

PUBLIKAȚIILE INSTITUTULUI REGAL DE CERCETĂRI ȘTIINȚIFICE
AL ROMÂNIEI



TIBERIU POPOVICIU. *Notes sur les généralisations des fonctions
convexes d'ordre supérieur (IV).*

(Extrait des „Disquisitiones Mathematicae et Physicae“
t. II, fasc. 2—4, 1942)

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ, BUCUREȘTI-1942
ROMANIA

NOTES SUR LES GÉNÉRALISATIONS DES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR (IV)

PAR

TIBERIU POPOVICIU

SUR UNE REPRÉSENTATION DES FONCTIONS MONOTONES PAR SEGMENTS

1. Dans trois notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur¹⁾ nous avons introduit, en particulier, les fonctions *monotones par segments*. Il est nécessaire d'abord de rappeler les principales propriétés de ces fonctions.

Une fonction $f(x)$, finie et uniforme sur l'ensemble linéaire E est monotone par segments sur E si on peut décomposer cet ensemble en un nombre fini de sous-ensembles consécutifs

$$(1) \quad E_1, E_2, \dots, E_m,$$

tel que sur chaque E_i , la fonction soit monotone.

A une fonction monotone par segments correspondent, en général, une infinité de décompositions (1). Le nombre m des sous-ensembles d'une telle décomposition a un minimum h . Ce nombre h est la *caractéristique* de la fonction $f(x)$.

Parmi les décompositions (1) nous avons distingué une que nous avons appelé la *décomposition canonique* de E relativement à la fonction $f(x)$ monotone par segments. Cette décomposition

$$(2) \quad E_1^*, E_2^*, \dots, E_h^*,$$

¹⁾ Note I: *Disquisitiones Mathematicae et Physicae*, 1, 35—42 (1940).

Note II: *Bulletin de la sec. sci. de l'Acad. Roumaine*, 22, No. 10 (1940); Note III: *ibid.*, 24, No. 6 (1942). Le lecteur est prié de se rapporter à ces notes pour tout ce qui concerne la théorie des fonctions monotones par segments.

a exactement h termes et est construit de la manière suivante: E_1^* est le sous-ensemble de E formé par tous les points $x \in E$ tels que $f(x)$ soit monotone sur l'intersection de E avec l'intervalle fermé (a, x) , où a est l'extrémité gauche de E . L'ensemble E_2^* se déduit de la même manière de $E - E_1^*$ et, en général, E_{i+1}^* de la même manière de $E - (E_1^* + E_2^* + \dots + E_i^*)$.

2. Soit $f(x)$ monotone par segments et (2) la décomposition canonique correspondant. Désignons par a_i, b_i les extrémités (gauche et droite) de E_i^* . On a $a_i < b_i$ sauf si E_i^* est formé par un seul point et alors, évidemment, $a_i = b_i$. D'ailleurs a_1 est l'extrémité gauche de E et b_h est l'extrémité droite de E .

Nous avons défini une suite de $2h$ nombres propres ou impropres

$$c_1, c_2, \dots, c_{2h-1}, c_{2h}$$

de la manière suivante: $c_{2i-1} = f(a_i)$ si $a_i \in E_i^*$ et $c_{2i-1} = \lim f(x)$ si a_i n'appartient pas à E_i^* et x tend vers a_i sur E_i^* . De même $c_{2i} = f(b_i)$ si $b_i \in E_i^*$ et $c_{2i} = \lim f(x)$ si b_i n'appartient pas à E_i^* et x tend vers b_i sur E_i^* .

Considérons la suite des différences

$$(3) \quad c_2 - c_1, c_3 - c_2, \dots, c_{2h} - c_{2h-1}$$

et convenons que

$$(+\infty) - u = u - (-\infty) = (+\infty) - (-\infty) > 0,$$

$$(-\infty) - u = u - (+\infty) = (-\infty) - (+\infty) < 0,$$

$$(+\infty) - (+\infty) = (-\infty) - (-\infty) = 0,$$

lorsque u est un nombre fini.

Alors les termes de la suite (3) sont ou bien nuls ou bien ont un signe déterminé. La suite (3) présente donc un nombre k de variations de signes. Nous disons que la fonction $f(x)$ est d'ordre $(0 | k)$ sur E .

Considérons une suite finie et ordonnée $e = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ de E , donc $x_1, x_2, \dots, x_m \in E, x_1 < x_2 < \dots < x_m$. Posons, avec les notations habituelles,

$$\Delta_i^1(f) = [x_i, x_{i+1}; f], i = 1, 2, \dots, m-1.$$

La suite

$$(4) \quad \Delta_1^1(f), \Delta_1^2(f), \dots, \Delta_i^{m-1}(f)$$

présente alors au plus k variations de signes. Plus précisément le nombre k jouit de la propriété que le nombre maximum des variations de signes de (4), lorsqu'on considère les suites (4) correspondant à tous les sous-ensembles finis e de E , est égal à k .

3. Une fonction monotone par segments et de caractéristique h est au moins d'ordre $(0 | h-1)$ et est au plus d'ordre $(0 | 2h-2)$ ¹⁾. Il existe donc h types de fonctions de caractéristique h . Ces sont les fonctions respectivement d'ordre $(0 | h-1), (0 | h), (0 | h+1), \dots, (0 | 2h-2)$. Il est facile de construire des fonctions de chaque type.

Définition 1. Nous dirons qu'une fonction $f(x)$, monotone par segments et de caractéristique h , est du type minimum si elle est d'ordre $(0 | h-1)$.

Étudions un peu les fonctions du type minimum. Pour cela démontrons d'abord le

Lemme 1. Pour que la fonction $f(x)$ soit du type minimum il faut et il suffit qu'elle soit du type minimum sur chacun des ensembles $E_i^* + E_{i+1}^* + \dots + E_j^*, j > i$, ce qui est équivalent au

Lemme 1'. Pour que la fonction $f(x)$ soit du type minimum il faut et il suffit que la suite

$$(5) \quad c_{2i} - c_{2i-1}, c_{2i+1} - c_{2i}, \dots, c_{2j} - c_{2j-1}$$

présente exactement $j-i$ variations de signes et ceci pour $j = i+1, i+2, \dots, h, i = 1, 2, \dots, h-1$.

La condition est évidemment nécessaire car on sait que $E_i^*, E_{i+1}^*, \dots, E_j^*$ est la décomposition canonique de $E_i^* + E_{i+1}^* + \dots + E_j^*$. La condition est aussi suffisante. En effet, la suite (5) présente au moins $j-i$ variations. Elle ne peut présenter plus de $j-i$ variations car alors la suite (3) présenterait au moins h variations.

Considérons maintenant la suite

$$(6) \quad c_2 - c_1, c_4 - c_3, c_6 - c_5, \dots, c_{2h} - c_{2h-1},$$

ayant h termes. Cette suite peut avoir des termes nuls et des termes d'un signe déterminé, conformément aux conventions du Nr. 2. Deux termes consécutifs de la suite (6) ne peuvent être nuls à la fois. En effet, si $c_{2i} - c_{2i-1} = c_{2i+2} - c_{2i+1} = 0$, la fonction serait monotone sur $E_i^* + E_{i+1}^*$ ce qui est impossible. De plus

Lemme 2. Si $f(x)$ est du type minimum, un terme nul (autre que le premier et le dernier) de la suite (6) est toujours compris entre deux termes de mêmes signes.

Soit, en effet, $c_{2i} - c_{2i-1} = 0$, alors

$$c_{2i-2} - c_{2i-3} \neq 0, c_{2i+2} - c_{2i+1} \neq 0.$$

¹⁾ L'ordre $(0 | k_1)$ est au moins resp. au plus égal à l'ordre $(0 | k_2)$ suivant que $k_1 \geq k_2$ resp. $k_1 \leq k_2$.

D'après le lemme 1' la suite

$$c_{2i-2} - c_{2i-3}, c_{2i-1} - c_{2i-2}, c_{2i} - c_{2i-1}, c_{2i+1} - c_{2i}, c_{2i+2} - c_{2i+1}$$

ne peut présenter que l'une des dispositions suivantes de signes

$$+, -, 0, -, + \quad -, +, 0, +, -$$

et le lemme 2 est démontré.

Remarquons aussi que

Lemme 3. Si $f(x)$ est du type minimum deux termes consécutifs nuls de la suite (6) sont toujours de signes contraires.

C'est une conséquence du lemme 1'. Plus spécialement du fait que les suites

$$c_{2i} - c_{2i-1}, c_{2i+1} - c_{2i}, c_{2i+2} - c_{2i+1}$$

$$i = 1, 2, \dots, h-1$$

présentent une variation de signe.

Nous pouvons énoncer maintenant le théorème suivant

Théorème 1. Pour que la fonction $f(x)$, monotone par segments et de caractéristique h , soit du type minimum il faut et il suffit qu'elle soit alternativement non-décroissante et non-croissante sur les ensembles $E_1^*, E_2^*, \dots, E_h^*$ de la décomposition canonique.

La fonction est non-décroissante resp. non-croissante sur E_i^* suivant que $c_{2i} - c_{2i-1}$ est positif resp. négatif. De là résulte immédiatement que la condition est suffisante. Les lemmes 2 et 3 nous montrent qu'elle est aussi nécessaire. Pour que le théorème soit toujours exact nous supposons, conformément à l'analyse précédente, qu'une fonction constante (donc toute fonction définie sur un seul point) est indifféremment non-décroissante ou non-croissante. Si sur E_i^* la fonction est constante nous la considérons comme non-décroissante ou non-croissante suivant que sur E_{i-1}^* et E_{i+1}^* elle est non-croissante ou non-décroissante. En d'autres termes nous devons remplacer les termes nuls dans la suite (6) par des signes tels que cette suite présente le nombre maximum possible de variations de signes.

4. Nous allons nous occuper maintenant du problème du prolongement des fonctions monotones par segments. Nous examinerons, en particulier, les prolongements qui conservent l'ordre de la fonction.

Introduisons la définition suivante

Définition 2. La fonction $f(x)$ d'ordre $(0|k)$ sur E est prolongeable sur l'ensemble E_1 si on peut trouver une fonction $f_1(x)$ d'ordre $(0|k)$ sur $E + E_1$ qui coïncide avec $f(x)$ sur E .

Une fonction d'ordre $(0|k)$ n'est pas toujours prolongeable. Par exemple la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{1}{x-2}, & x \in (2, +\infty), \end{cases}$$

qui est d'ordre $(0|1)$, n'est prolongeable sur aucun point de l'intervalle $[0, 2]$.

Supposons que la fonction $f(x)$ soit bornée sur E et examinons un prolongement spécial de cette fonction. Définissons la fonction $f_1(x)$ de la manière suivante:

1°. $f_1(x) = f(x)$ sur E .

2°. En un point x_0 de E' qui n'appartient pas à E nous prenons pour $f_1(x_0)$ l'une des valeurs limite (la limite à gauche ou la limite à droite) de $f(x)$ en ce point.

3°. Si (α, β) est un intervalle contigu de la fermeture $\bar{E}$ de E nous prenons $f_1(x)$ linéairement dans l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$. Si $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$, $f_1(x)$ est constamment égal à $f(\beta)$ ou $f(\alpha)$ dans $(-\infty, \beta]$ ou $[\alpha, +\infty)$.

Je dis que la fonction $f_1(x)$ a même ordre que la fonction $f(x)$. On voit facilement qu'il suffit de démontrer que l'addition d'un point d'accumulation à E ne change pas l'ordre et de même l'addition d'un intervalle contigu à $\bar{E}$ ne change pas l'ordre.

Si nous ajoutons à E le point d'accumulation x_0 (x_0 n'appartenant pas à E), ce point s'ajoute à un E_i^* de la décomposition canonique. Le fait que $x_0 = a_i$ signifie que $f_1(a_i)$ a été défini comme limite à droite et le fait $x_0 = b_i$ signifie que $f_1(b_i)$ a été défini comme limite à gauche. On voit alors que

$$E_1^*, E_2^*, \dots, E_{i-1}^*, E_i^* + x_0, E_{i+1}^*, \dots, E_h^*$$

est une décomposition de $E + x_0$. La suite (3) correspondant à cette décomposition est la même que la suite (3) correspondant à la décomposition canonique de E . L'invariance de l'ordre en résulte.

Si nous ajoutons à $\bar{E}$ un intervalle contigu (α, β) , deux cas peuvent se présenter. Ou bien α, β appartiennent tous les deux à un même sous-ensemble $\bar{E}_i^*$ de la décomposition canonique de $\bar{E}$ et alors l'ordre ne change évidemment pas. Ou bien α appartient à un $\bar{E}_i^*$ et β à $\bar{E}_{i+1}^*$. Dans ce cas α doit être l'extrémité droite de $\bar{E}_i^*$ et β l'extrémité gauche de $\bar{E}_{i+1}^*$. Dans ce cas, la décomposition canonique de $\bar{E}$ étant ¹⁾

$$(7) \quad \bar{E}_2^*, \bar{E}_2^*, \dots, \bar{E}_h^*,$$

¹⁾ La caractéristique de $f_1(x)$ sur $\bar{E}$ est effectivement égale à celle de $f(x)$ sur E .

pour $\bar{E} + (a, \beta)$ nous avons la décomposition ¹⁾

$$(8) \quad \bar{E}_1^*, \bar{E}_2^*, \dots, \bar{E}_i^*, (a, \beta), \bar{E}_{i+1}^*, \dots, \bar{E}_h^*.$$

La suite (3) correspondant à (8) ne diffère de celle correspondant à (7) que par l'intercalation de deux termes nuls. L'invariance de l'ordre est encore établie.

Nous pouvons donc énoncer le

Théorème 2. Toute fonction d'ordre $(0|k)$ et bornée sur E est prolongeable (par conservation de l'ordre) sur tout l'axe réel $(-\infty, +\infty)$.

Ce prolongement est réalisé par la fonction $f_1(x)$ ²⁾.

L'hypothèse que la fonction $f(x)$ soit bornée n'est pas nécessaire. Soient toujours a, b les extrémités de E et soit I_E l'intervalle d'extrémités a, b et qui est fermé ou ouvert à gauche resp. à droite suivant que a resp. b appartient ou non à E . Il est facile de voir que nous avons alors la propriété suivante.

Théorème 3. Toute fonction d'ordre $(0|k)$ sur E et bornée sur tout sous-ensemble complètement intérieur à E ³⁾ est prolongeable (par conservation de l'ordre) dans tout l'intervalle I_E .

5. Examinons un peu les fonctions définies dans un intervalle E .

Définition 3. Nous dirons que la fonction $f(x)$, monotone par segments dans l'intervalle E , est normale si les sous-ensembles E_i^* de la décomposition canonique sont tous des intervalles de longueur non nulle.

Pour une fonction normale nous avons donc

$$(9) \quad b_1 < b_2 < \dots < b_{h-1},$$

les b_i étant toujours les extrémités droites des ensembles E_i^* .

La fonction est donc monotone dans chacun des intervalles

$$(10) \quad (a, b_1), (b_1, b_2), \dots, (b_{h-1}, b)$$

a, b étant les extrémités de E .

Ici nous supposons que:

1°. (a, b_1) est fermé ou ouvert à gauche suivant que a appartient ou non à E .

2°. (b_{h-1}, b) est fermé ou ouvert à droite suivant que b appartient ou non à E .

¹⁾ Qui n'est d'ailleurs pas la décomposition canonique, mais ceci n'a pas d'importance.

²⁾ La propriété de $f_1(x)$ est même plus précise. Elle conserve l'ordre $(0|k)^-$ ou $(0|k)^+$ avec un signe (voir la Note I de cette série). Cette remarque est valable aussi pour le théorème 3.

³⁾ $E_1 \subset E$ est complètement intérieur à E si ses extrémités sont des points intérieurs de I_E .

3°. De deux intervalles consécutifs (b_{i-1}, b_i) (b_i, b_{i+1}) ($b_0 = a, b_h = b$) si $b_i \in E_i^*$ le premier est fermé à droite et le second ouvert à gauche et si $b_i \in E_{i+1}^*$ le premier est ouvert à droite et le second fermé à gauche.

De cette façon (10) est précisément la décomposition canonique de E .

Si de plus la fonction est du type minimum, cette fonction est alternativement non-décroissante et non-croissante dans les intervalles (10).

Les points (9) peuvent être appelés les nœuds de la fonction $f(x)$.

Nous avons encore le

Théorème 4. Toute fonction $f(x)$, monotone par segments et continue dans l'intervalle E , est normale et du type minimum.

La démonstration est facile et il est inutile de la faire ici. Les nœuds sont des points de maxima et de minima relatifs. En particulier les fonctions continues ayant un nombre fini d'extréma relatifs sont monotones par segments.

Dans le cas des fonctions continues la décomposition canonique est

$$(a, b_1], (b_1, b_2], (b_2, b_3], \dots, (b_{h-1}, b),$$

pour $(a, b_1], (b_{h-1}, b)$ les conventions 1°, 2° du plus haut restant valables et les autres intervalles étant ouverts à gauche et fermés à droite.

6. Soit $f(x)$ une fonction monotone par segments et normale dans l'intervalle E . Soient (9) les nœuds de cette fonction.

Considérons un intervalle I qui soit en même temps que E ouvert ou fermé aux deux extrémités et soient

$$(11) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_{h-1},$$

$h-1$ points à l'intérieur de I .

L'intervalle I peut être, par exemple, l'intervalle E lui-même.

Soit $\psi(x)$ une fonction continue et croissante, définie dans $\bar{E}$ de manière que

$$\psi(b_i) = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, h,$$

où b_0, b_h sont les extrémités de E et x_0, x_h les extrémités de I .

La transformation $y = \psi(x)$ ($y \in I, x \in E$) établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre E et I . La fonction inverse $\psi^{-1}(x)$ de $\psi(x)$ est continue et croissante dans I . La fonction

$$f^*(x) = f(\psi^{-1}(x)), \quad x \in I$$

est normale, de même caractéristique que $f(x)$. Les fonctions $f(x), f^*(x)$ sont en même temps du type minimum et en même temps continues. Nous avons aussi

$$f(x) = f^*(\psi(x)), \quad x \in E.$$

7. Revenons aux fonctions quelconques monotones par segments. Désignons toujours par a_i, b_i les extrémités de E_i^* .

Etablissons maintenant une correspondance biunivoque $y = \chi(x)$ entre $E (x \in E)$ et le sous-ensemble $F (y \in F)$ de l'intervalle $[0, 2h - 1]$ de la manière suivante:

1°. Si E_i^* est borné et contient plus d'un point,

$$y = \frac{x + 2(i-1)b_i - (2i-1)a_i}{b_i - a_i}, \quad x \in E_i^*.$$

2°. Si E_i^* contient un seul point, y est égal à $2i - 2$ pour cette valeur de x .

3°. Si E_1^* n'est pas borné ($a = -\infty$),

$$y = \frac{1}{1 + b_1 - x}, \quad x \in E_1^*.$$

4°. Si E_h^* n'est pas borné ($b = +\infty$),

$$y = 2h - 1 - \frac{1}{x + 1 - a_h}, \quad x \in E_h^*.$$

La fonction $\chi(x)$ est uniforme et croissante sur E et sa fonction inverse $\chi^{-1}(x)$ est uniforme et croissante sur F .

Définissons la fonction $g(x)$ sur F par la formule

$$g(x) = f(\chi^{-1}(x)), \quad x \in F.$$

Nous avons alors

$$f(x) = g(\chi(x)), \quad x \in E.$$

La correspondance entre E et F établit une correspondance entre E_i^* et un sous-ensemble F_i^* de F .

On voit immédiatement que $g(x)$ est monotone par segments et la décomposition canonique de F est précisément

$$F_1^*, F_2^*, \dots, F_h^*.$$

Les nombres a_i correspondant aux décompositions canoniques de E pour $f(x)$ et de F pour $g(x)$ sont les mêmes. Les fonctions $f(x), g(x)$ sont du même ordre $(0 | k)$ et ont la même caractéristique h .

8. Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ soit bornée, alors $g(x)$, qui prend les mêmes valeurs, est aussi bornée. Considérons la fonction prolongée $g_1(x)$ tel que nous l'avons expliqué au Nr. 4. Alors $g_1(x)$ est, dans l'intervalle $[0, 2h - 1]$, de même ordre $(0 | k)$ que la fonction $f(x)$. Démontrons plus exactement que

Théorème 5. La fonction $g_1(x)$ est normale, du type minimum et d'ordre $(0 | k)$ dans l'intervalle $[0, 2h - 1]$.

Si nous considérons la décomposition canonique de $[0, 2h - 1]$ pour $g_1(x)$ nous voyons que chaque terme de cette décomposition doit contenir l'un au moins des intervalles $(i, i + 1)$, $i = 0, 1, \dots, 2h - 2$. La fonction $g_1(x)$ est donc normale. Les nœuds ne peuvent être que des points $i = 1, 2, \dots, 2h - 2$. Le point i ne peut être un nœud que si $g_1(x)$ est de monotonie opposée dans les intervalles $(i - 1, i)$, $(i, i + 1)$, par suite de la construction de la fonction $g_1(x)$. En effet, la fonction $g_1(x)$ est monotone dans les intervalles $(i - 1, i]$, $[i, i + 1)$. La fonction $g_1(x)$ est donc du type minimum en vertu du théorème 1.

Retenons les formules

$$g_1(x) = f(\chi^{-1}(x)), \quad x \in F,$$

$$f(x) = g_1(\chi(x)), \quad x \in E.$$

9. Un polynôme $P(x)$ est toujours monotone par segments. Il est donc toujours normale, et du type minimum. Un polynôme de degré h est au plus d'ordre $(0 | h - 1)$.

Théorème 6. Si $P(x)$ est un polynôme d'ordre $(0 | k)$ et $\varphi(x)$ une fonction non-décroissante sur E , la fonction $P(\varphi(x))$ est monotone par segments et d'ordre au plus égal à $(0 | k)$ sur E .

En effet, dans le cas contraire, on peut trouver $k + 3$ points $x_1 < x_2 < \dots < x_{k+3}$ de E tels que la suite

$$\Delta_1^1(P(\varphi)), \Delta_1^2(P(\varphi)), \dots, \Delta_1^{k+2}(P(\varphi))$$

présente $k + 1$ variations. Dans cette hypothèse $\Delta_1^1(P(\varphi)) \neq 0$, donc

$$\Delta_1^i(P(\varphi)) = \frac{P(\varphi(x_{i+1})) - P(\varphi(x_i))}{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)} \Delta_1^i(\varphi), \quad \Delta_1^i(\varphi) > 0, \\ i = 1, 2, \dots, k + 2.$$

Il en résulterait que $P(x)$ soit d'ordre $(0 | k + 1)$ au moins, ce qui est impossible.

Le but de ce travail est précisément de démontrer la réciproque de cette propriété.

10. Nous allons démontrer d'abord le

Théorème 7. Toute fonction $f(x)$, monotone par segments, bornée, normale, du type minimum et de caractéristique h dans l'intervalle E est de la forme $Q(\varphi(x))$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré h et $\varphi(x)$ une fonction non-décroissante dans l'intervalle E .

Pour démontrer cette propriété soient

$$b_1 < b_2 < \dots < b_{h-1}$$

les nœuds de la fonction $f(x)$. La fonction est alternativement non-décroissante et non-croissante dans les intervalles E_i^* de la décomposition canonique. De plus il existe un nombre positif M tel que

$$|f(x)| < M, \quad x \in E.$$

Nous allons faire maintenant une hypothèse restrictive. Supposons qu'on puisse trouver un polynôme $P(x)$ de degré h ayant tous ses zéros réels et compris à l'intérieur de l'intervalle E et ayant les nœuds b_i comme zéros de sa dérivée $P'(x)$. Les nombres

$$P(b_1), P(b_2), \dots, P(b_{h-1})$$

sont alors tous non nuls et alternativement positifs ou négatifs.

Prenons un nombre λ tel que

1°. $\lambda P(b_1) > 0$, ou $\lambda P(b_1) < 0$ suivant que la fonction $f(x)$ est non-décroissante ou non-croissante sur E_1^* .

2°. $|\lambda P(b_i)| > M, \quad i = 1, 2, \dots, h-1$.

Posons $Q(x) = \lambda P(x)$. Le polynôme $Q(x)$ prend sur E_i^* ($2 \leq i \leq h-1$) toutes les valeurs de $f(x)$ sur E_i^* et une seule fois chacune de ces valeurs. Si $x_0 \in E_i^*$ nous prenons alors $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_1 \in E_i^*$ tel que $Q(x_1) = f(x_0)$. De même $Q(x)$ prend dans $(-\infty, b_1)$ (fermé ou ouvert à droite suivant que b_1 appartient ou non à E_1^*) une seule fois chaque valeur de $f(x)$ dans E_1^* . Pour un $x_0 \in E_1^*$ nous prenons encore $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_1 \in (-\infty, b_1)$ tel que $Q(x_1) = f(x_0)$. On procède de la même manière dans E_h^* .

On voit que de cette façon si $x_0 < x'_0$ sont deux points de E on a $\varphi(x_1) \leq \varphi(x'_1)$. La fonction $\varphi(x)$ est donc non-décroissante.

Débarassons-nous maintenant de l'hypothèse restrictive que les b_i sont les zéros de la dérivée du polynôme.

Pour cela considérons un polynôme $P(x)$ de degré h ayant tous ses zéros réels compris à l'intérieur de E et soient $x_1 < x_2 < \dots < x_{h-1}$ les zéros de la dérivée $P'(x)$. Considérons maintenant la fonction $\psi(x)$ définie au Nr. 6 ($I \equiv E$) et soit

$$f^*(x) = f(\psi^{-1}(x)), \quad x \in E.$$

Nous pouvons alors choisir $Q(x) = \lambda P(x)$ et la fonction non-décroissante $\varphi_1(x)$ tel que

$$Q(\varphi_1(x)) = f^*(x), \quad x \in E.$$

Nous en déduisons

$$Q(\varphi_1(\psi(x))) = f^*(\psi(x)) = f(x), \quad x \in E.$$

La fonction $\varphi(x) = \varphi_1(\psi(x))$ est encore non-décroissante et le théorème 7 est complètement démontré.

11. Nous pouvons démontrer maintenant notre théorème fondamental

Théorème 8. Toute fonction $f(x)$ bornée et d'ordre $(0|k)$ sur l'ensemble E est de la forme $Q(\varphi(x))$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $k+1$ et $\varphi(x)$ une fonction non-décroissante sur E .

Pour démontrer cette propriété revenons aux fonctions $g(x)$, $g_1(x)$ définies au No. 7. La fonction $g_1(x)$ satisfait aux conditions de théorème 7. Cette fonction étant de caractéristique $k+1$ on peut trouver un polynôme $Q(x)$ de degré $k+1$ et une fonction $\varphi_1(x)$ non-décroissante dans $[0, 2h-1]$ tels que

$$Q(\varphi_1(x)) = g_1(x), \quad x \in [0, 2h-1].$$

Mais

$$g_1(x) = f(\chi^{-1}(x)), \quad x \in F,$$

donc

$$Q(\varphi_1(x)) = f(\chi^{-1}(x)), \quad x \in F$$

et

$$Q(\varphi_1(\chi(x))) = f(x), \quad x \in E.$$

Il suffit de prendre $\varphi(x) = \varphi_1(\chi(x))$ et le théorème est démontré.

12. L'équation

$$Q(\varphi(x)) = f(x)$$

est vérifiée par une infinité de polynôme et une infinité de fonctions non-décroissantes $\varphi(x)$.

On peut facilement voir qu'on peut choisir pour $\varphi(x)$ une fonction bornée.

On aurait pu faire la démonstration du théorème 8 directement sans passer par les transformations $y = \psi(x)$ et $y = \chi(x)$ et sans utiliser le prolongement, mais nous avons préféré d'établir en même temps quelques propriétés des fonctions monotones par segments.

L'hypothèse que la fonction soit bornée n'est pas nécessaire. Il est facile de voir que le théorème 8 reste vrai pour toute fonction d'ordre $(0|k)$ qui est bornée sauf peut être aux voisinages des extrémités de E qui n'appartiennent pas à E .

Ainsi le théorème s'applique, par exemple, à la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1+x}, & x \in (-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ \frac{2x-1}{1-x}, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

qui est d'ordre $(0|2)$, mais ne s'applique pas à la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

qui est d'ordre $(0|1)$.

13. Nous allons compléter un peu le théorème 8, dans le cas où la fonction $f(x)$ est continue. De notre démonstration ne résulte pas qu'on peut alors choisir la fonction $\varphi(x)$ continue sur E . Nous démontrerons que

Théorème 9. *Toute fonction $f(x)$ bornée continue et d'ordre $(0|k)$ sur E est de la forme $Q(\varphi(x))$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $k+1$ et $\varphi(x)$ une fonction continue et non-décroissante sur E ¹⁾.*

On voit facilement qu'il suffit de faire la démonstration dans le cas où E se réduit à un intervalle. En effet, la fonction prolongée $g_1(x)$ est aussi continue. Dans le cas d'un intervalle $f(x)$ est normale et du type minimum.

Remarquons, en passant, que le théorème 9 restera vrai pour certaines fonctions non-bornées, comme le théorème 8 (voir le No. précédent).

Démontrons donc le théorème 9 dans le cas où E est un intervalle.

Si $b_1 < b_2 < \dots < b_k$ sont les nœuds de la fonction $f(x)$, en examinant la démonstration du théorème 7, nous voyons que le théorème 9 est exact si on peut trouver un polynôme $Q(x)$ de degré $k+1$ tel que l'on ait

$$Q(b_i) = f(b_i), \quad Q'(b_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

En passant maintenant par la transformation du No. 6, on voit que le théorème 9 sera complètement démontré si nous démontrons le théorème suivant:

Théorème 10. *Etant donnés k nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ tels que*

$$\lambda_1 > \lambda_2, \lambda_2 < \lambda_3, \lambda_3 > \lambda_4, \dots$$

ou

$$\lambda_1 < \lambda_2, \lambda_2 > \lambda_3, \lambda_3 < \lambda_4, \dots$$

on peut trouver un polynôme $P(x)$ de degré $k+1$ tel que si $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ sont les zéros (supposés tous réels) de la dérivée $P'(x)$, on ait

$$P(x_i) = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

14. Montrons d'abord que le théorème 10 résulte du lemme suivant:

Lemme 4. *Etant donnés $k-1$ nombres positifs $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ on peut toujours trouver k nombres $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ tels que l'on ait*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |R(x)| dx = \varrho p_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

où $R(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)$ et ϱ est un nombre positif.

¹⁾ C'est la réponse à une question qui m'a été posé par M. le Prof. S. Stoilow. C'est d'ailleurs ce problème qui m'a déterminé d'entreprendre l'étude des fonctions d'ordre n par segments.

En effet, prenons

$$p_i = |\lambda_i - \lambda_{i+1}|, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

et déterminons le polynôme $R(x)$ du lemme 4. Nous avons

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |R(x)| dx = (-1)^{k-i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} R(x) dx = \varrho |\lambda_i - \lambda_{i+1}|,$$

$$i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Prenons maintenant $\mu = \pm \frac{(-1)^{k-1}}{\varrho}$ suivant que $\lambda_2 - \lambda_1$ est positif

ou négatif. Nous avons

$$\mu \int_{x_i}^{x_{i+1}} R(x) dx = \lambda_{i+1} - \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

et le polynôme

$$P(x) = \mu \int_{x_1}^x R(x) dx + \lambda_1$$

vérifie le théorème 10.

15. Il reste à démontrer le lemme 4. Pour cela nous démontrerons la propriété plus générale suivante, qui d'ailleurs présente un intérêt par elle-même,

Théorème 11. *Soient donnés:*

1°. $k-1$ nombres positifs $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ ($k \geq 3$).

2°. Une fonction $q(x)$ continue et positive dans l'intervalle ouvert (a, b) .

3°. Deux points x_1, x_k , $x_1 < x_k$ de l'intervalle (a, b) .

On peut toujours trouver $k-2$ autres points $x_2, x_3, \dots, x_{k-1}$ tels que l'on ait:

I. $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

II.

$$A_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) |R(x)| dx = \varrho p_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

où $R(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)$ et ϱ est un nombre positif.

Le lemme 4 s'obtient en prenant $q(x) = 1$ et x_1, x_k arbitrairement ($x_1 < x_k$).

Occupons-nous maintenant du théorème 11.

Le théorème 11 est un *théorème d'existence*. Nous allons lui attacher un *théorème d'unicité* et un *théorème de continuité*.

Le théorème d'unicité est le suivant:

Théorème 12. Si les nombres positifs $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$, la fonction $q(x)$ positive et continue dans l'intervalle (a, b) et les points $x_1, x_k, x_1 < x_k$ de (a, b) sont donnés, il existe un seul système de $k-2$ nombres $x_2, x_3, \dots, x_{k-1}$ tels que les conditions I et II du théorème 11 soient vérifiées.

Le théorème de continuité s'énonce de la manière suivante:

Théorème 13. Soient $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, k-1$ nombres positifs et $q(x)$ une fonction continue positive dans l'intervalle (a, b) . Prenons k points $x_1, x_2, \dots, x_k$ de l'intervalle (a, b) vérifiant les conditions I et II du théorème 11. Alors si x_1 reste fixe, $x_2, x_3, \dots, x_{k-1}$ sont des fonctions continues de x_k et ont des dérivées continues par rapport à x_k dans l'intervalle (x_1, b) .

Pour faire les démonstrations nous allons procéder par induction complète en démontrant les lemmes suivants:

Lemme 5. Le théorème 13 de continuité est une conséquence du théorème 12 d'unicité.

Lemme 6. Les théorèmes 11 et 12 sont vrais pour $k=3$.

Lemme 7. Le théorème d'existence et le théorème d'unicité pour $k+1$ sont des conséquences des théorèmes 11, 12 et 13 pour k .

Les théorèmes 11, 12, 13 sont alors complètement démontrés. En effet, si nous supposons qu'ils soient vrais pour k nous en déduisons, du lemme 7, que les théorèmes 11 et 12 sont vrais pour $k+1$. Le théorème 13 pour $k+1$ résulte alors du lemme 5.

Pour $k=3$ le théorème 13 résulte des lemmes 5 et 7.

Il reste à démontrer les lemmes 5, 6 et 7.

16. Première partie de la démonstration du lemme 5. Dans les deux théorèmes 12 et 13 nous supposons, bien entendu, qu'il s'agit des mêmes nombres p_i et de la même fonction $q(x)$.

Pour démontrer la continuité des fonctions $x_2, x_3, \dots, x_{k-1}$ par rapport à x_k il faut et il suffit de démontrer que si $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ est une solution du problème exprimé par le théorème 11 et si

$$(11) \quad x_1 = x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_k^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

est une suite infinie de solutions du problème telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_k$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = x_i', \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad (x_i' = x_2),$$

on a

$$(12) \quad x_i' = x_i, \quad i = 2, 3, \dots, k-1.$$

Pour cela il suffit de démontrer que

$$(13) \quad x_1 < x_2' < \dots < x_{k-1}' < x.$$

En effet, si $\varrho^{(n)}$ sont les nombres ϱ correspondant aux solutions (11), du fait que $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ sont des fonctions continues de $x_2, x_3, \dots, x_k$, il résulte que si nous avons (13) $\varrho^{(n)}$ tend vers une limite positive pour $n \rightarrow \infty$. Donc (13) est une solution du problème et du théorème 12 il résulte que nous avons (12).

Il reste à montrer que nous avons les inégalités (13), donc que deux points consécutifs x_i' ne peuvent pas coïncider. Ceci résulte facilement du lemme suivant:

Lemme 8. Si $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ est une solution du problème exprimé par les conditions I et II du théorème 11 et si $a < a_1 \leq x_1 < x_k \leq b_1 < b$, nous avons

$$x_{i+1} - x_i > \mu (x_k - x_1)^{k+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

où μ est un nombre indépendant des points x_i . (μ dépend uniquement de a_1, b_1 des nombres p_i et de la fonction $q(x)$).

Remarquons, en effet, que

$$\frac{\min(p_1, p_2, \dots, p_{k-1})}{p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}} = p > 0,$$

$$m_1 = \max_{[a_1, b_1]} q(x) > 0, \quad m_2 = \min_{[a_1, b_1]} q(x) > 0,$$

$$|R(x)| < (b_1 - a_1)^k, \quad x \in (a_1, b_1),$$

$$\int_{x_1}^{x_k} |R(x)| dx \geq \frac{(x_k - x_1)^{k+1}}{2^{2k}} \cdot 1.$$

Il en résulte que

$$p \leq \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}} = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) |R(x)| dx}{\int_{x_1}^{x_k} q(x) |R(x)| dx} < \frac{2^{2k} m_1 (b_1 - a_1)^k (x_{i+1} - x_i)}{m_2 (x_k - x_1)^{k+1}}.$$

¹⁾ Ce minimum s'obtient en cherchant le polynôme $P(x) = x^k + \dots$, de degré k , minimisant l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_k} |P(x)| dx.$$

Voir: M. Fujiwara. *Über die Polynome von der kleinsten totalen Schwankung*, The Tôhoku Math. Journal, 3, 129-136 (1913).

Il suffit donc de prendre

$$\mu = \frac{m_2 p}{2^{2k} m_1 (b_1 - a_1)^k}.$$

17. Deuxième partie de la démonstration du lemme 5. Nous allons montrer que la dérivabilité est encore une conséquence de la continuité et de l'unicité, donc de l'unicité seule.

Avec nos notations précédentes, les fonctions $x_2, x_3, \dots, x_{k-1}$ sont données par le système d'équations

$$(14) \quad B_i = p_i A_i - p_i A_1 = 0, \quad i = 2, 3, \dots, k-1.$$

Les A_i , donc aussi les premiers membres des équations (14), sont continues et admettent des dérivées partielles continues par rapport aux variables $x_2, x_3, \dots, x_k$, comme on le vérifie facilement.

Démontrons d'abord la propriété plus générale suivante:

Lemme 9. Si:

1°. $F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ sont n fonctions continues et admettant des dérivées partielles continues par rapport aux variables $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ dans le domaine

$$a < x < b, \quad a < y_i < b, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2°. A chaque $x_0 \in (a, b)$ correspond une solution unique $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ du système

$$(15) \quad F_i(x_0, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

3°. Les fonctions $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ déterminées par le système (15) sont continues dans (a, b) .

4°. Nous avons

$$\left[\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right]_{x=x_0} \neq 0.$$

Alors les fonctions $y_i(x)$ sont dérivables au point x_0 et ces dérivées sont continues dans tout intervalle où la condition 4° est vérifiée.

La démonstration de ce lemme résulte facilement du fait que si nous posons $x = x_0 + \Delta x$ et

$$\Delta y_i = y_i(x_0 + \Delta x) - y_i(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

par suite de l'unicité, la solution du système

$$F_i(x_0 + \Delta x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

est précisément

$$y_i = y_i^0 + \Delta y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

On achève la démonstration, comme d'habitude, en appliquant, par exemple, la formule des accroissements finis et en remarquant que, par suite de la continuité, $\Delta y_i \rightarrow 0$ pour $\Delta x \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Il en résulte que pour que le lemme 5 soit complètement démontré il suffit de montrer que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(B_2, B_3, \dots, B_{k-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_{k-1})}$$

est différent de zéros, $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, étant une solution du problème 11.

18. Troisième et dernière partie de la démonstration du lemme 5. Posons

$$(16) \quad a_{i,j} = \begin{cases} -\frac{\partial A_i}{\partial x_j}, & j = 2, 3, \dots, i \text{ (aucun si } i = 1), \\ \frac{\partial A_i}{\partial x_j}, & j = i+1, i+2, \dots, k-1 \text{ (aucun si } i = k-1). \end{cases}$$

Nous avons alors

$$(17) \quad \frac{D(B_2, B_3, \dots, B_{k-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_{k-1})} =$$

$$= p_1^{k-3} \begin{vmatrix} p_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1,k-2} & a_{1,k-1} \\ p_2 & -a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \dots & a_{2,k-2} & a_{2,k-1} \\ p_3 & -a_{3,2} & -a_{3,3} & a_{3,4} & \dots & a_{3,k-2} & a_{3,k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k-2} & -a_{k-2,2} & -a_{k-2,3} & -a_{k-2,4} & \dots & -a_{k-2,k-2} & -a_{k-2,k-1} \\ p_{k-1} & -a_{k-1,2} & -a_{k-1,3} & -a_{k-1,4} & \dots & -a_{k-1,k-2} & -a_{k-1,k-1} \end{vmatrix}.$$

Mais, un calcul simple nous montre que

$$(18) \quad a_{i,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \left| \frac{R(x)}{x - x_j} \right| dx, \quad j = 2, 3, \dots, k-1, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

et on vérifie, en passant, que les dérivées partielles sont continues par rapport aux variables $x_2, x_3, \dots, x_k$.

On voit que nous avons les inégalités suivantes:

$$(19) \quad \begin{cases} a_{i,j} > 0, & j = 2, 3, \dots, k-1, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \\ a_{i,i+1} > a_{i,i+2} > \dots > a_{i,k-1}, & i = 1, 2, \dots, k-3, \\ a_{i,2} < a_{i,3} < \dots < a_{i,i}, & i = 3, 4, \dots, k-1. \end{cases}$$

Le déterminant du second membre de la formule (17) peut s'écrire (au signe $(-1)^{k-2}$ près),

$$(20) \begin{vmatrix} c_{1,1} & -c_{1,2} & -c_{1,3} & \dots & -c_{1,k-2} & p_1 \\ -c_{2,1} & c_{2,2} & -c_{2,3} & \dots & -c_{2,k-2} & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_{k-2,1} & -c_{k-2,2} & -c_{k-2,3} & \dots & -c_{k-2,k-2} & p_{k-2} \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & \dots & -c_{k-2} & p_{k-1} \end{vmatrix}$$

où les p_i , $c_{i,j}$, c_i sont positifs et

$$(21) \quad c_{i,i} \geq c_{i,1} + c_{i,2} + \dots + c_{i,i-1} + c_{i,i+1} + \dots + c_{i,k-2} \\ i = 1, 2, \dots, k-2$$

(ici d'ailleurs les signes $>$ sont valables). Nous obtenons ce résultat en retranchant successivement les éléments d'une colonne de ceux de la colonne suivante et en tenant compte des inégalités (19).

La propriété que nous cherchons est alors un cas particulier de la propriété plus générale suivante:

Lemme 10. Si les nombres p_i , $c_{i,j}$, c_i sont positifs et si les inégalités (21) sont vérifiées, le déterminant (20) est positif¹⁾.

La démonstration de cette propriété est bien simple et peut se faire par induction. Pour $k=3$ la propriété est immédiate. Supposons-la vraie pour $k-1$ et démontrons-la pour k . Considérons le déterminant (20) comme fonction de $c_{1,1}$, $c_{2,2}$, ..., $c_{k-2,k-2}$. Le coefficient de $c_{i,i}$ est un déterminant analogue d'ordre $k-2$, donc est positif. Comme le déterminant est une fonction linéaire de $c_{i,i}$ il reste à démontrer que ce déterminant est positif si nous prenons le signe $=$ dans toutes les formules

(21). Mais, dans ce cas, il se réduit au produit de $(-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{k-2} c_i$ par le mi-

neur du dernier élément de la première colonne. Ce mineur est, au signe $(-1)^{k-3}$ près, un déterminant analogue d'ordre $k-2$. Le lemme 10 est donc démontré.

La propriété reste encore vraie dans l'un des cas:

$$1^\circ. \quad c_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-2, \quad \sum_{i=1}^{k-2} c_i > 0.$$

¹⁾ Cette propriété est analogue à un lemme, bien connu, de H. Minkowski. D'ailleurs le mineur du dernier élément est précisément un déterminant de Minkowski (si les signes $>$ sont valables dans (21)). Voir aussi: G. Scorza, *A proposito di un lemma di Minkowski*, Boll. Un. Mat. It., 5, 229—231 (1926).

2°. $c_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-2$, pourvu que dans (21) l'une au moins des inégalités $>$ soit valable.

3°. $c_{i,j} > 0$, $c_i > 0$, $p_{k-1} = 0$, $p_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, k-2$ ¹⁾.

19. Avant de passer à la démonstration des lemmes 6 et 7, nous allons encore tirer une conclusion du lemme 5.

Lemme 11. Les expressions $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ regardées comme fonctions de x_k sont continues et croissantes.

En effet, substituons dans $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ les fonctions dérivables $x_2, x_3, \dots, x_{k-1}$ par leurs valeurs en fonction de x_k .

Le système de définition (14) nous montre que

$$(22) \quad p_1 \frac{dA_i}{dx_k} = p_i \frac{dA_1}{dx_k}, \quad i = 2, 3, \dots, k-1.$$

Il en résulte que l'une des dérivées $\frac{dA_i}{dx_k}$ ne peut s'annuler sans que toutes soient nulles. Mais ce dernier cas est impossible. En effet si

$$\frac{dA_i}{dx_k} = \frac{\partial A_i}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_k} + \frac{\partial A_i}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_k} + \dots + \frac{\partial A_i}{\partial x_{k-1}} \cdot \frac{dx_{k-1}}{dx_k} + \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, k-1,$$

il faudrait que

$$(23) \quad \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} \\ -a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{k-1,2} & -a_{k-1,3} & \dots & -a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} \end{vmatrix} = 0$$

en étendant les notations (16) et (18) à $j=k$.

Mais les inégalités (19) se complètent par les suivantes:

$$a_{i,k} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad a_{i,k-1} > a_{i,k}, \quad i = 1, 2, \dots, k-2$$

Alors le premier membre de (23) se transforme, comme plus haut, en un déterminant positif (déterminant de Minkowski).

De (22) il résulte que les dérivées $\frac{dA_i}{dx_k}$ sont toujours de même signe.

Il en résulte que les fonctions A_i sont strictement monotones donc, comme il est à peu près évident, sont croissantes et le lemme 11 est démontré.

¹⁾ Si nous admettons le lemme de Minkowski, le lemme 10 ainsi que d'autres propriétés analogues, comme 1°, 2° ou 3°, résultent simplement par récurrence en développant le déterminant suivant la dernière ligne.

20. *Démonstration du lemme 6.* Pour $k = 3$ il suffit d'examiner le rapport $\frac{A_1}{A_2}$. On vérifie facilement que A_1 est une fonction de x_2 continue, positive et croissante dans (x_1, x_3) et A_2 est une fonction de x_2 continue, positive et décroissante dans (x_1, x_3) . Il en résulte que le rapport $\frac{A_1}{A_2}$ est continue positive et croissante. Mais ce rapport tend vers 0 si $x_2 \rightarrow x_1$ et tend vers $+\infty$ si $x_2 \rightarrow x_3$. Les théorèmes 11 et 12 en résultent.

21. *Première partie de la démonstration du lemme 7.*

Supposons que les théorèmes 11, 12 et 13 soient vrais pour k ($k \geq 3$).

Considérons les points x_1, x_{k+1} , $a < x_1 < x_{k+1} < b$, soient $p_1, p_2, \dots, p_k$ k nombres positifs et $q(x)$ une fonction continue et positive dans (a, b) . Si nous prenons un point x_k , $x_1 < x_k < x_{k+1}$ nous pouvons déterminer les points $x_2 < x_3 < \dots < x_{k-1}$ compris entre x_1, x_k tels que

$$A_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q_1(x) |R(x)| dx = \rho p_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

où $R(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$ et $q_1(x) = q(x)(x_{k+1} - x)$.

La somme $A_1 + A_2 + \dots + A_{k-1}$ est une fonction continue positive et croissante de x_k dans l'intervalle (x_1, x_{k+1}) . Cette fonction tend vers 0 lorsque $x_k \rightarrow x_1$.

Considérons maintenant l'expression

$$A_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} q_1(x) |R(x)| dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} q(x)(x_{k+1} - x) |R(x)| dx.$$

C'est aussi une fonction continue et dérivable de x_k . Calculons sa dérivée $\frac{dA_k}{dx_k}$ par rapport à x_k . Nous avons

$$\frac{dA_k}{dx_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_k} + \frac{\partial A_k}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_k} + \frac{\partial A_k}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_k} + \dots + \frac{\partial A_k}{\partial x_{k-1}} \cdot \frac{dx_{k-1}}{dx_k}.$$

Faisant usage de la notation (14) nous avons (ici nous supposons, bien entendu, que $q(x)$ est remplacé par $q_1(x)$),

$$(24) \quad \frac{dA_k}{dx_k} = \frac{D(B_2, B_3, \dots, B_{k-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_{k-1})} = \frac{D(B_2, B_3, \dots, B_{k-1}, A_k)}{D(x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k)}.$$

Nous savons que

$$(-1)^{k-2} \frac{D(B_2, B_3, \dots, B_{k-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_{k-1})} > 0.$$

Le déterminant du second membre de la formule (24) s'écrit

$$p_1^{k-3} \begin{vmatrix} p_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,k} \\ p_2 & -a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k-1} & -a_{k-1,2} & -a_{k-1,3} & \dots & a_{k-1,k} \\ 0 & -a_{k,2} & -a_{k,3} & \dots & -a_{k,k} \end{vmatrix}$$

en employant encore les notations (16) pour $j = 2, 3, \dots, i$ et $j = i + 1, i + 2, \dots, k$ respectivement et aussi $i = 1, 2, \dots, k$ (en prenant $q_1(x)$ au lieu de $q(x)$). Nous avons encore

$$a_{i,i+1} > a_{i,i+2} > \dots > a_{i,k}, \quad i = 1, 2, \dots, k-2,$$

$$a_{i,2} < a_{i,3} < \dots < a_{i,i}, \quad i = 3, 4, \dots, k.$$

Il en résulte, comme plus haut, que le déterminant a le signe de $(-1)^{k-1}$. De (24) il résulte donc que

$$\frac{dA_k}{dx_k} < 0.$$

La fonction A_k est donc décroissante. Elle tend évidemment vers zéro pour $x_k \rightarrow x_{k+1}$.

Le rapport

$$(25) \quad \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{k-1}}{A_k}$$

est donc une fonction continue positive et croissante de x_k dans (x_1, x_{k+1}) et tend vers 0 pour $x_k \rightarrow x_1$ et vers $+\infty$ pour $x_k \rightarrow x_{k+1}$. Le théorème d'existence 11 en résulte pour $k + 1$.

22. *Deuxième et dernière partie de la démonstration du lemme 7.* De ce qui précède il résulte que le rapport (25) atteint la valeur

$$\frac{p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}}{p_k}$$

pour une seule valeur de x_k . Si donc

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1},$$

$$x_1 < x'_2 < \dots < x'_{k-1} < x_k < x_{k+1},$$

serait deux solutions du problème, les

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k,$$

$$x_1 < x'_2 < \dots < x'_{k-1} < x_k,$$

constituerait deux solutions du problème pour k (en prenant $q_1(x)$ au lieu de $q(x)$). Mais, par suite de l'unicité,

$$x'_i = x_i, \quad i = 2, 3, \dots, k-1,$$

ce qui démontre la propriété.

23. Par ce qui précède le théorème 9 est complètement démontré.

Pour finir faisons une application.

Une fonction $f(x)$ est dite d'ordre n sur E si sa différence divisée d'ordre $n+1$, $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$, ne change pas de signe sur E . Une telle fonction est toujours continue sur tout sous-ensemble complètement intérieur à E et ne peut être non bornée qu'aux voisinages des extrémités de E qui n'appartiennent pas à E . Une fonction d'ordre n est toujours monotone par segments et du type minimum. Elle est au plus d'ordre $(0 | n)$. Nous avons donc la propriété suivante:

Théorème 14. *Toute fonction d'ordre n sur E est de la forme $Q(\varphi(x))$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à $n+1$ et $\varphi(x)$ une fonction non-décroissante sur E , continue sur tout sous-ensemble complètement intérieur à E .*

Si $f(x)$ est définie dans un intervalle et est convexe d'ordre n on peut même choisir une fonction croissante $\varphi(x)$.

București, 27 avril 1942.