

NOTES SUR LES GÉNÉRALISATIONS DES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR (III)¹⁾

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Note présentée par Mr. S. Stoilow, Mc. A. R. das la séance du 9 janvier 1942

LES FONCTIONS D'ORDRE $(n | k)$ ET LES FONCTIONS D'ORDRE n
PAR SEGMENTS

1. Dans la note précédente²⁾ nous avons défini les fonctions d'ordre n par segments. Nous allons montrer maintenant qu'il y a une étroite liaison entre ces fonctions et les fonctions d'ordre $(n | k)$ que nous avons étudié dans la note I de cette série³⁾. Nous allons voir, en effet, que toute fonction d'ordre n par segments est d'un certain ordre $(n | k)$ déterminé et, réciproquement, toute fonction d'ordre $(n | k)$ est d'ordre n par segments.

2. Démontrons d'abord le

Théorème 1. *Toute fonction d'ordre n par segments et de caractéristique h est au plus d'ordre $(n | (h-1)(n+2))$.*

Soit $e = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ une suite finie (et ordonnée) de l'ensemble E de définition de la fonction. On peut supposer que parmi ces points au plus $2(n+1)$ appartiennent à chacun des sous-ensembles E_i^* de la décomposition canonique. Autrement, en effet, e est certainement réductible.

Si nous avons $s > 1$, $x_{j-1} \in E_i^*$, $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n+s} \in E^*$, $x_{j+n+s+1} \in E_{i+1}^*$, la suite

$$\Delta_{n+1}^j(f), \Delta_{n+1}^{j+1}(f), \dots, \Delta_{n+1}^{j+s-1}(f)$$

ne présente pas de variations. Ceci nous montre que le cas le moins avantageux est si $m = h(n+2)$, $x_{(i-1)(n+2)+j} \in E_i^*$, $j = 1, 2, \dots, n+2$, $i = 1, 2, \dots, h$ et si la suite d_{n+1} de e présente le nombre

¹⁾ Cette note a été sous presse dans le Bulletin de la Faculté des Sciences de Cernăuți en Juin 1940. Ayant réussi à retrouver le manuscrit je le publie maintenant sans modifications.

²⁾ Bulletin de la Sec. Sci. de l'Acad. Roumaine t. 22.

³⁾ Disquisitiones Mathematicae et Physicae, 1, 35—42, 1940.

maximum de variations possibles. En effet, si on ajoute encore des points à un tel e on n'élève pas le nombre des variations de la suite d_{n+1} . La suite d_{n+1} de e a alors $h(n+2) - n - 1$ termes et présente donc au plus $(h-1)(n+2)$ variations.

Démontrons maintenant le

Théorème 2. *Toute fonction d'ordre n par segments et de caractéristique h est au moins d'ordre $(n | h-1)$.*

Nous faisons la démonstration par induction sur le nombre h . Pour $h=1$ la propriété est évidente car la fonction est alors d'ordre n sur E . Pour $h=2$, la fonction n'est pas d'ordre n , on peut donc trouver deux différences divisées $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$, $[x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+2}; f]$ non nulles et de signes contraires. De la formule de la moyenne des différences divisées il résulte immédiatement que la suite d_{n+1} de la réunion des points x_i, x'_i présente au moins une variation.

Examinons le cas $h > 2$. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à $h-1$ et démontrons-la pour h . La fonction étant de caractéristique $h-1$ sur $E - E_h^*$ on peut trouver, par hypothèse, la suite $\{x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}\}$, $x_i \in E - E_h^* - E_{h-1}^*$, $i=1, 2, \dots, r$, $x_{r+i} \in E_{h-1}^*$, $i=1, 2, \dots, r'$ telle que la suite d_{n+1} correspondante présente au moins $h-2$ variations. Il se peut, bien entendu, que $r'=0$, alors tous les $x_i \in E - E_h^* - E_{h-1}^*$. La fonction étant de caractéristique 2 sur $E_{h-1}^* + E_h^*$, on peut trouver la suite $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_s, x'_{s+1}, \dots, x'_{s+s'}\}$ telle que $x'_i \in E_{h-1}^*$, $i=1, 2, \dots, s$, $x'_{s+i} \in E_h^*$, $i=1, 2, \dots, s'$ et la suite d_{n+1} correspondante présente au moins une variation. Ici $s \geq 1$, $s' \geq 1$, $s+s' \geq n+3$, d'après la propriété qui caractérise une décomposition propre. Parmi les points x_i, x'_i appartenant à E_{h-1}^* il y a s'' distincts, $r'+s \geq s'' \geq \max(r', s)$. Désignons par e l'ensemble des x_i, x'_i distincts appartenant à $E - E_h^*$ et par e' l'ensemble des x_i, x'_i distincts appartenant à $E_{h-1}^* + E_h^*$. La suite d_{n+1} de la réunion de e et e' est

$$(1) \quad \Delta_{n+1}^1(f), \Delta_{n+1}^2(f), \dots, \Delta_{n+1}^{r+s''+s'-n-1}(f)$$

et alors les suites d_{n+1} de e et de e' sont

$$(2) \quad \Delta_{n+1}^1(f), \Delta_{n+1}^2(f), \dots, \Delta_{n+1}^{r+s''-n-1}(f),$$

$$(3) \quad \Delta_{n+1}^{r+1}(f), \Delta_{n+1}^{r+2}(f), \dots, \Delta_{n+1}^{r+s'+s'-n-1}(f)$$

respectivement. La suite (2) présente au moins $h-2$ variations et la suite (3) au moins une variation. Si les suites (2), (3) n'ont pas de termes communs, la suite (1) présente au moins $h-1$ variations. Si $r'' = s'' - n - 1 \geq 1$, les suites (2), (3) ont les termes communs $\Delta_{n+1}^{r+1}(f), \Delta_{n+1}^{r+2}(f), \dots, \Delta_{n+1}^{r+r''}(f)$ et cette suite ne présente pas de

variations puisqu'elle est la suite d_{n+1} d'une suite de points appartenant à E_{h-1}^* . Il en résulte encore que (1) présente au moins $h-1$ variations. Le théorème 2 est donc démontré.

3. Il reste à montrer que toute fonction d'ordre $(n | k)$ est d'ordre n par segments. Il suffira de démontrer que si la fonction n'est pas d'ordre n par segments, elle n'est pas d'un ordre $(n | k)$ déterminé.

Démontrons d'abord le

Lemme 1. *Si la fonction f n'est pas d'ordre n par segments sur E , on peut décomposer cet ensemble en deux sous-ensembles consécutifs $E^{(1)}, E^{(2)}$ de manière que :*

1° *Sur l'un au moins des ensembles $E^{(1)}, E^{(2)}$ la fonction n'est pas d'ordre n par segments.*

2° *La fonction n'est pas d'ordre n sur les ensembles $E^{(1)}, E^{(2)}$.*

Il est clair que E ne peut être un ensemble fini et que chacun des ensembles $E^{(1)}, E^{(2)}$ doit avoir au moins $n+3$ points. La première partie est évidemment vraie pour toute décomposition en deux sous-ensembles consécutifs. Démontrons donc la seconde partie. Soit E_1, E_2 une décomposition de E en deux sous-ensembles consécutifs, chacun des sous-ensembles ayant au moins $n+3$ points. Si la fonction n'est pas d'ordre n sur E_1 et sur E_2 la propriété est démontrée et on peut prendre $E^{(1)} = E_1, E^{(2)} = E_2$. Supposons le contraire, donc que sur l'un des ensembles E_1, E_2 la fonction soit d'ordre n . Soit, pour fixer les idées, E_1 cet ensemble. Alors E_2 contient une infinité de points et la fonction n'est pas d'ordre n par segments sur cet ensemble. Soit x_0 l'extrémité droite de l'ensemble des $x \in E$ tels que sur l'intersection de E avec l'intervalle (a, x) la fonction soit d'ordre n , a étant l'extrémité gauche de E ($a = \min E$). L'ensemble des x tels que $x_0 > x \in E$ est alors infini. Il est clair qu'il existe un $x_1 > x_0, x_1 \in E$ tel que la fonction ne soit pas d'ordre n par segments sur l'intersection de E avec l'intervalle (x_1, b) , b étant l'extrémité droite de E ($b = \max E$). En prenant comme $E^{(2)}$ ce dernier ensemble et $E^{(1)} = E - E^{(2)}$ le lemme 1 est complètement démontré.

Nous pouvons maintenant démontrer le

Théorème 3. *Si une fonction n'est pas d'ordre n par segments sur E et si k est un nombre naturel, on peut trouver une suite finie de E dont la suite d_{n+1} présente au moins k variations.*

Cette propriété démontre, évidemment, qu'une fonction qui n'est pas d'ordre n par segments ne peut être d'un ordre $(n | k)$ déterminé.

Passons à la démonstration du théorème. Soit $E^{(1)}, E^{(2)}$ une décomposition de E satisfaisant au lemme 1. Désignons par $U^{(1)}$ l'un de ces sous-ensembles sur lequel la fonction n'est pas d'ordre n par segments et soit U_1 l'autre sous-ensemble. Sur U_1 la fonction n'est pas d'ordre n . Nous procédons de la même manière avec $U^{(1)}$ et nous en déduisons un $U_2 \subset U^{(1)}$ sur lequel la fonction n'est pas

d'ordre n , tel que sur $U^{(1)} - U_2 = U^{(2)}$ elle ne soit pas d'ordre n par segments. De $U^{(2)}$ nous déduisons, de la même manière $U_3, U^{(3)}$ et ainsi de suite. Si nous faisons k fois cette opération, nous déduisons les sous-ensembles (sections de E)

$$(4) \quad U_1, U_2, \dots, U_k$$

de E , qui sont disjoints et la fonction n'est d'ordre n sur aucun de ces ensembles. Les ensembles (4), rangés dans un certain ordre

$$U_1^*, U_2^*, \dots, U_k^*$$

donnent une décomposition en sous-ensembles consécutifs de leur somme $U_1 + U_2 + \dots + U_k$.

La fonction n'étant pas d'ordre n sur les U_i^* , on peut trouver une suite finie $e_i \subseteq U_i^*$ dont la suite d_{n+1} présente au moins une variation $i = 1, 2, \dots, k$. Il en résulte que la suite d_{n+1} de $e = e_1 + e_2 + \dots + e_k$ présente au moins k variations.

Le théorème 3 est donc démontré.

Il est clair qu'on peut obtenir une suite partielle de e dont la suite d_{n+1} présente exactement k variations.

Remarque. Dans le cas particulier $n = -1$, il est clair que toute fonction de caractéristique h est d'ordre $(-1 \mid h-1)$ et réciproquement.

4. En nous rapportant aux résultats des notes précédentes, remarquons que si $n = -1$, toute suite maximisante et irréductible a h termes, dont un appartient à chacun des E_i^* de la décomposition canonique. Ce cas ne présente donc pas beaucoup de particularités. Au contraire pour $n \geq 0$ nous pouvons faire d'intéressantes remarques sur les fonctions d'ordre n par segments. Nous allons d'abord examiner le cas $n = 0$, donc le cas des fonctions monotones par segments.

Considérons une décomposition de E

$$(5) \quad E_1, E_2, \dots, E_m,$$

pour une fonction f , monotone par segments et soient a_i, b_i les extrémités (gauche et droite) de E_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

Nous allons considérer maintenant certaines suites finies e_ε de E définies de la manière suivante:

1° Si E_i a un seul point ce point appartient à e_ε .

2° Si E_i a au moins deux points, il a en commun avec e_ε exactement deux points x'_i, y'_i . Si $a_i \in E_i$ on a $x'_i = a_i$ et si a_i n'appartient pas à E_i on a $x'_i - a_i < \varepsilon$. Si $b_i \in E_i$ on a $y'_i = b_i$ et si b_i n'appartient pas à E_i on prend $b_i - y'_i < \varepsilon$.

3°. Le nombre positif ε est assez petit pour que l'on ait $x'_i < y'_i$ et de plus $f(x'_i) \neq f(y'_i)$ si la fonction ne se réduit pas à une constante sur E_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Si E n'est pas borné à gauche ($a_1 = -\infty$), la condition $x'_1 - a_1 < \varepsilon$ doit être remplacée par $x'_1 < -\frac{1}{\varepsilon}$ et si E n'est pas borné à droite ($b_m = +\infty$), la condition $b_m - y'_m < \varepsilon$ doit être remplacée par $y'_m > \frac{1}{\varepsilon}$. Il peut, bien entendu, arriver qu'il n'y ait qu'un seul e_ε .

Ceci arrive si $a_i, b_i \in E_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ et, en particulier, si E est fini.

On voit donc que e_ε contient deux sortes de points. Les points fixes, qui coïncident avec une extrémité a_i, b_i et les points variables qui sont à une distance moindre que ε de l'une des extrémités a_i, b_i .

Démontrons maintenant le

Lemme 2. Si les points variables de e_ε s'approchent des extrémités a_i, b_i correspondantes, le nombre des variations de la suite d_1 de e_ε ne peut pas diminuer.

Il suffit de démontrer la propriété lorsque un de ces points varie. Si ce point est x'_1 ou y'_m , la propriété est immédiate et le nombre des variations de la suite d_1 ne change pas. Supposons maintenant, pour fixer les idées, qu'un y'_i varie. Si la fonction est constante sur E_i le nombre des variations ne change pas. Dans le cas contraire, il n'y a diminution éventuelle du nombre des variations que si $f(x'_i) - f(y'_i), f(y'_i) - f(x'_{i+1})$ sont de signes contraires. Ici x'_{i+1} désigne le point unique de E_{i+1} si cet ensemble est formé par un seul point. Mais si y'_i croît vers b_i , $f(x'_i) - f(y'_i)$ ne peut diminuer en valeur absolue, donc $f(y'_i) - f(x'_{i+1})$ ne peut diminuer en valeur absolue. D'autre part, $f(y'_i)$ variant dans le même sens, on voit, qu'on ne perd pas de variations dans la suite d_1 . On fait la démonstration de la même manière si un x'_i décroît vers a_i .

On en déduit que si ε tend vers zéro, le nombre des variations de la suite d_1 de e_ε tend vers une limite k , qui est évidemment finie.

On peut aussi dire qu'il existe un nombre positif ε_1 tel que pour $\varepsilon < \varepsilon_1$ la suite d_1 de e_ε présente k variations. Si $e_\varepsilon = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ on peut, d'ailleurs, remplacer la suite d_1 de e_ε par la suite

$$(6) \quad f(x_2) - f(x_1), f(x_3) - f(x_2), \dots, f(x_r) - f(x_{r-1})$$

De cette façon chaque décomposition (5) est caractérisée par un certain nombre k . Nous avons le

Théorème 4. La fonction f est d'ordre $(0 \mid k)$.

En effet, il existe des suites finies e de E dont la suite d_1 présente k variations. Ces sont, en particulier, les suites e_ε pour ε assez petit.

Soit maintenant e une suite finie quelconque de E et considérons un e_ε de manière que:

1° $\varepsilon < \varepsilon_1$, ε_1 étant le nombre positif défini plus haut.

2° Si E_i contient plus d'un point et si la partie commune e_i de e et de E_i n'est pas vide, on a $e_i \subset$ intervalle fermé (x_i, y_i) , x_i, y_i étant les points de e_ε appartenant à E_i .

Soient e^* la réunion des suites e, e_ε . Si de e^* on supprime les points qui n'appartiennent pas à e_ε , on ne diminue pas le nombre des variations de la suite d_1 , ce qui résulte du fait que la fonction est monotone sur chacun des ensembles E_i . Il en résulte que la suite d_1 de e^* présente exactement k variations, donc la suite d_1 de e présente au plus k variations, d'où résulte le théorème 4.

5. Reprenons la décomposition (5). La fonction f est monotone sur E_i . Si a_i, b_i sont toujours les extrémités de E on a ou bien $a_i \in E_i$ et nous prenons alors $c_{2i-1} = f(a_i)$, ou bien la limite

$$\lim f(x) = c_{2i-1},$$

$$E_i \ni x \rightarrow a_i$$

existe au sens propre ou est $+\infty$ ou $-\infty$. De même, ou bien $b_i \in E_i$ et nous prenons alors $c_{2i} = f(b_i)$, ou bien la limite

$$\lim f(x) = c_{2i},$$

$$E_i \ni x \rightarrow b_i$$

existe au sens propre ou est $+\infty$ ou $-\infty$.

En particulier, si E_i est formé par un seul point on a $a_i = b_i$ et $c_{2i-1} = c_{2i} = f(a_i)$.

Considérons la suite

$$(7) \quad c_2 - c_1, c_3 - c_2, \dots, c_{2m} - c_{2m-1}.$$

Dans cette suite nous convenons, comme d'habitude, que $(+\infty) - u = u - (-\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty > 0$, $(-\infty) - u = u - (+\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty < 0$ si u est un nombre fini. De plus, nous ferons les conventions $(+\infty) - (+\infty) = (-\infty) - (-\infty) = 0$. Alors chaque terme de la suite (7) est ou bien nul ou bien a un signe déterminé. La suite (7) peut être regardée comme la limite, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, de la suite (6) correspondante à un e_ε , en supprimant éventuellement certains termes nuls provenant du fait que certains E_i peuvent avoir un seul point. La suite (7) présente donc k variations.

De ce qui précède il résulte donc que

Théorème 5. *Le nombre des variations de la suite (7), correspondante à la décomposition (5), est indépendant de cette décomposition. Si k est ce nombre, la fonction est d'ordre $(0 | k)$ sur E .*

On peut établir l'invariance du nombre des variations de la suite (7), indépendamment de la définition, déjà donnée, de l'ordre d'une fonction. On a ainsi une nouvelle définition de l'ordre d'une fonction monotone par segments.

6. Nous allons étendre maintenant les résultats précédents au cas $n > 0$. Nous allons, tout d'abord, construire les suites e_ε dans ce cas. Pour cela précisons les points de e_ε qui appartiennent à un E_i . Soit d'abord $i \neq 1, m$, donc E_i n'est ni le premier ni le dernier terme de la décomposition (5) de E pour la fonction f , d'ordre n par segments. Si E_i a moins de $2(n+1)$ points tous ces points appartiennent à e_ε . Si E_i a au moins $2(n+1)$ points il a en commun avec e_ε exactement $2(n+1)$ points $x_i, x_i'', \dots, x_i^{(n+1)}; y_i, y_i'', \dots, y_i^{(n+1)}$. Convenons que $x_i < x_i'' < \dots < x_i^{(n+1)}, y_i > y_i'' > \dots > y_i^{(n+1)}$. Si a n'appartient pas à E_i nous prenons $x_i - a_i < \varepsilon, x_i'' - a_i < \varepsilon, \dots, x_i^{(n+1)} - a_i < \varepsilon$. Si $a_i \in E$, désignons par a_i l'extrémité gauche de $E - a_i$, par a_i'' l'extrémité gauche de $E - (a + a_i)$ et ainsi de suite. Le cas général est que $a_i, a_i', \dots, a_i^{(r-1)}$ sont des points isolés de E_i et $a_i < a_i' < \dots < a_i^{(r-1)} < a_i^{(r)} = a_i^{(r+1)} = \dots$. Alors deux cas peuvent se présenter: 1° $a_i^{(r)} \in E_i$ et nous prenons $x_i' = a_i, x_i'' = a_i^{(r+1)}, x_i^{(r+1)} = a_i^{(r)}, x_i^{(r+2)} - x_i^{(r+1)} < \varepsilon, x_i^{(r+3)} - x_i^{(r+2)} < \varepsilon, \dots, x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)} < \varepsilon$, 2° $a_i^{(r)}$ n'appartient pas à E_i et nous prenons alors $x_i' = a_i, x_i'' = a_i', \dots, x_i^{(r)} = a_i^{(r-1)}, x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)} < \varepsilon, x_i^{(r+2)} - x_i^{(r+1)} < \varepsilon, \dots, x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)} < \varepsilon$. Il se peut, bien entendu, que $r \geq n+1$, alors tous les points x_i ont une position fixe. Les points $y_i, y_i'', \dots, y_i^{(n+1)}$ sont distribués de la même manière au voisinage de l'extrémité b_i . Il reste à préciser les points de e_ε appartenant à E_1 et à E_m . Si E_1 a moins de $n+2$ points tous ces points appartiennent à e_ε . Si E_1 a au moins $n+2$ points il a en commun avec e_ε exactement $n+2$ points $x_1, y_1, y_1'', \dots, y_1^{(n+1)}$, où les $n+1$ derniers points sont distribués dans le voisinage de b_1 comme plus haut. Le point x_1 coïncide avec a_1 si $a_1 \in E$ et on a $x_1' - a_1 < \varepsilon$ si a_1 n'appartient pas à E_1 . Lorsque $a_1 = -\infty$ nous prenons x_1' tel que $x_1' < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Il en est exactement de même pour E_m , sauf qu'ici nous aurons $n+1$ points dans le voisinage de a_m et un point dans le voisinage de b_m .

De cette façon l'ensemble e_ε est parfaitement caractérisé. Si le nombre positif ε est assez petit, on a $x_i^{(n+1)} < y_i^{(n+1)}, i = 2, 3, \dots, m-1, x_1 < y_1^{(n+1)}, x_m^{(n+1)} < y_m$. Il peut encore arriver que e_ε soit

complètement déterminé. C'est ce qui arrive, par exemple, si E est fini et ε est suffisamment petit. En général, les points de e_ε sont les uns fixes et les autres variables en décroissant vers a_i ou en croissant vers b_i .

Nous avons encore le

Théorème 6. *Il existe un nombre positif ε_1 , tel que, pour $\varepsilon < \varepsilon_1$, la suite d_{n+1} de e_ε présente le même nombre k de variations.*

Nous allons suivre ici, pour la démonstration, une voie un peu différente de celle dans le cas $n = 0$. La fonction étant d'ordre n par segments, le nombre des variations de la suite d_{n+1} d'une suite e a un maximum, autrement dit la fonction est d'un certain ordre $(n | k)$. Soit e une suite maximisante et e_i la partie de e appartenant à E_i . Considérons alors une suite e_ε . Si $\varepsilon > 0$ est assez petit tous les points de e_i qui n'appartiennent pas à e_ε sont dans l'intervalle $(x_i^{(n+1)}, y_i^{(n+1)})$ [ou $(x'_1, y'_1)^{(n+1)}$ si $i = 1$, $(x_m^{(n+1)}, y_m^{(n+1)})$ si $i = m$]. Il en résulte que les suites d_{n+1} de e_ε et de la réunion e^* de e et e_ε présentent le même nombre de variations. Mais e étant maximisante, e^* est aussi maximisante, donc la suite d_{n+1} de e_ε présente k variations et le théorème est démontré.

On peut énoncer la propriété précédente aussi sous la forme suivante:

Théorème 7. *Si $\varepsilon > 0$ tend vers zéro, le nombre des variations de la suite d_{n+1} de e_ε tend vers une limite. Si k est cette limite, la fonction est d'ordre $(n | k)$ sur E .*

Soit $e_\varepsilon = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$. La suite d_{n+1} de e_ε peut être remplacée par la suite

$$\Delta_n^2(f) - \Delta_n^1(f), \Delta_n^3(f) - \Delta_n^2(f), \dots, \Delta_n^{r-n}(f) - \Delta_n^{r-n-1}(f).$$

Donc si $\varepsilon \rightarrow 0$, le nombre des variations de cette suite tend vers k .

On peut encore introduire une suite analogue à (7), en utilisant les dérivées jusqu'à l'ordre n des fonctions d'ordre n et les limites de ces dérivées lorsqu'on s'approche d'une extrémité a_i ou b_i et qui existent toujours au sens propre ou impropre. Nous laissons de côté cette généralisation.