BULLETIN SCIENTIFIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

TIMIŞOARA

COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE LA
„SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE TIMIŞOARA"

TOME 11. FASC. 1—2

TIMIŞOARA
„TIPOGRAFIA ROMANEASCA"
1 9 4 3

SUR CERTAINS DÉTÉRMINANTS DÉDUITS DU DÉTERMINANT DE VANDERMONDE

PAR

D. V. IONESCU.

1. Considérons le déterminant de *Vandermonde*

(1) $$V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ainsi que les déterminants

(2) $$V_p = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1+p} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1+p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1+p} \end{vmatrix}$$

qu'on déduit du déterminant de *Vandermonde* en remplaçant la dernière colonne par x_1^{n-1+p}, x_2^{n-1+p}, x_n^{n-1+p}, p étant un entier quelconque positif. Pour $p=0$, on a $V_0 = V$.

M. *Th. Anghelutza* [1] a montré dans un article un procédé simple et élégant pour calculer ces déterminants.

On a démontré que

(3) $$V_p = V\,S_p,$$

où S_p est un polynome homogène et de degré p, de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ayant tous les coefficients égaux à l'unité.

2. Considérons l'équation

(4) $$x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0,$$

dont les racines sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

---

[1]) *Th. Angheluţă.* Formarea câtului şi restului impărţirii a două polinoame, când impărţitorul este descompus în factori de gradul întâi. Gazeta Matematică, 1940, XLV, p. 459.

On démontre sans difficulté les relations suivantes

$$
\begin{aligned}
& V_1 + A_1 V_0 = 0 \\
& V_2 + A_1 V_1 + A_2 V_0 = 0. \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
(2) \qquad & V_n + A_1 V_{n-1} + A_2 V_{n-2} + \cdots + A_n V_0 = 0 \\
& V_{n+1} + A_1 V_n + A_2 V_{n-1} + \cdots + A_n V_1 = 0 \\
& V_{n+2} + A_1 V_{n+1} + A_2 V_n + \cdots + A_n V_2 = 0. \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

A l'aide de ces relations on démontre immédiatement la formule (3).

En effet considérons le développement en série suivant les puissances de λ

$$W = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \cdots + \lambda^p V_p + \cdots$$

En multipliant la première des relations (5) par λ, la seconde par $\lambda^2, \ldots$ ét en les ajoutant on obtient

$$W = \frac{V_0}{1 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \cdots + A_n \lambda^n}$$

on bien

$$W = \frac{V}{(1 - \lambda x_1)(1 - \lambda x_2)\ldots(1 - \lambda x_n)}. \tag{6}$$

V_p est le coefficient de λ^p dans le développement du second membre de la formule (6) suivant les puissances de λ.

Tenant compte du fait que

$$\frac{1}{(1 - \lambda x_1)(1 - \lambda x_2)\ldots(1 - \lambda x_n)} = 1 + S_1 \lambda + S_2 \lambda^2 + \cdots + S_p \lambda^p + \cdots$$

on a immédiatement la formule (3)

3. Si l'on cherche a intégrer les équations (5) suivant la méthode classique, on est conduit à des nouveaux déterminants.

Il s'agit d'intégrer l'équation de récurence

$$V_m + A_1 V_{m-1} + \cdots + A_n V_{m-n} = 0, \tag{7}$$

où $m = n,\ n+1,\ n+2, \ldots,$ avec les conditions suivantes

$$
\begin{aligned}
& V_1 + A_1 V_0 = 0 \\
& V_2 + A_1 V_1 + A_2 V_0 = 0 \\
(8) \qquad & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& V_{n-1} + A_1 V_{n-2} + A_2 V_{n-3} + \cdots + A_{n-1} V_0 = 0.
\end{aligned}
$$

L'équation caractéristique de l'équation (7) est l'équation (4), dont les racines sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

L'intégrale générale de l'équation (7) est

(9) $$V_m = C_1 x_1^m + C_2 x_2^m + \cdots + C_n x_n^m$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des constantes par rapport à l'indice m.

Mais pour résoudre notre problème il faut choisir les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de façon à satisfaire aux conditions (8).

En faisant dans la formule (9) $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, nous avons

(10) $$\begin{aligned} V_0 &= C_1 + C_2 + \cdots + C_n \\ V_1 &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_{n-1} &= C_1 x_1^{n-1} + C_2 x_2^{n-1} + \cdots + C_n x_n^{n-1} \end{aligned}$$

et en formant les équations (8), nous aurons les équations

$$\begin{aligned} V &= C_1 + \cdots + C_n \\ 0 &= (x_1 + A_1) C_1 + \cdots + (x_n + A_1) C_n \\ 0 &= (x_1^2 + A_1 x_1 + A_2) C_1 + \cdots + (x_n^2 + A_1 x_n + A_2) C_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= (x_1^{n-1} + A_1 x_1^{n-2} + \cdots + A_{n-1}) C_1 + \cdots + (x_n^{n-1} + A_1 x_n^{n-2} + \cdots + A_{n-1}) C_n, \end{aligned}$$

pour déterminer $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

En posant

$$B_{ik} = x_k^i + A_1 x_k^{i-1} + \cdots + A_i,$$

et en remplaçant successivement

$$\begin{aligned} A_1 &= - x_k - \Sigma^k x_1 \\ A_2 &= x_k \Sigma^k x_1 + \Sigma^k x_1 x_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A_i &= (-1)^i x_k \Sigma^k x_1 x_2 \ldots x_{i-1} + (-1)^i \Sigma^k x_1 x_2 \ldots x_i, \end{aligned}$$

où $\Sigma^k x_1 x_2 \ldots x_p$ est la somme des produits des nombres qui entrent dans les combinaisons C_n^p des nombres x_1, x_2, x_n excepté le nombre x_k, nous aurons

$$B_{ik} = (-1)^i \Sigma^k x_1 x_2 \ldots x_i.$$

On peut donc écrire les équations (10) sous la forme suivante

(11) $$\begin{aligned} V &= C_1 + \cdots + C_n \\ 0 &= (\Sigma^1 x_1) C_1 + \cdots + (\Sigma^n x_1) C_n \\ 0 &= (\Sigma^1 x_1 x_2) C_1 + \cdots (\Sigma^n x_1 x_2) C_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= (\Sigma^1 x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) C_1 + \cdots + (\Sigma^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) C_n. \end{aligned}$$

En eliminant $C_1, C_2, \ldots, C_n$ entre les équations (11) et l'équation (9), nous aurons

$$
(12)\qquad \begin{vmatrix} V_m & x_1^m & x_2^m \ldots\ldots\ldots\ldots & x_n^m \\ V & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ 0 & \Sigma^1 x_1 & \Sigma^2 x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \Sigma^n x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \Sigma^1 x_1 x_2 \ldots x_{n-1} & \Sigma^2 x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \ldots & \Sigma^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \end{vmatrix} = 0.
$$

Dans cette formule le coefficient de V_m est:

$$
\delta = \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots \\ -(x_1 + A_1) & \ldots\ldots \\ x_1^2 + A_1 x_1 + A_2 & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ (-1)^{n-1}(x_1^{n-1} + A_1 x_1^{n-2} + \cdots + A_{n-1}) & \ldots\ldots \end{vmatrix}
$$

ou

$$
\delta = (-1)^{1+2+\cdots+(n-1)} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x^{n-1} \end{vmatrix},
$$

c'est-à-dire

$$
\delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V.
$$

En développant e déterminant (12) suivant la première colonne nous aurons

$$
(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V V_m - V \begin{vmatrix} x_1^m & x_2^m & \ldots \\ \Sigma^1 x_1 & \Sigma^2 x_1 & \ldots \\ \Sigma^1 x_1 x_2 & \Sigma^2 x_1 x_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \\ \Sigma^1 x_1 x_2 \ldots x_{n-1} & \Sigma^2 x_1 x_2 \ldots x_{n-1} & \ldots \end{vmatrix} = 0
$$

d'où résulte la formule que nous avons en vue:

$$
(13)\quad \Delta_m = \begin{vmatrix} x_1^m & \Sigma^1 x_1 & \Sigma^1 x_1 x_2 & \ldots & \Sigma^1 x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \\ x_2^m & \Sigma^2 x_1 & \Sigma^2 x_1 x_2 & \ldots & \Sigma^2 x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^m & \Sigma^n x_1 & \Sigma^n x_1 x_2 & \ldots & \Sigma^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V_m
$$

et en tenant compte de la formule (3), nous aurons

$$\Delta_m = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{V} \, . \, \mathrm{S}_m \, . \tag{13'}$$

Ce sont les formules (13) et (13') que nous avons voulu mettre en évidence dans ce travail.

Par exemple pour $n = 4$, nous aurons

$$\begin{vmatrix} x_1^m & x_2+x_3+x_4 & x_2x_3+x_3x_4+x_4x_2 & x_2x_3x_4 \\ x_2^m & x_3+x_4+x_1 & x_3x_4+x_4x_1+x_1x_3 & x_3x_4x_1 \\ x_3^m & x_4+x_1+x_2 & x_4x_1+x_1x_2+x_2x_4 & x_4x_1x_2 \\ x_4^m & x_1+x_2+x_3 & x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 & x_1x_2x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^{m+3} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^{m+3} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^{m+3} \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^{m+3} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_1^m & x_2+x_3+x_4 & x_2x_3+x_3x_4+x_4x_2 & x_2x_3x_4 \\ x_2^m & x_3+x_4+x_1 & x_3x_4+x_4x_1+x_1x_3 & x_3x_4x_1 \\ x_3^m & x_4+x_1+x_2 & x_4x_1+x_1x_2+x_2x_4 & x_4x_1x_2 \\ x_4^m & x_1+x_2+x_3 & x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 & x_1x_2x_3 \end{vmatrix} = \mathrm{V} \, . \, \mathrm{S}_m \, .$$

La formula (13) a été établie pour $m = n$, $n+1, \dots$ Nous allons prouver maintenant qu'elle est valable encore pour $m = 0, 1, \dots, n-1$.

4. Remarquons d'abord que pour $m = 0$, le déterminant Δ_0 est identique au déterminant δ du numéro précédent. Nous avons donc

$$\Delta_0 = \delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{V}, \tag{14}$$

et cette formule est en accord avec la formule (13').

Pour prouver que la formule (13') convient encore pour $m = 1, 2, \dots, n-1$, il suffit de démontrer les relations

$$\begin{aligned} &\Delta_1 + \mathrm{A}_1 \Delta_0 = 0 \\ &\Delta_2 + \mathrm{A}_1 \Delta_1 + \mathrm{A}_2 \Delta_0 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\Delta_{n-1} + \mathrm{A}_1 \Delta_{n-2} + \cdots + \mathrm{A}_{n-1} \Delta_0 = 0. \end{aligned}$$

identiques aux formules (8).

En tenant compte de la formule (14) il résultera que

$$\Delta_i = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{V}_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

ce qui prouvera que la formule (13') est démontrée.

Nous avons :

$$\Delta_i+A_1\Delta_{i-1}+\cdots+A_i\Delta_0=\begin{vmatrix} x_1^i+A_1x_1^{i-1}+\cdots+A_i & \Sigma^1 x_1 \ldots \Sigma^1 x_1x_2\ldots x_{n-1} \\ x_2^i+A_1x_2^{i-1}+\cdots+A_i & \Sigma^2 x_1 \ldots \Sigma^2 x_1x_2\ldots x_{n-1} \\ \cdot & \cdot \\ x_n^i+A_1x_n^{i-1}+\cdots+A_i & \Sigma^n x_1 \ldots \Sigma^n x_1x_2\ldots x_{n-1} \end{vmatrix},$$

Mais nous avons démontré que

$$x_k^i+A_1x_k^{i-1}+\cdots+A_i=(-1)^i\Sigma^k x_1x_2\ldots x_i$$

de sorte que

$$\Delta_i+A_1\Delta_{i-1}+\cdots+A_i\Delta_0=\begin{vmatrix} \Sigma^1 x_1x_2\ldots x_i & \Sigma^1 x_1 & \ldots & \Sigma^1 x_1x_2\ldots x_{n-1} \\ \Sigma^2 x_1x_2\ldots x_i & \Sigma^2 x_1 & \ldots & \Sigma^2 x_1x_2\ldots x_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma^n x_1x_2\ldots x_i & \Sigma^n x_1 & \ldots & \Sigma^n x_1x_2\ldots x_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Pour $i=1, 2, \ldots, n-1$, ce déterminant est nul ayant deux colonnes identiques. Nous avons donc

$$\Delta_i+A_1\Delta_{i-1}+\cdots+A_i\Delta_0=0.$$

La formule (13′) est donc démontrée pour toutes les valeurs de m

Comme exemples de la formule (13′), nous avons les identités suivantes bien connues:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2+x_3 & x_2x_3 \\ x_2 & x_3+x_1 & x_3x_1 \\ x_3 & x_1+x_2 & x_1x_2 \end{vmatrix}=-(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1+x_2+x_3),$$

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2+x_3 & x_2x_3 \\ x_2^2 & x_3+x_1 & x_3x_1 \\ x_3^2 & x_1+x_2 & x_1x_2 \end{vmatrix}=-(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1^2+x_2^2+x_2^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1).$$