compte tenant du fait que (37) nous donne

$$i_1<i_1+n-1\leq i+n-1\leq i_{n+1}-1<i_{n+1}.$$

On peut encore remarquer que le signe $>$ est valable dans (36) pour $i=i_1, i_1+1,\ldots,i_{n+1}-n$. En effet, ceci résulte de (35) pour $n=1$. La formule (39) nous montre que si la propriété est vraie pour $n-1$ elle sera vraie aussi pour n.

9. — Les fonctions $f^*_{n,i}$ jouissent des propriétés plus complètes. Nous avons le

THÉORÈME 7. — *Les fonctions $f^*_{n,i}$ sont non-concaves d'ordres $-1,0,1,\ldots,n-1$ sur la suite ordonnée* (9).

On a donc

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+1}}; f^*_{n,i}] \geq 0, \tag{40}$$

quels que soient $i = 1, 2, \ldots, m-n$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

La démonstration peut se faire par induction, comme pour le théorème 6. Pour $n = 1$ on vérifie facilement la propriété. Pour $n > 1$ nous avons la formule de récurrence

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+1}}; f^*_{n,i}] = \tag{41}$$
$$= [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+1}}; f^*_{n-1,i}](x_{i_{k+1}} - x_{i+n-1}) + [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}; f^*_{n-1,i}],$$

généralisation de (38) et qui nous donne la démonstration.

Mais, il est possible ici de simplifier la démonstration pour $k < n$. En effet, le théorème 6 étant démontré, nous pouvons appliquer le théorème 3. Il suffit donc de démontrer les inégalités

$$\Delta^j_k(f^*_{n,i}) \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, m-k. \tag{42}$$

La formule (41) nous donne, en particulier,

$$\Delta^j_k(f^*_{n,i}) = (x_{j+k} - x_{i+n-1})\,\Delta^j_k(f^*_{n-1,i}) + \Delta^j_{k-1}(f^*_{n-1,i}). \tag{43}$$

La démonstration du théorème 7 est alors immédiate.

De la formule du récurrence (43) nous déduisons aussi que

$$\Delta^j_k(f^*_{n,i}) \begin{cases} = 0, & j = 1, 2, \ldots, i+n-k-1, \\ > 0, & j = i+n-k, \; i+n-k+1, \ldots, m-k. \end{cases}$$

Alors, compte tenant des formules (28) et (30), on voit que dans (40) le signe $=$ est valable pour $i > i_{k+1} - n$ et le signe $>$ est valable pour $i \leq i_{k+1} - n$ $(k < n)$.

10. — Nous allons dire maintenant quelques mots sur le polynome (17). La fonction

$$\varphi_{i+1,n-1} - f^*_{n,i} \tag{44}$$

est analogue à $f^*_{n,i}$ par rapport à la suite (9) dont les points sont pris en sens inverse. Plus exactement, les propriétés de convexité de la fonction (44) se déduisent de celles de $f^*_{n,i}$ par le changement de la variable x en $-x$ et de la fonction f en $(-1)^{n-1} f$. Or, ces changements ont pour effet de conserver toute propriété de convexité dont l'ordre est de la même parité avec n et de changer de sens toute convexité dont l'ordre est de parité différente avec n. Nous en déduisons le

THÉORÈME 8. — *Les fonctions* $\varphi_{i+1,n-1} - f^*_{n,i}$ *sont non-concaves d'ordres* $n-2, n-4, \ldots, n-2\left[\frac{n+1}{2}\right]$ [1] *et non-convexes d'ordres* $n-1, n-3, \ldots, n-2\left[\frac{n}{2}\right]-1$ *sur la suite ordonnée* (9).

Si nous remarquons que

$$\varphi_{i+1,n-1} = (\varphi_{i+1,n-1} - f^*_{n,i}) + f^*_{n,i}$$

et si nous tenons compte des théorèmes 4 et 8, nous en déduisons le

THÉORÈME 9. — *Les polynomes* $\varphi_{i+1,n-1}$ *sont non-concaves d'ordres* $n-2, n-4, \ldots, n-2\left[\frac{n+1}{2}\right]$ *sur la suite ordonée* (9). *De plus, le polynome* $\varphi_{i+1,n-1}$ *est non-convexe d'ordres* $n-1, n-3, \ldots, n-2\left[\frac{n}{2}\right]-1$ *sur les points* $x_1, x_2, \ldots, x_{i+n-1}$ *et est non-concave d'ordres* $n-1, n-3, \ldots, n-2\left[\frac{n}{2}\right]-1$ *sur les points* $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_m$ [2].

11. — Considérons maintenant une fonction f définie sur la suite ordonnée (9) de $m \geq n+1$ points, n étant un nombre naturel.

Considérons la différence

$$\psi_{r,n-1} = \psi_{r,n-1}(x) = L(x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n-1}; f|x) - f(x) \tag{45}$$

entre le polynome de Lagrange ayant pour noeuds les n points consécutifs $x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n-1}$ et entre la fonction f.

Nous nous proposons d'étudier les différences divisées

$$\Delta^j_k(\psi_{r,n-1}) = [x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}; \psi_{r,n-1}] \tag{46}$$

des fonctions (45). D'après (45), il est clair que si $k \geq n$ on a

$$\Delta^j_k(\psi_{r,n-1}) = -\Delta^j_k(f).$$

---

1) $[x]$ désigne le plus grand entier $\leq x$.

2) Le polynome est d'ailleurs évidemment d'ordre $n-1$ sur (9).

mais nous voulons examiner, tout spécialement le cas $k < n$.

On voit que (46) est une fonctionnelle linéaire de f, dans laquelle, d'ailleurs, seules les valeurs de f aux points $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n-1}$ interviennent. Remarquons que cette fonctionnelle linéaire est nulle pour tout polynome de degré $< n$ donc la formule (26) lui est applicable.

Écrivons donc la formule (26), en désignant maintenant par $F[f]$ la différence divisée (46).

Remarquons que

$$L(x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n-1}; f^*_{n,i} | x) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \geq r \\ \varphi_{i+1,\, n-1}(x), & \text{si } i \leq r-1. \end{cases}$$

Il faut maintenant distinguer deux cas.

I. $j \leq r+n-k-1$. Nous avons alors

$$F[f^*_{n,i}] = 0, \quad i = r, r+1, \ldots, m-n$$

et, pour la fonction $f = f^*_{n,i}$,

$$\psi_{r,\, n-1} = \varphi_{i+1,\, n-1} - f^*_{n,i}, \text{ si } i \leq r-1.$$

Compte tenant du théorème 8, nous voyons donc que

$$F[f^*_{n,i}] \begin{cases} \geq 0, \text{ pour } k = n-1, n-3, \ldots, n+1-2\left[\dfrac{n+1}{2}\right] \\ \leq 0, \text{ pour } k = n-2, n-4, \ldots, n-2\left[\dfrac{n}{2}\right] \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r-1.$$

II. $j \geq r$. Nous avons alors

$$F[f^*_{n,i}] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r-1$$

et, pour la fonction $f = f^*_{n,i}$,

$$\psi_{r,n-1} = -f^*_{n,i}, \text{ si } i \geq r.$$

Compte tenant du théorème 7, nous en déduisons que

$$F[f^*_{n,i}] \leq 0, \text{ pour } k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$i = r, r+1, \ldots, n-1.$$

En résumé, nous allons retenir de l'analyse précédente le résultat suivant.

THÉORÈME **10.** — *Si la suite* (9) *est ordonnée, la différence divisée* (46), *d'ordre* $k \le n$, *de la fonction* (45), *peut s'exprimer sous la forme*

$$\Delta_k^j(\psi_{r,n-1}) = \sum_{i=1}^{m-n} B_i \Delta_n^i(f), \tag{47}$$

où les coefficients B_i *sont indépendants de la fonction* f *et sont*

1° *non-négatifs si* $j \le r+n-k-1$ *et* $k = n-1,\ n-3, \ldots, n+1-2\left[\frac{n+1}{2}\right]$

2° *non-positifs si* $j \le r+n-k-1$ *et* $k = n,\ n-2,\ n-4, \ldots, n-2\left[\frac{n}{2}\right]$ *et*

si $j \ge r$ *et* $k = 0, 1, \ldots, n$.

12. — Du théorème précédent nous allons déduire un résultat intéressant. Prenons toujours une fonction f définie sur la suite ordonnée (9). Considérons la fonction

$$\psi_{r,n}(x) = L(x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n}; f|x) - f(x).$$

La formule (34) permet d'écrire

$$\psi_{r,n}(x) = \psi_{r,n-1}(x) + \varphi_{r,n}(x)\Delta_n^r(f).$$

Compte tenant de la formule (47), nous pouvons écrire

$$\Delta_k^j(\psi_{r,n}) = \Delta_k^j(\psi_{r,n-1}) + \Delta_k^j(\varphi_{r,n})\Delta_n^r(f) = \sum_{i=1}^{m-n} B_i \Delta_n^i(f) + \Delta_k^j(\varphi_{r,n})\Delta_n^r(f).$$

Mais, si nous prenons $f = x^n$, le premier membre se réduit à 0, donc

$$\sum_{i=1}^{m-n} B_i + \Delta_k^j(\varphi_{r,n}) = 0$$

et finalement nous avons

$$\Delta_k^j(\psi_{r,n}) = \sum_{i=1}^{m-n} B_i \{\Delta_n^i(f) - \Delta_n^r(f)\}.$$

Déterminons maintenant l'indice r tel que

$$\Delta_n^r(f) = \max_{i=1,2,\ldots,m-n} \{\Delta_n^i(f)\}$$

Compte tenant alors des théorèmes 3 et 10, nous obtenons le

THÉORÈME 11. — *Etant donnée une fonction f, définie sur la suite ordonnée* (9), *on peut toujours trouver un polynome de Lagrange de degré n, ayant comme noeuds n+1 points consécutifs $x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+n}$, tel que la différence*

$$\psi_{r,n}(x) = L(x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+n}; f|x) - f(x)$$

soit une fonction non-concave d'ordres $n-1, n-3, \dots, n-2\left[\frac{n}{2}\right]-1$.

On voit facilement qu'on peut aussi déterminer le nombre r de manière que $\psi_{r,n}(x)$ soit non-convexe d'ordres $n-1$ $n-3, \dots, n-2\left[\frac{n}{2}\right]-1$ sur (9).

§ 3.

Les polynomes de Lagrange majorants et minorants.

13. — Nous dirons qu'un polynome $P(x)$ est *majorant* resp. *minorant* pour la fonction f définie sur un ensemble linéaire E si nous avons

$$P(x) \geq f(x), \quad x \in E,$$

resp.

$$P(x) \leq f(x), \quad x \in E.$$

Dans ce § nous nous proposons d'examiner les polynomes de Lagrange d'un degré donné n de la fonction f qui sont majorants ou minorants pour cette fonction. Il est clair qu'il suffit d'étudier seulement les polynomes majorants. Les propriétés correspondantes des polynomes minorants en résulteront par symétrie.

Nous supposerons toujours que la fonction f soit définie sur la suite ordonnée (9). Toute suite partielle telle que x_{i_1}, $x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}$ sera supposée ordonnée, donc $i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1}$.

Pour que le polynome de Lagrange de degré n,

$$L(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f|x), \tag{48}$$

soit majorant pour la fonction f, il faut et il suffit, d'après la formule (33), que l'on ait

$$(x_i - x_{i_1})(x_i - x_{i_2}) \cdots (x_i - x_{i_{n+1}})\,[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}, x_i; f] \leq 0, \tag{49}$$
$$i = 1, 2, \dots, m,$$

en convenant de remplacer par 0 tout symbole de différence divisée prise sur des points non tous distincts.

14. — Tout polynome de degré n qui prend les mêmes valeurs que la fonction f aux n points $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ est de la forme

(50) $L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; f \mid x) + A(x - x_{i_1})(x - x_{i_2}) \cdots (x - x_{i_n}),$

A étant une constante.

Si, en particulier,

$$A = [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}; f],$$

le polynome (50) coïncide avec le polynome de Lagrange (48)

Pour que le polynome (50) soit majorant pour la fonction f, il faut et il suffit que l'on ait

(51) $(x_i - x_{i_1})(x_i - x_{i_2}) \cdots (x_i - x_{i_n}) \{A - [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, x_i; f]\} \geqq 0,$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Ce système est équivalent au suivant

(52) $$(-1)^{n-j}\{A - [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, x_i; f]\} \geqq 0,$$
$$i_j < i < i_{j+1}, \; j = 0, 1, \ldots, n,$$

en convenant de poser $i_0 = 0$, $i_{n+1} = m + 1$. Nous supposons qu'on n'écrit que les formules pour les valeurs de j telles que $i_{j+1} - i_j > 1$, autrement, en effet, il n'existe pas de valeurs admissibles pour i. Dans (52) nous avons donc au plus $n+1$ groupes d'inégalités, les inégalités de chaque groupe étant précédées toutes d'un même signe + ou —.

Proposons-nous de chercher les polynomes majorants (48) ayant les n noeuds $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ donnés. On peut voir facilement que

Théorème 12. — *La compatibilité du système* (52) *est nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un polynome de Lagrange majorant de degré n et ayant les n noeuds donnés $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$.*

15. — Cherchons, en particulier, la condition pour qu'un polynome de Lagrange majorant de degré n et ayant n noeuds $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ donnés existe pour *toute fonction f définie sur les points* (9).

Pour cela remarquons que les différences divisées

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}, x_i; f]$$

où $i_1, i_2, \dots, i_n$ sont donnés et $i = 1, 2, \dots, m$, $i \neq i_1, i_2, \dots, i_n$ peuvent être prises arbitrairement. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante cherchée est que dans (52) on n'ait que des inégalités précédées toutes d'un même signe. On voit facilement que pour cela il faut et il suffit que l'on ait ou bien

$$i_1 - i_0 = i_3 - i_2 = \dots = i_{2p+1} - i_{2p} = 1, \quad p = \left[\frac{n}{2}\right], \tag{53}$$

ou bien

$$i_2 - i_1 = i_4 - i_3 = \dots = i_{2p} - i_{2p-1} = 1, \quad p = \left[\frac{n+1}{2}\right], \tag{54}$$

en posant toujours $i_0 = 0$, $i_{n+1} = m + 1$ [1].

Finalement donc

THÉORÈME 13. — *Pour que toute fonction f, définie sur les $m (\geq n+1)$ points ordonnés* (9), *ait au moins un polynome de Lagrange majorant de degré n et ayant n noeuds donnés $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$, il faut et il suffit que l'on ait, ou bien* (53) *ou bien* (54).

Les conditions sont, en particulier, vérifiées si

$$i_1 = 1, \ i_2 = 2, \dots, i_n = n,$$

et aussi si

$$i_1 = m - n + 1, \ i_2 = m - n + 2, \dots, i_n = m.$$

Nous en déduisons donc le

THÉORÈME 14. — *Pour toute fonction f, définie sur les m $(\geq n+1)$ points ordonnés* (9), *il existe au moins un polynome de Lagrange majorant de degré n (> 0)* [2]. *En particulier, l'un au moins des polynomes*

---

1) Cette condition peut aussi s'écrire sous la forme suivante. Les nombres i_j déterminent complètement un indice k tel que l'on ait $n \geq k \geq 0$ et $i_k = k$, $i_{k+1} > k + 1$. La condition est alors: il faut et il suffit que l'on ait, ou bien $k = n$, ou bien

$$i_{k+2p} - i_{k+2p-1} = 1, \quad p = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-k+1}{2}\right], \quad (k < n).$$

2) Pour $n = 0$, voir plus loin le théorème 19.

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+i}; f|x), \quad i = 1, 2, \ldots, m-n,$$

et aussi l'un au moins des polynomes

$$L(x_{m-n+i}, x_{m-n+i+1}, \ldots, x_m, x_i; f|x), \quad i = 1, 2, \ldots, m-n,$$

est majorant pour la fonction f.

16. — L'existence d'au moins un polynome de Lagrange majorant de degré donné n peut aussi être démontrée par induction sur le nombre m des points de la suite (9). Il suffit, en effet, de démontrer la deuxième partie du théorème 14, donc le

Théorème 15. — *L'un au moins des polynomes*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+i}; f|x), \quad i = 1, 2, \ldots, m-n$$

est majorant pour la fonction f.

La propriété est évidente pour $m = n+1$. Supposons qu'elle soit vraie pour $m-1$ points et démontrons-la pour m points ($m > n+1$). Soit

$$(55) \qquad L(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+k}; f|x), \quad (0 < k < m-n),$$

un polynome majorant pour la fonction f sur les $m-1$ premiers points $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$. Deux cas peuvent se présenter.

I. Le polynome (55) est majorant sur les m points (9) et alors la propriété est démontrée.

II. Le polynome (55) n'est pas majorant sur les points (9). Nous avons alors

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+k}; f|x_m) < f(x_m).$$

La formule (33) nous montre que

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+k}, x_m; f] > 0.$$

Je dis que, dans ce cas, le polynome

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_m; f|x)$$

est majorant sur (9). En effet, il suffit de démontrer qu'il est majorant sur les $m-1$ premiers points (9). Compte tenant de (12) et (34), il est facile d'obtenir la formule

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_m; f|x) - f(x) =$$
$$= L(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f|x) - f(x) +$$
$$+ (x_m - x_{n+1})(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_m; f],$$

qui démontre la propriété.

17. — Complétons encore le théorème 14. On démontre d'abord, comme plus haut, le

THÉORÈME 15. — *Pour toute fonction f, définie sur les points (9), où $m \geqq n+1 > 2$ et pour tout $k = 1, 2, \ldots, n-1$, l'un au moins des polynomes*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+i}, x_{m-n+k+1}, x_{m-n+k+2}, \ldots, x_{m-1}, x_m; f|x)$$
$$i = 1, 2, \ldots, m-n,$$

est majorant.

Supposons $m > n+1$ et

$$i_1 = r,\ i_2 = r+1, \ldots, i_n = r+n-1,\ 1 < r < m-n+1.$$

Dans ce cas, si n est pair, la condition (54) est vérifiée Au contraire, si n est impair, aucune des conditions (53), (54) n'est vérifiée. Nous avons donc le

THÉORÈME 17. — *Pour toute fonction f, définie sur les m $(> n+1)$ points (9), il existe toujours au moins un polynome de Lagrange majorant de degré pair n (> 0) et ayant n points consécutifs quelconques de la suite $x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}$ comme noeuds. La propriété n'est pas vraie pour n impair.*

Prenons encore n impair > 1, $m > n+1$ et

$$i_1 = 1,\ i_2 = r,\ i_3 = r+1, \ldots, i_n = r+n-2,\ 2 < r < m-n+1.$$

La condition (53) est alors vérifiée et, compte tenant des résultats précédents, nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 18. — *Pour toute fonction f, définie sur les m $(> n+1)$ points (9), il existe au moins un polynome de Lagrange majorant de degré $n > 1$ et ayant $n-1$ noeuds consécutifs $x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n-2}$ donnés quelconques. La propriété est vraie pour tout entier r si on convient de poser $x_i = x_j$ pour $i \equiv j \pmod{m}$.*

18. — Proposons-nous de chercher la condition pour que le polynome de Lagrange

$$(56) \qquad L(x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n}; f\,|\,x), \quad 1 \leq r \leq m-n,$$

ayant comme noeuds $n+1$ points consécutifs de la suite (9), soit majorant pour la fonction f. D'après (49), pour cela il faut et il suffit que l'on ait

$$(57) \quad \begin{cases} (-1)^{n+1}[x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n}, x_i; f] \leq 0, & i=1,2,\ldots,r-1, \\ \qquad [x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n}, x_i; f] \leq 0, & i=r+1, r+2, \ldots, m. \end{cases}$$

Ces conditions peuvent encore s'écrire, compte tenant de la formule de récurrence (12) et en faisant usage des notations (16),

$$(-1)^{n+1}\{\Delta_n^r(f) - [x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+n}, x_i; f]\} \leq 0, \quad i=1,2,\ldots,r-1,$$
$$[x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+n}, x_i; f] - \Delta_n^r(f) \leq 0, \quad i=r+1, r+2, \ldots, m.$$

Si nous supposons maintenant n pair ≥ 0, et si nous déterminons r de manière que

$$(58) \qquad \Delta_n^r(f) = \max_{i=1,2,\ldots,m-n} \{\Delta_n^i f\},$$

nous voyons que les inégalités (57) sont toujours vérifiées. Nous avons donc le

Théorème 19. — *Si $n \geq 0$ est pair, pour toute fonction f, définie sur les m ($\geq n+1$) points (9), l'un au moins des polynomes de Lagrange (56) est majorant.*

D'ailleurs, ce n'est qu'une partie du théorème **11**.

19. — Cherchons maintenant la condition pour que *tous* les polynomes (56) soient majorants. Les inégalités (57) nous montrent que pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait, en particulier,

1°. Si n est pair,

$$-\Delta_{n+1}^{r-1}(f) \leq 0, \quad r=2,3,\ldots,m-n,$$
$$\Delta_{n+1}^{r}(f) \leq 0, \quad r=1,2,\ldots,m-n-1,$$

donc *la fonction doit être polynomiale d'ordre n.*

2°. Si n est impair,

$$\Delta_{n+1}^{r}(f) \leq 0, \quad r=1,2,\ldots,m-n-1$$

et *la fonction doit être non-convexe d'ordre n.*

Il est facile de voir que ces conditions sont aussi suffisantes et nous pouvons donc énoncer le

THÉORÈME 20. — *Pour que les polynomes de Lagrange* (56) *soient tous majorants pour la fonction f, il faut et il suffit que cette fonction soit*

1°. *Polynomiale d'ordre n pour n pair.*

2°. *Non-convexe d'ordre n pour n impair.*

Réciproquement d'ailleurs, la propriété de majoration de tous les polynomes (55) est, sous une autre forme, la définition même de la non-convexité d'ordre n si n est impair et une forme de la définition de la non-concavité et de la non-convexité simultanées, donc de la polynomialité d'ordre n si n est pair. Ceci résulte de l'interprétation à l'aide des polynomes de Lagrange de la définition des fonctions d'ordre n et du théorème 3.

On peut maintenant compléter le théorème 17, pour n impair, de la manière suivante

THÉORÈME 21. — *Si n est impair, pour qu'il existe des polynomes de Lagrange majorants de degré n et ayant comme noeuds n points donnés consécutifs quelconques de la suite* (9), *il faut et il suffit que la fonction f soit non-convexe d'ordre n sur les points* (9).

La condition est suffisante d'après le théorème 20. Pour voir qu'elle est aussi nécessaire, nous devons écrire les conditions de compatibilité des systèmes (52) correspondants. Ces conditions sont,

$$\max_{i=r+n,\, r+n+1,\ldots,m} \{[x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n-1}, x_i; f]\} \leq$$

$$\leq \min_{i=1,2,\ldots,r-1} \{[x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n-1}, x_i; f]\}$$

$$r = 2, 3, \ldots, m-n.$$

En particulier, nous devons avoir

$$\Delta_n^r(f) - \Delta_n^{r-1}(f) = (x_{r+n} - x_{r-1})\, \Delta_{n+1}^{r-1}(f) \leq 0,$$

$$r = 2, 3, \ldots, m-n,$$

ce qui démontre la propriété.

20. — Enfin, examinons un peu les polynomes de Lagrange majorants de degré n des fonctions d'ordre n.

L'inégalité (49) nous montre que nous avons le

THÉORÈME 22. — *Pour que le polyome* (48) *soit majorant, pour toute fonction non-concave resp. non-convexe d'ordre n* (≥ 0) *sur* (9), *il faut et il suffit que l'on ait*

$$(59)\qquad i_{n-2p+2}-i_{n-2p+1}=1, \quad p=0,1,\ldots,\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

resp.

$$(60)\qquad i_{n-2p+1}-i_{n-2p}=1, \quad p=0,1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right],$$

en supposant $i_0=0$, $i_{n+2}=m+1$.

Si la fonction est convexe resp. concave d'ordre n sur (9) *les polynomes ainsi déterminés sont les seuls polynomes de Lagrange majorants de degré n.*

En effet, pour une fonction convexe resp. concave d'ordre n les conditions (49) deviennent

$$(i-i_1)(i-i_2)\ldots(i-i_{n+1})<0, \text{ resp. } >0,$$

$$i_j<i<i_{j+1},\, j=0,1,\ldots,n+1$$

et on trouve (59) et (60) respectivement.

Le nombre minimum des polynomes de Lagrange majorants de degré n pour une fonction non-concave ou non-convexe d'ordre n est égal au nombre des solutions du système diophantien (59) ou (60), sous l'hypothèse

$$0=i_0<i_1<\ldots<i_{n+1}<i_{n+2}=m+1.$$

Ces nombres se calculent facilement. Désignons-les par N_m^n, $N_m'^n$ respectivement. On trouve aisément les relations de récurrence

$$N_m'^{2p+1}=N_{m-2}'^{2p-1}+N_{m-3}'^{2p-1}+\ldots+N_{2p}'^{2p-1},\; N_m'^1=m-1,$$

d'où

$$N_m'^{2p+1}=\binom{m-p-1}{p+1}.$$

Nous avons ensuite

$$N_m^0=1,\; N_m^1=1,\; N_m^{2p}=N_m'^{2p}=N_{m-1}'^{2p-1},\; N_m^{2p+1}=N_{m-2}'^{2p-1}$$

et nous en déduisons

$$N_m^n=\binom{m-\left[\frac{n+3}{2}\right]}{\left[\frac{n}{2}\right]},\qquad N_m'^n=\binom{m-\left[\frac{n+2}{2}\right]}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}.$$

On peut aussi se poser le problème de déterminer le nombre minimum des polynomes de Lagrange majorants de degré n que doit admettre toute fonction définie sur les m points (9). Ce nombre est $\leq N^n_m$, d'après le théorème 22. Pour $n=1$ il est évidemment égal à 1. Pour $n>1$ il résulte, des résultats précédents, que ce nombre croît indéfiniment avec m, mais sa valeur exacte reste à être trouvée. Le même problème peut être posé pour le nombre minimum des polynomes de Lagrange de degré donné n qui sont majorants ou minorants. De ce qui précède il résulte que ce nombre est égal à 3 pour $n=1$ et $m>2$.

21. — L'interprétation géométrique des propriétés étudiées est très simple pour $n=0$, et pour $n=1$.

Figurons les points représentatifs $M_i(x_i, f(x_i))$ par rapport aux axes de coordonnées.

Si $n=0$, tout polynome de Lagrange de degré n est une constante, donc représenté par une parallèle à l'axe Ox, passant par l'un des points M_i. L'existence d'un polynome de Lagrange majorant signifie tout simplement que la fonction atteint son maximum sur (9). Il y a, en général, un seul polynome de Lagrange majorant et degré 0. Le théorème **20** s'applique, mais devient une propriété banale.

Il est d'ailleurs presque évident, que, pour n quelconque, si tous les polynomes de Lagrange de degré n sont majorants, la fonction est polynomiale d'ordre n. En effet, il existe sûrement un polynome de Lagrange minorant. Ce polynome doit être aussi majorant et la fonction coïncide donc avec lui sur (9).

Si $n=1$, un polynome de Lagrange de degré n est représenté par la droite joignant deux points M_i. Le théorème d'existence **14** signifie que le système de points M_i a au moins une droite d'appui passant par deux points et laissant non-au-dessus tous les autres points M_i. Plus exactement, il existe au moins une telle droite d'appui passant par M_1 et au moins une passant par M_m. Il est facile de voir que tous les côtés du plus petit polygone convexe contenant les points M_i représentent des polynomes de Lagrange de degré 1 majorants ou minorants pour la fonction f. Le théorème **20** a aussi une interprétation simple. Il signifie que le polygone $M_1 M_2 \ldots M_m$ doit être convexe, les points M_i étant non-au-dessus de la droite $M_1 M_m$.

§ 4.

Sur les polynomes de Lagrange des fonctions d'ordre n.

22.— Des résultats du § précédent nous déduisons la propriété suivante

Théorème **23.** — *Toute fonction non-négative sur la suite* (9) *a au moins un polynome de Lagrange de degré n qui est aussi non-négatif sur la suite* (9).

Il suffit, en effet, de prendre un polynome majorant. On voit que la propriété reste vraie si au lieu d'une fonction non-négative nous prenons une fonction positive et nous exigeons l'existence d'un polynome de Lagrange positif.

Nous nous proposons maintenant de généraliser cette propriété et de chercher si, étant donnée une fonction f non-concave d'ordre k sur la suite ordonnée (9) de m ($\geq n+1$) points, on peut trouver un polynome de Lagrange de degré n qui soit aussi non-concave d'ordre k sur (9).

Le théorème 23 nous montre précisément que pour $k=-1$ la réponse est toujours affirmative. Nous verons, au contraire, que *pour* $k \geq 0$ *il n'en est pas ainsi.*

Nous examinerons surtout des conditions sous lesquelles on peut affirmer que pour *toute* fonction non-concave d'ordre k il existe au moins un polynome de Lagrange de degré n qui soit aussi non-concave d'ordre k sur (9).

23. — Soit donc f une fonction non-concave d'ordre $k \geq 0$ sur les m points (9).

Il est clair que si $n \leq k+1$, tout polynome de Lagrange de degré n est non-concave (même polynomiale si $n \leq k$) d'ordre k sur (9). On voit aussi qu'il est inutile d'examiner le cas $m=n+1$ puisqu'alors il y a un seul polynome de Lagrange de degré n, qui coïncide sur (9) avec la fonction f et qui est donc, évidemment, non-concave d'ordre k sur (9).

Supposons donc que $n > k+1$, $m > n+1$.

Le théorème 11 permet d'énoncer la propriété suivante

Théorème **24.** — *Si n est un entier $> k+1$ et de parité différente avec k et si la fonction f est non-concave d'ordre k sur les $m > n+1$ points* (9), *il existe au moins un polynome de Lagrange de degré n qui soit aussi non-concave d'ordre k sur les points* (9).

En effet, si r est déterminé par la condition (58), la fonction

$$\psi_{r,n} = L(x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n}; f | x) - f(x)$$

est non-concave d'ordre k sur (9). En appliquant le théorème 4 on voit que

$$\psi_{r,n} + f = L(x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+n}; f | x)$$

est aussi non-concave d'ordre k sur les points (9).

L'existence d'au moins un polynome de Lagrange de degré n et non-concave d'ordre k est donc démontrée pour $n = k+3, k+5, \ldots$

24. — Nous allons construire maintenant un exemple qui nous démontrera que *pour $n = k+2, k+4, \ldots, (k \geq 0)$ il n'existe pas toujours de polynomes de Lagrange de degré n et non-concaves d'ordre k sur les points* (9).

Nous allons donc supposer $n \geq k+2$, n de même parité avec k et $m \geq n+2$.

Comme suite (9) nous allons choisir la suivante

$$x_1 = -1,\ x_i = (i-2)\lambda,\ i = 2, 3, \ldots, n+1, \tag{61}$$

$$x_{n+1} < x_{n+2} < \cdots < x_m = (n-1)\lambda + 1,$$

où λ est un nombre positif. Les points de la forme x_i avec $i \geq n+1$ s'écrivent $x_i = (n-1)\lambda + \theta_i$, les θ_i étant indépendants de λ. Nous avons donc $0 = \theta_{n+1} < \theta_{n+2} < \cdots < \theta_m = 1$.

Considérons le polynome de degré n, $P(x)$, qui est nul aux points $x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ et qui prend la valeur $(-1)^{k+1}$ au point x_1 et la valeur positive b au point x_m. Nous avons

$$P(x) = \frac{(x-\lambda)(x-2\lambda)\cdots(x-\overline{n-1}\,\lambda)\{[b(\overline{n-1}\,\lambda+1)-1]x+(1+b)(\overline{n-1}\,\lambda+1)\}}{(\lambda+1)(2\lambda+1)\cdots(\overline{n-1}\,\lambda+1)(\overline{n-1}\,\lambda+2)} \tag{62}$$

Ce polynome prend la valeur

$$P(x_1) = \frac{(-1)^{k+1}(n-1)!\,\lambda^{n-1}(1+b)}{(\lambda+1)(2\lambda+1)\cdots(\overline{n-2}\,\lambda+1)(\overline{n-1}\,\lambda+2)}$$

au point x_1 [1] et nous avons

$$\lim_{\lambda \to +\infty} P(x_1) = (-1)^{k+1}(1+b).$$

Nous allons démontrer que pour λ assez grand le polynome $P(x)$ n'est certainement pas non-concave d'ordre k sur

---

1) Pour $n = 2$, ce qui exige $k = 0$, il n'y a pas de facteurs de la forme $i\lambda + 1$. Cette remarque s'applique aussi plus loin.

(61). Pour cela il suffit de démontrer que la différence divisée $\Delta^1_{k+1}(P)$, où nous faisons usage de la notation (16), est négative si λ est assez grand. Un calcul simple, basé sur la formule (11), nous montre que

$$\Delta^1_{\lambda+1}(P)=\frac{(-1)^{k-1}P(x_1)}{(\lambda+1)(2\lambda+1)\cdots(k\lambda+1)}+\frac{(-1)^k P(x_2)}{k!\,\lambda^k}$$

et nous en déduisons

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^k\,\Delta^1_{k+1}(P)=-\frac{b}{k!}<0,$$

d'où résulte notre propriété.

Mettons encore en évidence une autre propriété du polynome $P(x)$.

Soient $3\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n+1$, $n+2\leq j_1<j_2\cdots<j_{k-r+2}\leq m$, $1\leq r\leq k+1$ et considérons le polynome

$$Q(x)=(\lambda+1)(2\lambda+1)\ldots(\overline{n-1}\,\lambda+1)(\overline{n-1}\,\lambda+2)\frac{P(x)}{(x-x_{i_1})(x-x_{i_2})\ldots(x-x_{i_r})}.$$

Nous nous proposons d'étudier la différence divisée, qui, d'après la formule (14), s'écrit

$$[x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_{k-r+2}};Q(x)]=[\theta_{j_1},\theta_{j_2},\ldots,\theta_{j_{k-r+2}};Q(\overline{n-1}\,\lambda+t)],$$

pour λ très grand. Nous avons

$$Q(\overline{n-1}\,\lambda+x)=\sum_{i=0}^{n-r+1}\lambda^{n-r-i+1}(bA_i+B_{i-1})$$

où A_i, B_i sont des polynomes de degré i en x, indépendants de λ et de b. On a, d'ailleurs, $B_{-1}=0$, $B_0=0$, $A_{n-r+1}=0$ et aussi $A_i=0$ lorsque $i_r\leq n$.

Nous en déduisons le lemme suivant

Lemme 1. — *Si* $3\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n+1$, $n+2\leq j_1<j_2<$ $<\cdots<j_{k-r+2}\leq m$, $1\leq r\leq k+1$, *la limite*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^k\left[x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_{k-r+2}};\frac{P(x)}{(x-x_{i_1})(x-x_{i_2})\ldots(x-x_{i_r})}\right]$$

existe et est de la forme $b\alpha$, où α est un nombre indépendant de b.

25. — Définissons maintenant la fonction f sur les points (61) de la manière suivante

$$f(x_2)=0, \quad f(x_i)=P(x_i), \quad i=1,3,4,\ldots,m, \tag{63}$$

où $P(x)$ est le polynome (62).

Cette fonction est non-concave d'ordre k sur les points (61). En effet, d'après les théorèmes 4 et 9, elle est non-concave d'ordre k sur les points $x_3, x_4, \ldots, x_m$. Nous avons donc $\Delta^i_{k+1}(f)\geq 0$, $i=3,4,\ldots,m-k-1$. De plus, nous avons $\Delta^2_{k+1}(f)=0$ et

$$\Delta^1_{k+1}(f)=\frac{(-1)^{k+1}f(x_1)}{(\lambda+1)(2\lambda+1)\ldots(k\lambda+1)}=\frac{1}{(\lambda+1)(2\lambda+1)\ldots(k\lambda+1)}>0,$$

ce qui démontre la propriété.

Nous allons démontrer qu'on peut choisir le nombre positif b tel que pour λ assez grand, la fonction f n'ait aucun polynome de Lagrange de degré n qui soit aussi non-concave d'ordre k sur (61).

Pour les polynomes de Lagrange qui n'ont pas le point x_2 comme noeud il est clair qu'ils ne peuvent être non-concaves d'ordre k. Ces polynomes coïncident, en effet, avec le polynome $P(x)$, par suite de la définition de la fonction f.

Considérons maintenant un polynome de Lagrange qui a le point x_2 comme noeud mais qui n'a pas le point x_1 comme noeud. Un tel polynome est de la forme

$$\begin{gathered}L(x)=L(x_2,x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_r},x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_{n-r}};f\,|\,x),\\ 3\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n+1,\ n+2\leq j_1<j_2<\cdots<j_{n-r}\leq m,\\ r=0,1,\ldots,n-1\ ^{1)}.\end{gathered} \tag{64}$$

Nous trouvons facilement

$$L(x)=P(x)+$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}P(x_2)(x-x_{i_1})(x-x_{i_2})\ldots(x-x_{i_r})(x-x_{j_1})(x-x_{j_2})\ldots(x-x_{j_{n-r}})}{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_{n-r}}}.$$

1) Pour $r=0$ il n'y a aucun noeud x_i avec $3\leq i\leq n+1$. Une remarque analogue s'applique aussi plus loin.

Nous allons chercher à préciser le signe de la différence divisée $\Delta^1_{k+1}(L)$. Nous trouvons d'abord

$$
(65)\quad \begin{cases}
\lim\limits_{\lambda \to +\infty} L(x_1) = (-1)^k b, \\
L(x_2) = 0, \\
\lim\limits_{\lambda \to +\infty} L(x_i) = \dfrac{(i-n-1)^{n-r}(i-i_1)(i-i_2)\ldots(i-i_r)}{(n-1)^{n-r}(i_1-2)(i_2-2)\ldots(i_r-2)}(1+b),
\end{cases}
$$

$$i = 3, 4, \ldots, k+2.$$

Nous avons maintenant

$$\Delta^1_{k+1}(L) = \frac{(-1)^{k-1} L(x_1)}{(\lambda+1)(2\lambda+1)\ldots(k\lambda+1)} + \frac{1}{k!\,\lambda^k}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}\frac{L(x_{\nu+2})}{x_{\nu+2}-x_1}$$

qui, d'après (65), nous donne

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^k \Delta^1_{k+1}(L) = -\frac{b}{k!} < 0.$$

Il en résulte que pour λ assez grand les polynomes (64) ne sont certainement pas non-concaves d'ordre k sur les points (61).

Il nous reste à examiner les polynomes de Lagrange qui ont les deux points x_1, x_2 comme noeuds. Un tel polynome est de la forme

$$L(x_1, x_2, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-r-1}}; f|x),$$

$$(66)\quad 3 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n+1, \quad n+2 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-r-1} \leq m,$$

$$r = 0, 1, \ldots, n-1$$

et nous trouvons facilement

$$L(x) = P(x) +$$

$$\frac{(-1)^n P(x_2)(x-x_1)(x-x_{i_1})(x-x_{i_2})\ldots(x-x_{i_r})(x-x_{j_1})(x-x_{j_2})\ldots(x-x_{j_{n-r-1}})}{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_{n-r-1}}}$$

en désignant maintenant par $L(x)$ le polynome (66).

Pour l'étude des polynomes (66) nous allons distinguer plusieurs cas.

1. Supposons $r \leq n-2$. Considérons un point x_i avec $3 \leq i \leq n+1$ et qui ne coïncide pas avec l'un des points $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$. Un tel point existe certainement. Soit alors la différence divisée

$$[x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{k-s+1}}; L],$$

où $s = \min(k, r)$. Cette différence divisée est, d'après la formule (13), la somme des différences divisées

$$\left[x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}; \frac{L(x)}{(x-x_{j_1})(x-x_{j_2})\ldots(x-x_{j_{k-s+1}})}\right], \tag{67}$$

$$\left[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{k-s+1}}; \frac{L(x)}{(x-x_i)(x-x_{i_1})(x-x_{i_2})\ldots(x-x_{i_s})}\right]. \tag{68}$$

La différence divisée (67) est égale à

$$\frac{L(x_i)}{(x_i-x_{i_1})(x_i-x_{i_2})\ldots(x_i-x_{i_s})(x_i-x_{j_1})(x_i-x_{j_2})\ldots(x_i-x_{j_{k-s+1}})}.$$

Mais, nous avons

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{L(x_i)}{\lambda} = -\frac{(i-n-1)^{n-r-1}(i-2)(i-i_1)(i-i_2)\ldots(i-i_r)}{(n-1)^{n-r-1}(i_1-2)(i_2-2)\ldots(i_r-2)}(1+b)$$

et nous en déduisons

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^k \left[x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}; \frac{L(x)}{(x-x_{j_1})(x-x_{j_2})\ldots(x-x_{j_{k-s+1}})}\right] =$$
$$= -(1+b)\beta,$$

où

$$\beta = \frac{(i-n-1)^{n-k-r+s-1}(i-2)(i-i_1)(i-i_2)\ldots(i-i_r)}{(n-1)^{n-r-1}(i_1-2)(i_2-2)\ldots(i_r-2)(i-i_1)(i-i_2)\ldots(i-i_s)}.$$

Dans la différence divisée (68) $L(x)$ peut être remplacé par $P(x)$ et le lemme 1 nous donne

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^k \left[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{k-s+1}}; \frac{L(x)}{(x-x_i)(x-x_{i_1})(x-x_{i_2})\ldots(x-x_{i_s})}\right] = b\alpha$$

où α est un nombre indépendant de b.

Finalement donc nous avons

$$(70)\quad \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^k [x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{k-n+r+1}}; L] = -(1+b)\beta + b\alpha.$$

Discutons maintenant le résultat obtenu.

I_1. Si $n>2$, $i_1>3$, nous pouvons prendre $i=3$ et on voit que *le nombre* (69) *est positif*. La formule (70) nous montre alors que si $b>0$ est choisi suffisamment petit et λ assez grand, le polynome (66) n'est certainement pas non-concave d'ordre k sur les points (61). Ce cas contient le cas $r=0$, $n>2$.

I_2. Si $1 \leq r \leq n-3$, $i_1=3$ (ce cas exige $n \geq 4$), nous pouvons encore choisir i de manière que $i \leq n$. Nous avons encore (70). Le nombre (69) est non nul, mais peut être positif ou négatif. Dans ce cas nous établissons, exactement comme plus haut, la formule

$$(71)\quad \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^k [x_i, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_r}, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{k-r+2}}; L] = -(1+b)\beta' + b\alpha'$$

où

$$\beta' = \frac{(i-n-1)^{n-k+r+s-2}(i-2)(i-i_1)(i-i_2)\ldots(i-i_r)}{(n-i)^{n-r-1}(i_1-2)(i_2-2)\ldots(i_r-2)(i-i_1)(i-i_2)\ldots(i-i_r)} = \frac{i-i_1}{i-n-1}\beta.$$

Les nombres β et β' sont donc non nuls et *de signes contraires*. De (70) et (71) nous voyons encore qu'on peut choisir b assez petit et λ assez grand pour que le polynome (66) considéré ne soit pas non-concave d'ordre k sur les points (61).

I_3. Si $r=n-2$, $n>2$, $i_{n-2}=n+1$. Dans ce cas la formule (70) est encore valable avec $\beta \neq 0$, donné par la formule (69). Nous avons $s=k$. Considérons la différence divisée

$$[x_2, x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}; L] = \frac{L(x_i)}{(x_i-x_1)(x_i-x_{i_1})(x_i-x_{i_2})\ldots(x_i-x_{i_k})}.$$

Nous en déduisons

$$(72)\quad \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^k [x_2, x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}; L] = -(1+b)\beta'',$$

où

$$\beta'' = \frac{i-n-1}{i-2}\beta.$$

Les formules (70), (72) nous montrent encore que le polynome (66) ne peut être non-concave d'ordre k si b est assez petit et λ assez grand.

II. Considérons maintenant le cas $r=n-2$, $i_{n-1}=n$, donc le polynome

(73) $$L(x)=L(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_j; f|x),\ n+2\leq j\leq m.$$

Nous trouvons

$$\lim_{\lambda\to+\infty} L(x_{n+1})=(1+b)\,\theta_j,\quad \lim_{\lambda\to+\infty} L'(x_j)=b\,\theta_j.$$

Si nous remarquons que

$$[x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \ldots, x_{n+1}, x_j; L]=$$

$$=\frac{L(x_{n+1})}{(x_{n+1}-x_{n-k+1})(x_{n+1}-x_{n-k+2})\ldots(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_j)}+$$

$$+\frac{L(x_j)}{(x_j-x_{n-k+1})(x_j-x_{n-k+2})\ldots(x_j-x_{n+1})},$$

nous trouvons

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^k[x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \ldots, x_{n+1}, x_j; L]=-\frac{1}{k!}<0,$$

ce qui montre que pour λ assez grand le polynome (73) n'est pas non-concave d'ordre k sur les points (61).

Ce résultat est valable aussi pour $n=2$. On a alors $k=0$, $r=0$ et

$$\lim_{\lambda\to+\infty} [x_n, x_j; L]=-1.$$

III. Finalement, considérons le polynome

(74) $$L(x)=L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f|x).$$

Nous avons

$$L(x_m)=-1$$

et nous déduisons

$$[x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \ldots, x_{n+1}, x_m; L]=-\frac{1}{(\lambda+1)(2\lambda+1)\ldots(k\lambda+1)}<0.$$

Le polynome (74) n'est donc pas non-concave d'ordre k sur (61).

Nous avons étudié de cette façon tous les polynomes de

Lagrange de degré n de la fonction (63) et nous pouvons énoncer la propriété suivante

Théorème 25. — *Si le nombre positif b est assez petit et le nombre positif λ assez grand, la fonction* (63), *non-concave d'ordre $k \geq 0$ sur les $m \geq n+2$ points* (61), *n'a aucun polynome de Lagrange de degré $n \geq k+2$ qui soit aussi non-concave d'ordre k sur les points* (61), *pourvu que n soit de même parité avec k.*

26. — Si n et k sont de même parité, l'existence d'au moins un polynome de Lagrange de degré n et non-concave d'ordre k (>0) dépend non seulement de la fonction f, supposée non-concave d'ordre k, mais aussi de la distribution des points (9).

Nous allons résoudre complètement le problème dans le cas le plus simple qui est $n=k+2$, $m=n+2=k+4$. Il existe alors $k+4$ polynomes de Lagrange de degré n,

$$L_i(x)=L(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{k+4}; f|x), \quad i=1,2,\ldots,k+4,$$

et nous devons étudier le signe des trois différences divisées d'ordre $k+1$,

$$\Delta^1_{k+1}(L_i), \quad \Delta^2_{k+1}(L_i), \quad \Delta^3_{k+1}(L_i),$$

en faisant toujours usage de la notation (16).

Compte tenant de la formule (33), nous trouvons

$$\Delta^1_{k+1}(L_i)=\Delta^1_{k+1}(f)-(x_i-x_{k+3})(x_i-x_{k+4})\Delta^1_{k+3}(f)$$

$$\Delta^2_{k+1}(L_i)=\Delta^2_{k+1}(f)-(x_i-x_1)(x_i-x_{k+4})\Delta^1_{k+3}(f)$$

$$\Delta^3_{k+1}(L_i)=\Delta^3_{k+1}(f)-(x_i-x_1)(x_i-x_2)\Delta^1_{k+3}(f).$$

Les nombres

$$\Delta^1_{k+1}(f)=a, \quad \Delta^2_{k+1}(f)=b, \quad \Delta^3_{k+1}(f)=c,$$

sont, par hypothèse, non négatifs.

La formule (12) permet d'écrire

$$\Delta^1_{k+3}(f)=\frac{(x_{k+4}-x_2)a-(x_{k+4}+x_{k+3}-x_2-x_1)b+(x_{k+3}-x_1)c}{(x_{k+3}-x_1)(x_{k+4}-x_2)(x_{k+4}-x_1)}$$

et nous déduisons

$$
(75)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta^1_{k+1}(L_i) &= \frac{\begin{array}{c}(x_{k+4}-x_2)(x_i-x_1)(x_{k+4}+x_{k+3}-x_i-x_1)a-\\ -(x_{k+3}-x_i)(x_{k+4}-x_i)(x_{k+4}-x_1)c+\\ +(x_{k+4}-x_i)(x_{k+3}-x_i)(x_{k+3}+x_{k+4}-x_2-x_1)b\end{array}}{(x_{k+3}-x_1)(x_{k+4}-x_2)(x_{k+4}-x_1)}\\
\Delta^2_{k+1}(L_i) &= \frac{\begin{array}{c}(x_i-x_2)(x_{k+4}-x_i)[(x_{k+3}-x_2)a+(x_{k+3}-x_1)c]+\\ +[(x_{k+3}-x_2)(x_{k+4}-x_i)(x_{k+3}-x_i)+\\ +(x_{k+3}-x_i)(x_i-x_1)(x_i-x_2)]b\end{array}}{(x_{k+3}-x_1)(x_{k+3}-x_2)(x_{k+4}-x_1)}\\
\Delta^3_{k+1}(L_i) &= \frac{\begin{array}{c}(x_{k+3}-x_i)(x_{k+4}-x_i)(x_{k+4}+x_i-x_2-x_1)c-\\ -(x_i-x_1)(x_i-x_2)(x_{k+4}-x_2)a+\\ +(x_i-x_1)(x_i-x_2)(x_{k+4}+x_{k+3}-x_2-x_1)b\end{array}}{(x_{k+3}-x_1)(x_{k+4}-x_2)(x_{k+4}-x_1)}
\end{aligned}\right.
$$

Nous avons d'abord

$$\Delta^3_{k+1}(L_i)\geq 0,\quad i=1,2,\ldots,k+4.$$

Nous avons aussi

$$\Delta^1_{k+1}(L_{k+3})=\Delta^1_{k+1}(L_{k+4})=\Delta^1_{k+1}(f)\geq 0,$$
$$\Delta^2_{k+1}(L_1)=\Delta^2_{k+1}(L_2)=\Delta^2_{k+1}(f)\geq 0,$$

et on voit que les suites

$$(76)\qquad \Delta^1_{k+1}(L_1),\ \Delta^1_{k+1}(L_2),\ldots,\Delta^1_{k+1}(L_{k+2}),\ \Delta^1_{k+1}(L_{k+3}),$$
$$(77)\qquad \Delta^2_{k+1}(L_2),\ \Delta^2_{k+1}(L_3),\ldots,\Delta^2_{k+1}(L_{k+3}),\ \Delta^2_{k+1}(L_{k+4}),$$

sont monotones.

Il n'y a pas lieu d'examiner le cas $\Delta^1_{k+2}(f)=0$, car alors la fonction est polynomiale d'ordre $k+2$ sur la suite (9) et tous les polynomes $L_i(x)$ coïncident avec f. Si $\Delta^1_{k+2}(f)\neq 0$, on voit facilement que la suite (76) est croissante resp. décroissante et la suite (77) est décroissante resp. croissante suivant que $\Delta^1_{k+2}(f)$ est positif resp. négatif.

Voyons maintenant dans quels cas peut-on trouver une fonction f n'ayant aucun polynome de Lagrange de degré $k+2$ qui soit non-concave d'ordre k sur les $k+4$ points considérés?

Soit d'abord $k=0$. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante cherchée est la compatibilité du système

$$\Delta_1^1(L_2) < 0 \quad \Delta_1^2(L_3) < 0,$$

dans les inconnues non-négatives a, b, c. En définitive donc la compatibilité du système

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c \geq 0,$$

$$-(x_2-x_1)(x_4+x_3-x_2-x_1)a + (x_3-x_1)(x_3-x_2)c >$$
$$> (x_3-x_2)(x_4+x_3-x_2-x_1)b,$$
$$(x_3-x_2)(x_4-x_2)a - (x_4-x_3)(x_4+x_3-x_2-x_1)c >$$
$$> (x_3-x_2)(x_4+x_3-x_2-x_1)b.$$

La condition cherchée est

$$(x_3-x_1)(x_4-x_2)(x_3-x_2)^2 - (x_2-x_1)(x_4-x_3)(x_4+x_3-x_2-x_1)^2 > 0.$$

Le premier membre est divisible par x_4-x_1 et nous trouvons

$$(x_3-x_2)^3 - 3(x_3-x_2)(x_2-x_1)(x_4-x_3) - (x_2-x_1)(x_4-x_3)(x_4-x_3+x_2-x_1) > 0$$

d'où, enfin,

$$(78) \qquad x_3-x_2 > \sqrt[3]{(x_2-x_1)^2(x_4-x_3)} + \sqrt[3]{(x_2-x_1)(x_4-x_3)^2}.$$

Nous pouvons donc énoncer les propriétés suivantes

Théorème **26.** — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction non-décroissante sur les quatre points ordonnés x_1, x_2, x_3, x_4 et n'ayant aucun polynome de Lagrange de degré 2 qui soit aussi non-décroissant sur ces points, est que l'inégalité (78) soit vérifiée.*

Théorème **27.** — *Si les points ordonnés x_1, x_2, x_3, x_4 vérifient l'inégalité*

$$(79) \qquad x_3 - x_2 \leq \sqrt[3]{(x_2-x_1)^2(x_4-x_3)} + \sqrt[3]{(x_2-x_1)(x_4-x_3)^2},$$

toute fonction non-décroissante sur ces points a au moins un polynome de Lagrange de degré 2 qui est aussi non-décroissant sur ces mêmes points.

L'inégalité (79) este vérifiée, en particulier, si les points x_1, x_2, x_3, x_4 sont équidistants. Si la distribution des points x_1, x_2, x_3, x_4 est symétrique nous pouvons prendre, sans restreindre la généralité, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = \lambda$, $x_4 = \lambda + 1$ et l'inégalité (78) devient $\lambda > 2$.

27. — Supposons maintenant $k > 0$. D'après les résultats du Nr. précédent, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction n'ayant aucun polynome de Lagrange de degré $k+2$ et non-concave d'ordre k est qu'il existe un indice i tel que $2 \leq i \leq k+2$ et tel que le système

$$\Delta^{i}_{k+1}(L_i) < 0, \quad \Delta^{i}_{k+1}(L_{i+1}) < 0,$$

soit compatible dans les inconnues non-négatives a, b, c.

Cette condition de compatibilité s'écrit, après calculs faits,

$$(80) \qquad (x_{k+3}-x_i)(x_{i-1}-x_2)(x_{i+1}-x_1)-$$
$$-(x_i-x_1)(x_{k+4}-x_{i-1})(x_{k+4}+x_{k+3}+x_{i+1}-x_i-x_2-x_1) > 0.$$

Nous en déduisons le

Théorème 28. — *Si les $k+4$ points ordonnés $x_1, x_2, \ldots, x_{k+4}$ vérifient les inégalités*

$$(81) \qquad (x_{k+3}-x_i)(x_{i-1}-x_2)(x_{i+1}-x_1)-$$
$$-(x_i-x_1)(x_{k+4}-x_{i-1})(x_{k+4}+x_{k+3}+x_{i+1}-x_i-x_2-x_1) \leq 0$$
$$i = 2, 3, \ldots, k+2$$

toute fonction non-concave d'ordre k sur ces points a au moins un polynome de Lagrange de degré $k+2$ qui est aussi non-concave d'ordre k sur ces mêmes points.

Par exemple, considérons la suite de points (61) pour $n=k+2$, $m=k+4$, donc les points $(\lambda > 0)$.

$$(82) \quad x_1 = -1, \quad x_i = (i-2)\lambda, \quad i = 2, 3, \ldots, k+3, \quad x_{k+4} = (k+1)\lambda + 1.$$

La condition (80) devient

$$\delta_i(\lambda) = (k+3-i)(i-1)\lambda^2 - (\overline{i-2}\,\lambda+1)(\overline{k+2-i}\,\lambda+1)(\overline{2k+3}\,\lambda+1) > 0.$$

Mais,

$$\delta_i(\lambda) - \delta_{i+1}(\lambda) = 2(k+3-2i)\lambda^2(\overline{k+1}\,\lambda+1), \quad \delta_i(\lambda) = \delta_{k+4-i}(\lambda)$$

et il résulte donc que, si λ vérifie l'inégalité

$$(83) \qquad \delta_2(\lambda) > 0,$$

on peut trouver une fonction f non-concave d'ordre k sur les points (82) et n'ayant aucun polynome de Lagrange de degré $k+2$; non-concave d'ordre k sur ces points. Une discussion simple nous montre que (82) est équivalent à $\lambda > \lambda_0$, où λ_0 est la racine positive de l'équation en λ,

$$\delta_2(\lambda) = (k+1)\lambda^3 - k(2k+3)\lambda^2 - (4k+3)\lambda - 2 = 0.$$

Pour $k > 0$, on a $2k+1 < \lambda_0 < 2k+2$.

On peut encore voir que les inégalités (81) sont vérifiées si les points x_i sont équidistants.

28. — Dans le cas $n = k+2$, et même pour $m \geq n+2$ quelconque, on peut traiter autrement notre problème.

Démontrons d'abord le

LEMME 2. — *Pour que le polynome $P(x)$ de degré $k+2$ soit non-concave d'ordre k sur les points ordonnés (9), il faut et il suffit que l'on ait*

$$\Delta^1_{k+1}(P) \geq 0, \quad \Delta^{m-k-1}_{k+1}(P) \geq 0. \tag{84}$$

La démonstration est très simple. Les inégalités sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont aussi suffisantes. Soit

$$P(x) = c_0 x^{k+2} + c_1 x^{k+1} + \cdots$$

et, d'après (3) et (8),

$$\Delta^i_{k+1}(P) = c_0 (x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+k+1}) + c_1.$$

Nous en déduisons

$$\Delta^i_{k+1}(P) = \frac{\left(\sum_{j=1}^{k+2} x_{m-j+1} - \sum_{j=1}^{k+2} x_{i+j-1}\right)\Delta^1_{k+1}(P) + \left(\sum_{j=1}^{k+2} x_{i+j-1} - \sum_{j=1}^{k+2} x_j\right)\Delta^{m-k-1}_{k+1}(P)}{\sum_{j=1}^{k+2} x_{m-j+1} - \sum_{j=1}^{k+2} x_j}$$

donc $\Delta^i_{k+1}(P) \geq 0$, $i = 2, 3, \ldots, m-k-2$, ce qui démontre la propriété [1].

Si maintenant f est une fonction non-concave d'ordre k sur les $m\,(\geq k+4)$ points ordonnés (9), nous pouvons écrire, en appliquant le lemme 2, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le polynome

$$L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+2}}, x_i; f\,|\,x), \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{k+2} \leq m)$$

---

1) Des inégalités (84) il résulte de plus que nous avons $(k+2)c_0 x + c_1 \geq 0$ pour x compris dans l'intervalle

$$\left[\frac{1}{k+2}\sum_{j=1}^{k+2} x_j, \quad \frac{1}{k+2}\sum_{j=1}^{k+2} x_{m-j+1}\right].$$

On en déduit que le polynome $P(x)$ est non-concave d'ordre k dans cet intervalle.

soit aussi non-concave d'ordre k sur (9). Compte tenant des formules (34), (13) et (8), nous trouvons que les inégalités (84) deviennent

$$
(85)\qquad \left\{ \begin{aligned} & [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+2}}; f] + \left(\sum_{j=1}^{k+2} x_j - \sum_{j=1}^{k+2} x_{i_j} \right) [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+2}}, x_i; f] \geq 0, \\ & [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+2}}; f] + \left(\sum_{j=1}^{k+2} x_{m-j+1} - \sum_{j=1}^{k+2} x_{i_j} \right) [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+2}}, x_i; f] \geq 0. \end{aligned} \right.
$$

29. — Nous allons faire une application des résultats précédents, dans le cas $k=0$. Prenons alors

$$
i_1 = 1, i_{k+2} = m \quad \text{et} \quad 1 < i < m.
$$

Les inégalités (85) deviennent

$$
(86)\qquad \left\{ \begin{aligned} & [x_1, x_m; f] - (x_m - x_2)[x_1, x_m, x_i; f] \geq 0, \\ & [x_1, x_m; f] + (x_{m-1} - x_1)[x_1, x_m, x_i; f] \geq 0. \end{aligned} \right.
$$

Si nous remarquons que

$$
[x_1, x_m, x_i; f] = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1)(x_i - x_m)} - \frac{[x_1, x_m; f]}{x_i - x_m} - \frac{f(x_1)}{(x_i - x_1)(x_i - x_m)},
$$

nous déduisons que les inégalités (86) expriment que $f(x_i)$ doit être compris dans l'intervalle fermé $[a_i, b_i]$, où

$$
a_i = \frac{(x_i - x_1)(x_i - x_2)}{x_m - x_2} [x_1, x_m; f] + f(x_1).
$$

$$
b_i = \frac{(x_i - x_1)(x_m + x_{m-1} - x_i - x_1)}{x_{m-1} - x_1} [x_1, x_m; f] + f(x_1).
$$

Nous pouvons supposer $[x_1, x_m; f] > 0$, car si $[x_1, x_m; f] = 0$, la fonction (supposée non-décroissante) se réduit nécessairement à une constante. On voit alors que

$$
a_i < b_i,\ a_i < a_{i+1},\ b_i < b_{i+1},\ i = 2, 3, \ldots, m-1.
$$

Démontrons maintenant la propriété suivante

THÉORÈME **29.** — *Si les inégalités*

$$
(87)\qquad a_{i+1} \leq b_i,\ i = 2, 3, \ldots, m-2,
$$

sont vérifiées, toute fonction non-décroissante définie sur les $m \geq 4$ *points ordonnés* (9) *a au moins un polynome de Lagrange de degré 2 qui est aussi non-décroissant sur les points* (9).

Montrons, en effet, que l'un au moins des polynomes

$$L(x_1, x_i, x_m; f|x), \quad i=2,3,\dots,m-1,$$

est non-décroissant.

Dans le cas contraire, il faudrait que $f(x_i)$ n'appartienne pas à $[a_i, b_i]$ et ceci pour $i=2,3,\dots,m-1$. Mais, compte tenant de la non-décroissance de f et de $a_2=f(x_1)$, $b_{m-1}=f(x_m)$, on voit qu'il faudrait alors que

$$f(x_2) > b_2, \quad f(x_{m-1}) < a_{m-1}.$$

Il existe donc deux indices consécutifs i, $i+1$ tels que

$$f(x_i) > b_i, \quad f(x_{i+1}) < a_{i+1},$$

qui, en vertu de (87), nous donnerait $f(x_{i+1}) < f(x_i)$, ce qui est absurde. La propriété est donc démontrée.

Les inégalités (87) peuvent s'écrire

$$\begin{gathered}(x_m-x_1)(x_i-x_1)(x_m+x_{m-1}-x_i-x_1)-\\ -(x_{m-1}-x_1)(x_{i+1}-x_1)(x_{i+1}-x_1)\geq 0,\\ i=2,3,\dots,m-1.\end{gathered}$$

Ces inégalités sont vérifiées, en particulier, si les points x_i sont équidistants, donc

THÉORÈME 30. — *Toute fonction non-décroissante, définie sur les $m \geq 4$ points ordonnés et équidistants* (9), *a au moins un polynome de Lagrange de degré 2 qui est aussi non-décroissant sur les points* (9).

30\. — Pour finir ce § et en revenant au cas $k>0$, remarquons que si on suppose les points $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k+2}}$ donnés, les inégalités (85) déterminent, en général, un intervalle auquel doit appartenir $f(x_i)$. Les formules (13), (15), (14) et (7) permettent d'écrire

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k+2}}, x_i; f] = \frac{f(x_i)}{(x_i-x_{i_1})(x_i-x_{i_2})\dots(x_i-x_{i_{k+2}})} -$$

$$-\sum_{j=1}^{k+2}[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}; f]\frac{1}{(x_i-x_{i_j})(x_i-x_{i_{j+1}})\dots(x_i-x_{i_{k+2}})}$$

Si nous posons

$$a_i = \frac{(x_i-x_{i_1})(x_i-x_{i_2})\ldots(x_i-x_{i_{k+1}})(x_i-x_{i_{k+1}}+\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k+2}};f]+$$

$$+\sum_{j=1}^{k+1}[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_j};f](x_i-x_{i_1})(x_i-x_{i_2})\ldots(x_i-x_{i_{j-1}}),$$

$$b_i = \frac{(x_i-x_{i_1})(x_i-x_{i_2})\ldots,(x_i-x_{i_{k+1}})(\gamma-\beta-x_i+x_{i_{k+2}})}{\gamma-\beta}[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k+2}};f]+$$

$$+\sum_{j=1}^{k+1}[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_j};f](x_i-x_{i_1})(x_i-x_{i_2})\ldots(x_i-x_{i_{j-1}}),$$

où, pour simplifier,

$$\alpha=\sum_{j=1}^{k+2}x_j,\quad \beta=\sum_{j=1}^{k+2}x_{i_j},\quad \gamma=\sum_{j=1}^{k+2}x_{m-j+1}.$$

$f(x_i)$ doit appartenir à l'intervalle fermé d'extrémités a_i, b_i. Si nous supposons $i_1 < m-k-1$, $i_{k+2} > k+2$, nous avons $\beta-\alpha>0$, $\gamma-\beta>0$ et a_i, b_i sont bien des nombres finis. Ces nombres sont, d'ailleurs, déterminés pour tous les $i=1,2,\ldots,m$ et on a

$$a_{i_j}=b_{i_j}=f(x_{i_j}),\quad j=1,2,\ldots,k+2.$$

Remarquons encore que la fonction $a(x)$ qui prend les valeurs a_i aux points x_i et la fonction $b(x)$ qui prend les valeurs b_i aux points x_i sont non-concaves d'ordre k sur les points (9). En effet,

$$[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k+2}};a]=\frac{\sum_{r=1}^{k+2}x_{i_r}-\alpha}{\beta-\alpha}[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k+2}};f]\geq 0,$$

$$[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k+2}};b]=\frac{\gamma-\sum_{r=1}^{k+2}x_{i_r}}{\gamma-\beta}[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k+2}};f]\geq 0.$$

§ 5.

Sur les polynomes de Lagrange des fonctions définies dans un intervalle.

32. — Nous allons étudier un peu les problèmes traités aux §§ 3 et 4 dans le cas où la fonction f n'est plus définie sur un nombre fini de points, mais dans un intervalle. Pour fixer les idées nous supposerons que f, finie et uniforme, soit définie dans l'intervalle fini et fermé $[a, b]$.

Dans ces cas il est nécessaire de considérer aussi des différences divisées prises sur des points non tous distincts et des polynomes de Lagrange ayant des noeuds non tous distincts.

La différence divisée

$$(88) \qquad [\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{r_2}, \ldots, \underbrace{x_s, x_s, \ldots, x_s}_{r_s}; f]$$

où r_i points sont confondus avec x_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, est d'ordre $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_s - 1$ et s'obtient par un passage à la limite. Elle s'exprime encore sous la forme d'un quotient de deux déterminants U et V de la forme (6). M. E. Nörlund [1] remarque d'ailleurs que la différence divisée (88) est égale à

$$\frac{1}{(r_1-1)!\,(r_2-1)!\ldots(r_s-1)!}\,\frac{d^{r_1+r_2+\cdots+r_s-s}}{dx_1^{r_1-1}\,dx_2^{r_2-1}\ldots dx_s^{r_s-1}}\,[x_1, x_2, \ldots, x_s; f].$$

Cette définition exige donc l'existence pour f de la dérivée d'ordre $r_i - 1$ au point x_i.

De la même manière on définit le polynome de Lagrange [2]

$$L(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{r_2}, \ldots, \underbrace{x_s, x_s, \ldots, x_s}_{r_s}; f \mid x)$$

de degré $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_s - 1$, ayant des noeuds multiples. Le noeud x_i est d'ordre r_i de multiplicité (double, triple, ... etc si $r = 2, 3, \ldots,$ etc.).

L'existence d'un noeud r_i^{uple} au point x_i exige encore que la fonction soit $(r_i - 1)$ fois dérivable en ce point.

On démontre que toutes les formules établies pour les différences divisées et les polynomes de Lagrange pris sur des points distincts s'étendent à ce cas plus général.

---

1) Voir loc. cit. plus haut.

2) C'est le polynome de Lagrange-Hermite. Pour plus de détails sur ce polynome voir: N. E. Nörlund „*Leçons sur les séries d'interpolation*". Paris 1926.

32. — Examinons maintenant le problème des polynomes de Lagrange majorants. En général, il n'existe pas de tels polynomes, mais

THÉORÈME 31. — *Toute fonction semi-continue supérieurement dans l'intervalle* $[a, b]$ *a au moins un polynome de Lagrange majorant de degré* 0.

C'est une propriété banale. Elle exprime tout simplement le fait bien connu qu'une fonction semi-continue supérieurement dans un intervalle fini et fermé atteint son maximum qui est nécessairement fini.

Montrons maintenant que l'hypothèse de la semi-continuité supérieure est suffisante pour affirmer l'existence d'au moins un polynome de Lagrange majorant de degré 1, donc démontrons le

THÉORÈME 32. — *Toute fonction semi-continue supérieurement dans l'intervalle* $[a, b]$ *a au moins un polynome de Lagrange majorant de degré* 1.

Considérons, en effet, la fonction

$$\alpha x + \beta - f(x),$$

où α, β sont deux constantes. Cette fonction est semi-continue inférieurement, donc atteint son minimum qui est fini. Soit $\mu(\alpha, \beta)$ ce minimum. Deux cas sont à considérer :

I. Il existe des valeurs de α, β telles que $\mu(\alpha, \beta)$ soit atteint en deux points $x_1, x_2 \in [a, b]$, au moins. Alors le polynome

$$L(x_1, x_2; f|x) = \alpha x + \beta - \mu(\alpha, \beta)$$

est majorant.

II. Le minimum $\mu(\alpha, \beta)$ est toujours atteint en un seul point. Nous savons alors que la fonction f doit être concave d'ordre 1 dans $[a, b]$ [1]. Mais, une telle fonction est continue dans $[a, b]$ et a une dérivée dans $[a, b]$, sauf peut-être sur un ensemble au plus dénombrable. Il existe donc un point $x_1 \in [a, b]$ où la dérivée $f'(x_1)$ existe. Le polynome

$$\overset{*}{L}(x_1, x_1; f|x)$$

est alors majorant.

---

[1] TIBERIU POPOVICIU „*Deux remarques sur les fonctions convexes*", Bull. Sci. Acad. Roumaine, 20, 45-49 (1938).

33. — Nous ne savons pas si la semi-continuité supérieure suffit pour la généralisation du théorème 32 au degré n quelconque. Nous allons démontrer la propriété moins générale suivante

Théorème 33. — *Toute fonction continue et une fois dérivable dans l'intervalle* $[a, b]$ *a au moins un polynome de Lagrange majorant de degré* n.

En effet, soit $T_n(x)$ le polynome de meilleure approximation de Tchebycheff de degré n et correspondant à la fonction f dans l'intervalle $[a, b]$. T_n est donc le polynome unique de degré n pour lequel le maximum

$$\max_{[a,b]} |f(x)-P(x)| \tag{89}$$

est le plus petit possible, $P(x)$ étant un polynome de degré n. Désignons par μ le minimum de (89).

Nous savons que la différence T_n-f prend alternatitivement les valeurs $\pm\mu$ en au moins $n+2$ points consécutifs de l'intervalle $[a,b]$ [1]. Le polynome $T_n+\mu$ est majorant pour la fonction f. C'est un polynome de Lagrange de f. En effet, la fonction $T_n+\mu-f$ atteint son minimum 0 en au moins $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ points. Si n est pair, l'un au plus de ces points coïncide avec a ou b. Si n est impair il se peut que deux de ces points coïncident avec a ou b. Si n est impair il se peut que deux de ces points coïncident avec a ou b respectivement, mais alors le minimum est atteint en au moins $\frac{n+3}{2}$ points. La propriété cherchée en résulte si nous remarquons que tout point intérieur de $[a, b]$ où $T_n+\mu-f$ s'annulle, peut être pris comme noeud double.

34. — Soit maintenant f une fonction non-négative dans $[a, b]$. Dans les cas étudiés plus haut, l'existence d'au moins un polynome de Lagrange de degré n qui soit aussi non-négatif est démontrée. Mais il nous semble qu'on peut obtenir des résultats plus complets. Nous nous bornerons ici à démontrer le

---

1) E. Borel *Leçons sur les fonctions de variables réelles* Paris, 1905.

Théorème 34. — *Toute fonction non-négative dans* $[a, b]$ *a au moins un polynome de Lagrange de degré 2 qui est aussi non-négatif.*

Pour la démonstration nous allons distinguer trois cas:

I. $f(a) > 0$, $f(b) > 0$. Considérons alors les polynomes

$$L(a, b; f|x) + A(x-a)(x-b). \tag{90}$$

Il existe une valeur A_0 telle que pour $A \leq A_0$ le polynome (90) reste non-négatif dans $[a, b]$. Pour $A = A_0$ ce polynome (90) a un zéro double qui est un point intérieur x_0 de $[a, b]$. Si l'on détermine A de manière que (90) prenne la valeur $f(x_0)$ au point x_0, on a $A \leq A_0$. Il en résulte que le polynome $L(a, b, x_0; f|x)$ est non-négatif dans $[a, b]$.

II. $f(a) = f(b) = 0$. On voit facilement que le polynome $L(a, b, x_0; f|x)$ est non-négatif quel que soit x_0 à l'intérieur de $[a, b]$.

III. $f(a) = 0$, $f(b) > 0$. Considérons alors le polynome

$$\frac{f(b)}{(b-a)^2}(x-a)^2. \tag{91}$$

S'il existe un point x_0 intérieur à $[a, b]$ où la fonction prend une valeur plus grande que le polynome (91), le polynome $L(a, b, x_0; f|x)$ est non-négatif dans $[a, b]$. Si l'on a

$$f(x) \leq \frac{f(b)}{(b-a)^2}(x-a)^2, \quad x \in [a, b],$$

on voit immédiatement que la dérivée $f'(a)$ au point a existe et est nulle. Dans ce cas le polynome (91) peut s'écrire $L(a, a, b; f|x)$ et est évidemment non-négatif dans $[a, b]$.

Les conclusions sont analogues si $f(a) > 0$, $f(b) = 0$.

Le théorème 34 est vrai, évidemment, pour le degré 0. Pour le degré 1 on voit que le polynome $L(a, b; f|x)$ est non-négatif dans $[a, b]$.

35. — Pour finir nous donnerons une propriété des polynomes de Lagrange des fonctions non-concaves d'ordre k dans un cas très particulier.

Supposons f non-concave d'ordre k et admettant une dérivée continue d'ordre n dans $[a, b]$. Nous supposons $n > k+2$

et de parité différente avec k. Soit x_0 un point où $f^{(n)}(x)$ atteint son maximum et considérons alors le polynome de Lagrange

$$L(x)=L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{n+1}; f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i)}(x_0).$$

Je dis que le polynome $L(x)$ est non-concave d'ordre k dans $[a, b]$. Il suffit pour cela de démontrer que sa dérivée d'ordre $k+1$ est non-négative dans $[a, b]$. Nous avons

$$L^{(k+1)}(x)=\sum_{i=0}^{n-k-1}\frac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i+k+1)}(x_0).$$

Mais, la formule de Taylor nous donne

$$f^{(k+1)}(x)=\sum_{i=0}^{n-k-2}\frac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i+k+1)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}f^{(n)}(\xi)$$

ξ étant un nombre compris entre x et x_0.

Nous avons donc

$$L^{(k+1)}(x)=[L^{(k+1)}(x)-f^{(k+1)}(x)]+f^{(k+1)}(x)=$$

$$=\frac{(x-x_0)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}[f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(\xi)]+f^{(k+1)}(x)$$

d'où résulte la propriété.

Finalement donc

Théorème 35. — *Si n est de parité différente avec k, toute fonction non-concave d'ordre k et admettant une dérivée $n^{ème}$ continue dans $[a, b]$, a au moins un polynome de Lagrange de degré n qui est aussi non-concave d'ordre k dans $[a, b]$.*

Remarquons, d'ailleurs, que pour une fonction ayant une dérivée $n^{ème}$ continue quelconque, la différence $L(x)-f(x)$ est une fonction non-concave d'ordre k dans $[a, b]$ si, bien entendu, k et n sont de même parité.

Mars 1943