ACADÉMIE ROUMAINE

BULLETIN
DE LA
SECTION SCIENTIFIQUE

PUBLIÉ PAR LES SOINS DES SECRÉTAIRES DE LA SECTION

MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

† ST. C. HEPITES DE 1912 À 1919

† GR. ANTIPA DE 1919 À 1939

ET

TRAJAN SAVULESCO

TOME XXVII-ÈME

1944—1945

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. BUCUREŞTI, 1947

UN THÉORÈME SUR LES FORMES QUADRATIQUES

PAR

D. V. JONESCO

Note présentée par Mr. D. Pompeiu M. A. R. dans la séance du 6 octobre 1944

1. Considérons les formes quadratiques

$$F = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i x_k \quad , \quad G = \sum_{i,\,k=1}^{n} b_{ik}\, x_i x_k \;, \quad H = \sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}\, x_i x_k$$

dont les discriminants A, B, C ne sont pas nuls.

Posons

$$\begin{aligned} h_1 &= c_{11}\, x_1 + c_{12}\, x_2 + \ldots + c_{1n}\, x_n \\ h_2 &= c_{21}\, x_1 + c_{22}\, x_2 + \ldots + c_{2n}\, x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_n &= c_{n1}\, x_1 + c_{n2} x_2 + \ldots + c_{nn}\, x_n \end{aligned}$$

et

$$\varphi_1 = \begin{vmatrix} h_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ h_2 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_n & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} \;, \quad \varphi_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & h_1 & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & h_2 & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & h_n & b_{n3} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\ldots\ldots \qquad \varphi_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1,n1} & h_1 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2,n1} & h_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{n,n1} & h_n \end{vmatrix}$$

et considérons la forme quadratique

$$\text{1)} \qquad \Phi = \Phi(x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_n) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\; \varphi_i\, \varphi_k \;.$$

On démontre que le discriminant de cete forme n'est pas nul; il est égal à $AB^{2n-2}C^2$.

Si nous faisons $x_n = 0$ dans la forme Φ, nous obtenons une nouvelle forme quadratique

$$\Phi_1 = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$$

en x_1, x_2, x_{n-1}.

Dans cette note nous voulons donner une expression du discriminant δ de la forme Φ_1, et faire une application.

2. Désignons par A_{ik} et C_{ik} les cœfficients de a_{ik} et c_{ik} dans les développements des discriminants A et C. Nous avons démontré que

$$\delta = B^{2n-4} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\, \alpha_{in}\, \alpha_{kn}$$

$$\alpha_{1n} = b_{11} C_{1n} + b_{21} C_{2n} + \ldots + b_{n1} C_{nn}$$

$$\alpha_{2n} = b_{12} C_{1n} + b_{22} C_{2n} + \ldots + b_{n2} C_{nn}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{nn} = b_{1n} C_{1n} + b_{2n} C_{2n} + \ldots + b_{nn} C_{nn}$$

On peut introduire dans l'expression de δ à la place de C_{1n}, $C_{2n}, \ldots, C_{nn}$ les valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ données par les équations linéaires

$$h_1 = 0\ ,\ h_2 = 0\ ,\ \ldots\ ,\ h_n = 0\ .$$

On trouve

(2) $$\delta = \frac{B^{2n-4}\, C^2\, \xi_n^2}{H^2(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\, u_i\, u_k$$

où $$u_1 = b_{11}\xi_1 + b_{21}\xi_2 + \ldots + b_{n1}\xi_n$$

(3) $$u_2 = b_{12}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + \ldots + b_{n2}\xi_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n = b_{1n}\xi_1 + b_{2n}\xi_2 + \ldots + b_{nn}\xi_n\ .$$

Nous allons transformer cette expression de δ, par des considérations géomètriques.

Dans l'espace à n—1 dimensions, considérons les coordonnées homogènes x_1, $x_2, \ldots, x_n$. L'équation

$$H = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}\, x_i x_k = 0$$

représente une quadrique dont le centre I a pour coordonnées $_1$, ξ, $\ldots$, ξ_n.

Considérons aussi les quadriques

$$F = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i x_k = 0 \ .$$

et

$$G = \sum_{i,\,k=1}^{n} \beta_{ik}\, x_i x_k = 0 \ .$$

Le plan polaire de I par rapport à la quadrique $G = 0$, a un pôle I par rapport à la quadrique $F = 0$.

Les coordonnées $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ de I sont données par les formules

$$\begin{aligned}
A\eta_1 &= A_{11}\, u_1 + A_{21}\, u_2 + \ldots + A_{n1}\, u_n \\
A\eta_2 &= A_{12}\, u_1 + A_{22}\, u_2 + \ldots + A_{n2}\, u_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A\eta_n &= A_{1n}\, u_1 + A_{2n}\, u_2 + \ldots + A_{nn}\, u_n
\end{aligned}$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont données par les formules (3).

Si nous calculons la valeur de

$$F(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \sum_{i,\,k-1}^{n} a_{ik}\, \eta_i \eta_k \ ,$$

on trouve

$$F(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \frac{1}{A} \sum_{i,\,k=1}^{n} A_{ik}\, u_i u_k \ ,$$

de sorte que nous pouvons écrire la formule (2) sous la forme

$$\boxed{\delta = \frac{B^{2n-4}\, C^2\, \xi_n^2}{H^2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}\, AF(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)} \tag{4}$$

Telle est la formule que nous avions en vue.

3. Faisons une application des considérations précédentes, en supposant $n = 3$. Les équations

$$F = 0 \ , \ G = 0 \ , \ H = 0 \ ,$$

représentent alors trois coniques que nous désignerons par (F), (G) et (H).

La polaire d'un point P de la conique (F), par rapport à la conique (G), a un pôle Q par rapport à la conique (H). Lorsque P décrit la conique (F), le point Q décrit également une conique (Q)

L'équation de la conique (Q) est donnée par la formule (1) et le genre de cette conique est donné par le signe du discriminant δ. Soient I le centre de la conique (H) et D la polaire de I par rapport à la conique (G). La formule (4) montre que le genre de la conique (Q), dépend de la position de la droite D par rapport à la conique (F).

Si la droite D est tangente à la conique (F), la conique (Q) est une parabole.

Si la droite D coupe la conique (F), la conique (Q) est une hyperbole.

Si la droite D ne coupe pas la conique (F), la conique (Q) est une ellipse.