P 620

PUBLICAŢIILE INSTITUTULUI REGAL DE CERCETĂRI ŞTIINŢIFICE
AL ROMÂNIEI

DISQUISITIONES MATHEMATICAE ET PHYSICAE

TOMUS IV

FASC. 1—4

Inv. P. 1428

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ, BUCUREŞTI 1945
ROMÂNIA

QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS À UNE FORMULE DE RÉCURRENCE

PAR

D. V. IONESCO

Nous allons étudier dans ce Mémoire, l'équation linéaire à deux indices.

$$(1) \qquad u_{m,n} = au_{m-1,n} + bu_{m,n-1} + cu_{m-1,n-1}$$

où a, b, c sont des constantes et où les indices m et n, sont des nombres entiers positifs.

Le problème fondamental dans cette étude, sera la détermination de la solution de l'équation (1), connaissant les valeurs de $u_{m,n}$ pour les valeurs

$$(2) \qquad (m,\ 0) \text{ et } (0,\ n) \qquad \begin{pmatrix} m = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m \\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n \end{pmatrix}$$

des indices m et n.

La solution de ce problème est unique. On voit en effet, que la solution de l'équation (1), nulle pour les valeurs (2) des indices m et n, est identiquement nulle.

Ce problème est analogue au problème de la détermination de l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = A \frac{\partial z}{dx} + B \frac{\partial z}{\partial y} + Cz$$

lorsqu'on connait les valeurs de z sur les axes Ox et Oy.

Une importante application de notre problème fondamental, sera la résolution de l'équation (1), connaissant les valeurs de $u_{m,n}$ pour les valeurs

$$(m,\ 0) \text{ et } (n,\ n) \qquad \begin{pmatrix} m = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m \\ n = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n \end{pmatrix}$$

des indices m et n.

Nous ferons aussi d'autres applications.

Nous déterminerons par exemple les cœfficients du développement de

$$\frac{1}{1 - ax - by - cxy}$$

suivant les puissances de x et de y. Ces coefficients convenablement ordonnés nous donneront des polynomes ayant toutes les racines réelles.

Nous ferons aussi une autre application, la détermination d'une fonction $f(y)$ par son développement taylorien telle que dans le développement de

$$\frac{f(y)}{1 - ax - by - cxy}$$

suivant les puissances de x et de y, les cœfficients de xy, x^2y^2, $x^3y^3, \ldots$ soient tous nuls. Ce problème conduit à un système d'équations à une infinité d'inconnues dont nous donnerons la solution.

Dans la seconde partie de ce travail, le problème fondamental sur l'équation (1) sera étendu à l'équation à trois indices:

$$(3) \quad u_{m,n,p} = au_{m-1,n,p} + bu_{m,n-1,p} + cu_{m-1,n-1,p} + a'u_{m-1,n,p-1} + b'u_{m,n-1,p-1} + c'u_{m-1,n-1,p-1} + ku_{m,n,p-1}$$

où a, b, c, a', b', c' et k sont des constantes.

Nous ferons aussi quelques applications de la solution de ce problème.

Une partie des résultats de ce travail a été publiée dans deux notes du Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique [1]).

PREMIÈRE PARTIE

I. PROBLÈME FONDAMENTAL

1. Le problème fondamental sur l'équation (1) est la détermination de la solution de cette équation, connaissant les valeurs $u_{m,o}$ et $u_{o,n}$ de $u_{m,n}$ pour les valeurs (2) des indices m et n.

Désignons par $u_{m,n}$ et $v_{m,n}$ les solutions de l'équation (1), correspondant aux données $(u_{m,o}, u_{o,n})$, et $(v_{m,o}, v_{o,n})$ de $u_{m,n}$ et $v_{m,n}$ pour les valeurs (2) des indices m et n. Il est évident que si A et B sont deux constantes quelconques la somme

$$Au_{m,n} + Bv_{m,n}$$

sera la solution de l'équation (1), correspondant aux données:

$$Au_{m,o} + Bv_{m,o} \text{ et } Au_{o,n} + Bv_{o,n}$$

pour les valeurs (2) des indices m et n.

[1]) 5-e Série, t. XV, p. 822 et t. XVI, p. 445.

Il résulte de cette remarque, que pour traiter le problème fondamental, il suffira de résoudre les problèmes élémentaires suivants:

1. *Déterminer la solution de l'équation* (1), *nulle pour* $m = 0$ *quelque soit* n *et nulle pour* $n = 0$, *quelque soit* m, *sauf pour la valeur* m' *de* m, *où la valeur de* u *doit être égale à l'unité.*

Cette solution sera désignée par $u_{m,n}^{m',o}$. Elle satisfait donc aux conditions suivantes:

$$u_{m',o}^{m',o} = 1$$

$$u_{m',o}^{m',o} = 0 \quad \text{pour } m \neq m'$$

$$u_{o,n}^{m',o} = 0 \quad \text{pour } n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

2. *Déterminer la solution de l'équation* (1), *désignée par* $u_{m,n}^{o,n'}$ *qui satisfait aux conditions suivantes*:

$$u_{o,n'}^{o,n'} = 1$$

$$u_{m,o}^{o,n'} = 0 \quad \text{pour } m = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

$$u_{o,n}^{o,n'} = 0 \quad \text{pour } n \neq n'.$$

3. *Déterminer la solution de l'équation* (1) *désignée par* $u_{m,n}^{o,o}$ *qui satisfait aux conditions suivantes*:

$$u_{o,o}^{o,o} = 1$$

$$u_{m,o}^{o,o} = 0 \quad \text{pour } m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$u_{o,n}^{o,o} = 0 \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ces problèmes élémentaires étant résolus, la solution du problème fondamental, sera donnée par la formule

$$(4) \qquad \begin{aligned} u_{m,n} = u_{o,o}\, u_{m,n}^{o,o} &+ u_{1,o}\, u_{m,n}^{1,o} + \ldots + u_{m,o}\, u_{m,n}^{m,o} \\ &+ u_{o,1}\, u_{m,n}^{o,1} + \ldots + u_{o,n}\, u_{m,n}^{o,n}. \end{aligned}$$

2. Nous allons déterminer d'abord $u_{m,n}^{1,o}$. Pour abréger la notation, nous poserons:

$$u_{m,n}^{1,o} = \lambda_{m,n}.$$

Nous avons donc les données suivantes:

$$\lambda_{1,o} = 1$$

$$\lambda_{m,o} = 0 \qquad m = 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

$$\lambda_{o,n} = 0 \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Dans l'équation

$$(5) \qquad \lambda_{m,n} = a\lambda_{m-1,n} + b\lambda_{m,n-1} + c\lambda_{m-1,n-1}$$

faisons $m = 1$. Nous aurons

$$\lambda_{1,n} = b\lambda_{1,n-1}$$

et en faisant successivement $n = 1, 2, \ldots, n$ nous aurons les équations

$$\lambda_{1,0} = 1$$
$$\lambda_{1,1} = b\lambda_{1,0}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_{1,n} = b\lambda_{1,n-1}\,.$$

d'où il résulte que

(6) $$\lambda_{1,n} = b^n\,.$$

Nous pouvons encore écrire $\lambda_{1,n}$ sous la forme suivante

(6′) $$\boxed{\lambda_{1,n} = \frac{1}{n\,!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}(ab+c)^n}$$

et nous démontrerons qu'en général $\lambda_{m,n}$ sera donnée par la formule

(7) $$\boxed{\lambda_{m,n} = \frac{1}{(n-1)\,!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[a^{m-2}(ab+c)^n\right]}$$

valable pour $m \geqslant 2$.

3. Calculons $\lambda_{m,1}$. Dans l'équation (5) faisons $n = 1$, et donnons ensuite à m les valeurs $1, 2, \ldots, m$. Nous obtiendrons les équations

$$\lambda_{1,1} = b$$
$$\lambda_{2,1} = a\lambda_{1,1} + c$$
$$\lambda_{3,1} = a\lambda_{2,1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_{m,1} = a\lambda_{m-1,1}\,,$$

d'où il résulte que

(8) $$\boxed{\lambda_{m,1} = a^{m-2}(ab+c)}\,.$$

La formule (7) est démontrée donc pour $n = 1$.

4. Faisons maintenant dans l'équation (5), successivement $m = 1, 2, \ldots, m$. Nous aurons les équations

$$\lambda_{1,n} = b\lambda_{1,n-1}$$
$$\lambda_{2,n} = a\lambda_{1,n} + b\lambda_{2,n-1} + c\lambda_{1,n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_{m,n} = a\lambda_{m-1,n} + b\lambda_{m,n-1} + c\lambda_{m-1,n-1}\,.$$

En éliminant $\lambda_{1,n}$, $\lambda_{2,n}, \ldots, \lambda_{m-1,n}$ nous obtiendrons la formule

$$\boxed{\lambda_{m,n} = b\lambda_{m,n-1} + (ab+c)[\lambda_{m-1,n-1} + a\lambda_{m-2,n-1} + \ldots + a^{m-2}\lambda_{1,n-1}]} \tag{9}$$

qui nous permettra de calculer $\lambda_{m,n}$ lorsqu'on connait $\lambda_{m,n-1}$.

5. Nous allons établir maintenant une formule de sommation qui nous sera utile dans la suite.

Introduisons la notation

$$D_n[F(a, b, c, \ldots)] = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}[F(a, b, c, \ldots)] \tag{10}$$

et démontrons la formule de sommations

$$\boxed{\begin{aligned} b D_p[a^{m-2} f(a)] + (ab+c)\{D_p[a^{m-3} f(a)] + a D_p[a^{m-4} f(a)] \\ + \ldots + a^{m-3} D_p[f(a)] + a^{m-2} D_{p+1}[f(a)]\} \\ = D_{p+1}[a^{m-2}(ab+c) f(a)] \end{aligned}} \tag{11}$$

où $f(a)$ est une fonction quelconque de a, m un nombre entier positif et p un indice quelconque entier positif ou nul.

En effet, considérons les identités suivantes

$$\begin{aligned} D_{p+1}[a^{m-2}(ab+c) f(a)] &= (ab+c) D_{p+1}[a^{m-2} f(a)] + b D_p[a^{m-2} f(a)] \\ D_{p+1}[a^{m-2} f(a)] &= a D_{p+1}[a^{m-3} f(a)] + D_p[a^{m-3} f(a)] \\ D_{p-1}[a^{m-3} f(a)] &= a D_{p+1}[a^{m-4} f(a)] + D_p[a^{m-4} f(a)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{p+1}[a f(a)] &= a D_{p+1}[f(a)] + D_p[f(a)] \end{aligned}$$

et éliminons $D_{p+1}[a^{m-2} f(a)]$, $D_{p+1}[a^{m-3} f(a)], \ldots, D_{p+1}[af(a)]$. Nous obtiendrons la formule (11).

Nous appliquerons la formule (11) dans le cas où $f(a)$ est un polynome de degré $p+1$.

Lorsque $f(a)$ est un polynome de degré p, dans la formule (11) le terme $a^{m-2} D_{p+1}[f(a)]$ disparaît, et si dans la formule (11) nous changeons m en $m+1$, nous aurons la formule

$$\boxed{\begin{aligned} b D_p[a^{m-1} f(a)] + (ab+c)\{D_p[a^{m-2} f(a)] + a D_p[a^{m-3} f(a)] \\ + \ldots + a^{m-2} D_p[f(a)]\} = D_{p+1}[a^{m-1}(ab+c) f(a)] \end{aligned}} \tag{12}$$

6. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la formule (7).

D'après la formule (8) et la notation (10) nous avons

$$\lambda_{m,1} = D_0[a^{m-2}(ab+c)] \qquad m \geqslant 2.$$

et d'après la formule (6')

$$\lambda_{1,1} = D_1[ab+c].$$

Si dans la formule (9) on fait $n = 2$, on aura

$$\lambda_{m,2} = b\, D_0[a^{m-2}(ab+c)] + (ab+c)\,\{D_0[a^{m-3}(ab+c)] + a D_0[a^{m-4}(ab+c)] + \ldots + a^{m-3} D_0\,[ab+c] + a^{m-2} D_1\,[ab+c]$$

En appliquant la formule (11), pour $p = 0$ et $f(a) = ab + c$, on trouve

$$\lambda_{m,2} = D_1\,[a^{m-2}(ab+c)^2] \tag{13}$$

pour $m \geqslant 2$, et la formule (6′) donnera

$$\lambda_{1,2} = D_2\,[(ab+c)^2]. \tag{13′}$$

En faisant dans la formule (9), $n = 3$ et en utilisant les formules (13), (13′) ainsi que la formule de sommation (11) pour $p = 1$ et $f(a) = (ab + c)^2$, on trouve

$$\lambda_{m,3} = D_2\,[a^{m-2}(ab+c)^3].$$

En suivant la même voie, on démontre de proche en proche que

$$\lambda_{m,n} = D_{n-1}\,[a^{m-2}(ab+c)^n],$$

et la formule (7) est donc démontrée.

7. Pour établir la formule (9), nous avons fait dans l'équation (5), $m = 1, 2, 3, \ldots, m$. Si au contraire nous faisons dans cette équation $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ nous obtiendrons les équations

$$\lambda_{m,1} = a\lambda_{m-1,1} + b\lambda_{m,0} + c\lambda_{m-1,0}$$
$$\lambda_{m,2} = a\lambda_{m-1,2} + b\lambda_{m,1} + c\lambda_{n-1,1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_{m,n} = a\lambda_{m-1,n} + b\lambda_{m,n-1} + c\lambda_{m-1,n-1},$$

et si nous éliminons $\lambda_{m,1}, \lambda_{m,2}, \ldots, \lambda_{m,n-1}$ nous arriverons à la formule

$$\lambda_{m,n} = a\lambda_{m-1,n} + (ab+c)\,[\lambda_{m-1,n-1} + b\lambda_{m-1.n-2} + \ldots + b^{n-2}\lambda_{m-1,1}] + b^n\lambda_{m,0} + b^{n-1} c\,\lambda_{m-1,0},$$

analogue à la formule (9).

Lorsque $m = 1$, cette formule donne

$$\lambda_{1,n} = b$$

et lorsque $m = 2$, nous avons

$$\lambda_{2,n} = n\,(ab+c)\,b^{n-1}. \tag{14}$$

Pour $m > 2$, la formule précédente se réduit à

$$\lambda_{m,n} = a\lambda_{m-1,n} + (ab+c)\,[\lambda_{m-1,n-1} + b\lambda_{m-1,n-2} + \ldots + b^{n-2}\lambda_{m-1,1}]. \tag{15}$$

Si dans la formule (15) nous remplaçons m par 3 et $\lambda_{2,n}$ par la formule (14), nous aurons

$$\lambda_{3,n} = (ab+c)\,\{nab^{n-1} + [1+2+\ldots+(n-1)]\,(ab+c)\,b^{n-2}\}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_{3,n} = (ab+c)\,\left[nab^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{2}(ab+c)\,b^{n-2}\right]. \tag{16}$$

Nous remarquons maintenant que nous pouvons écrire les formules (14) et (16) sous la forme

$$\lambda_{2,n} = \frac{ab+c}{1\,!}\,\frac{\partial}{\partial b}\,(b^n) \tag{14'}$$

$$\lambda_{3,n} = \frac{ab+c}{2\,!}\,\frac{\partial^2}{\partial b^2}\,[b^n\,(ab+c)] \tag{16'}$$

et nous allons démontrer, qu'en général, nous avons

$$\boxed{\lambda_{m,n} = \frac{ab+c}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[b^n\,(ab+c)^{m-2}]}\,. \tag{17}$$

Cette formule étant vraie pour $m = 3$, nous allons démontrer que si nous la supposons vraie pour l'indice m, elle sera également vraie pour l'indice $m+1$.

8. En effet, dans la formule (15), remplaçons m par $m+1$, et utilisons la formule (17). Nous aurons

$$\begin{aligned}\lambda_{m+1,n} = (ab+c)\Bigg\{&\frac{a}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[b^n\,(ab+c)^{m-2}]\\
&+\frac{ab+c}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[b^{n-1}\,(ab+c)^{m-2}]\\
&+b\,\frac{ab+c}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[b^{n-2}\,(ab+c)^{m-2}]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+b^{n-2}\,\frac{ab+c}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[b\,(ab+c)^{m-2}]\Bigg\}\end{aligned}$$

On établit, comme pour la formule (11), que la grande parenthèse est égale à

$$\frac{1}{m\,!}\,\frac{\partial^m}{\partial b^m}\left[b^n\,(ab+c)^{m-1}\right]$$

et par suite

$$\lambda_{m+1,\,n} = \frac{ab+c}{m\,!}\,\frac{\partial^m}{\partial b^m}\left[b^n\,(ab+c)^{m-1}\right],$$

ce qui prouve que la formule (17) est générale [1].

Ainsi la solution $\lambda_{m,\,n}$ de l'équation (5) est donnée par la formule, (7) ou par la formule (17). La formule (7) est valable pour $m \geqslant 2$, la valeur de $\lambda_{1,\,n}$ étant donnée par la formule (6'). Pour que la formule (17) soit valable pour $m = 0$, $m = 1$, nous faisons les conventions suivantes

$$\frac{ab+c}{0\,!}\,\frac{\partial^0}{\partial b^0}\left[b^n\,(ab+c)^{-1}\right] = b^n$$

et

$$\frac{ab+c}{(-1)\,!}\,\frac{\partial^{-1}}{\partial b^{-1}}\left[b^n\,(ab+c)^{-2}\right] = 0.$$

9. En développant le second membre de la formule (7) suivant la règle de Leibnitz, nous avons

$$\begin{aligned}\lambda_{m,\,n} = \frac{1}{(n-1)\,!}\Big\{ & n\,(n-1)\ldots 2\,.\;a^{m-2}\,b^{n-1}\,(ab+c)\\ & +\frac{n-1}{1}\,(m-2)\,.\;n\,(n-1)\ldots 3\;a^{m-3}\,b^{n-2}\,(ab+c)^2\\ & +\frac{(n-1)\,(n-2)}{2\,!}\,(m-2)\,(m-3)\,n\,(n-1)\ldots 4\,.\;a^{m-4}\,b^{n-3}\,(ab+c)^3\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\lambda_{m,\,n} = {} & \frac{n}{1}\,a^{m-2}\,b^{n-1}\,(ab+c)\\ & +\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,.\,\frac{m-2}{1}\,a^{m-3}\,b^{n-2}\,(ab+c)^2\\ & +\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{(m-2)\,(m-3)}{1\,.\,2}\,a^{m-4}\,b^{n-3}\,(ab+c)^3\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

[1] Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Regale de Belgique, t. XV, 5-e série, p. 823.

ou bien

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{m,\,n} = (ab + c)\,[C_n^1\,a^{m-2}\,b^{n-1} + C_{m-2}^1\,C_n^2\,a^{m-3}\,b^{n-2}\,(ab + c)\\ + C_{m-2}^2\,C_n^3\,a^{m-4}\,b^{n-3}\,(ab + c)^2 + \ldots]\end{aligned}} \tag{18}$$

Dans cette formule il faut considérer le symbole $C_r^s = 0$, lorsque $r < s$.

Si $m = n + 1$, la grande parenthèse sera un polynome homogène en ab *et* c, son dernier terme étant

$$C_{m-2}^{m-2}\,C_n^n\,(ab + c)^{n-1}.$$

Si $m < n + 1$, les termes de la grande parenthèse ont le facteur commun b^{n+1-m}, et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}(18')\quad \lambda_{m,\,n} = (ab + c)\,b^{n+1-m}\,[C_n^1\,a^{m-2}\,b^{m-2} + C_{m-2}^1\,C_n^2\,a^{m-3}\,b^{m-3}\,(ab + c)\\ + \ldots + C_{m-2}^{m-2}\,C_n^{m-1}\,(ab + c)^{m-2}]\end{aligned}$$

Si $m > n + 1$, les termes de la grande parenthèse ont le facteur commun a^{m-n-1}, *et* nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}(18'')\quad \lambda_{m,\,n} = (ab + c)\,a^{m-n-1}\,[C_n^1\,a^{n-1}\,b^{n-1} + C_{m-2}^1\,C_n^2\,a^{n-2}\,b^{n-2}\,(ab + c)\\ + \ldots + C_{m-2}^{n-1}\,C_n^n\,(ab + c)^{n-1}].\end{aligned}$$

Dans les formules (18′) et (18″), les grandes parenthèses sont des polynomes homogènes en ab et c, la première de degré $m - 2$, la seconde de degré $n - 1$.

10. En posant

$$\frac{ab}{c} = u,$$

les grandes parenthèses des formules (18′) et (18″) sont des polynomes en u, que nous désignons par $\varphi(u)$ et $\psi(u)$. Nous avons:

$$\begin{aligned}(19)\quad \varphi(u) = C_n^1\,u^{m-2} + C_{m-2}^1\,C_n^2\,u^{m-3}\,(u + 1) + C_{m-2}^2\,C_n^3\,u^{m-4}\,(u + 1)^2\\ + \ldots + C_{m-2}^{m-2}\,C_n^{m-1}\,(u + 1)^{m-2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(20)\quad \psi(u) = C_n^1\,u^{n-1} + C_{m-2}^1\,C_n^2\,u^{n-2}\,(u + 1)\\ + C_{m-2}^2\,C_n^3\,u^{n-3}\,(u + 1)^2 + \ldots + C_{m-2}^{n-1}\,C_n^n\,(u + 1)^{n-1}.\end{aligned}$$

Nous allons développer ces polynomes suivant les puissances de u. Nous aurons

$$\varphi(u) = A_0\,u^{m-2} + A_1\,u^{m-3} + \ldots + A_{m-2}\,,$$

où

$$A_i = C_i^i\,C_{m-2}^i\,C_n^{i+1} + C_{i+1}^i\,C_{m-2}^{i+1}\,C_n^{i+2} + \ldots + C_{m-2}^i\,C_{m-2}^{m-2}\,C_n^{m-1}.$$

Remarquons que

$$C_{i+j}^{i} C_{m-2}^{i+j} = \frac{(i+j)\,!}{i\,!\,j\,!} \; \frac{(m-2)\,!}{(i+j)\,!\,(m-i-j-2)\,!}$$

$$= \frac{(m-2)\,!}{i\,!\,(m-i-2)\,!} \cdot \frac{(m-i-2)\,!}{j\,!\,(m-i-j-2)\,!},$$

c'est-à-dire

$$C_{i+j}^{i} C_{m-2}^{i+j} = C_{m-2}^{i} C_{m-1-2}^{j}$$

de sorte que

$$A_i = C_{m-2}^{i}\left(C_n^{i+1} + C_{m-i-2}^{1} C_n^{i+2} + C_{m-i-2}^{2} C_n^{i+3} + \ldots + C_{m-i-2}^{m-i-2} C_n^{m-1}\right).$$

On établit sans difficulté que la parenthèse est égale à $C_{m+n-i-2}^{m-1}$, de sorte que

$$A_i = C_{m-2}^{i} C_{m+n-i-2}^{m-1}.$$

Il en résulte

$$(19') \qquad \boxed{\begin{aligned} \varphi(u) = {} & C_{m+n-2}^{m-1} u^{m-2} + C_{m-2}^{1} C_{m+n-3}^{m-1} u^{m-3} \\ & + C_{m-2}^{2} C_{m+n-4}^{m-1} u^{m-4} + \ldots + C_{m-2}^{m-2} C_n^{m-1}. \end{aligned}}$$

et l'on établit de la même manière

$$(20') \qquad \boxed{\begin{aligned} \psi(u) = {} & C_{m+n-2}^{m-1} u^{n-1} + C_{m-2}^{1} C_{m+n-3}^{m-1} u^{n-2} \\ & + C_{m-2}^{2} C_{m+n-4}^{m-1} u^{n-3} + \ldots + C_{m-2}^{n-1} C_{m-1}^{m-1} \end{aligned}}.$$

La formule (19′) a lieu pour $m < n+1$, et la formule (20′) a lieu pour $m > n+1$. Lorsque $m = n+1$, ces formules sont identiques.

11. *Les polynomes $\varphi(u)$ et $\psi(u)$, ont les racines réelles, distinctes et comprises entre -1 et 0.*

Cela résulte de l'identité

$$\varphi(u) \text{ ou } \psi(u) = \frac{1}{(m-1)\,!} \frac{d^{m-1}}{du^{m-1}} \left[u^n (u+1)^{m-2}\right],$$

que l'on déduit de la formule (17).

12. Nous sommes maintenant en mesure de donner l'expression de la solution $u_{m,n}^{m',0}$ de l'équation (1), égale à 1 pour les indices $(m',0)$ et nulle pour les indices $(m,0)$ et $(0,n)$, $(m \neq m')$.

En faisant la transformation

$$m = m' - 1 + m_1 \quad , \quad n = n_1$$

et en posant

$$u_{m,n} = u_{m'-1+m_1,n_1} = U_{m_1,n_1},$$

on voit que U_{m_1,n_1} satisfait à l'équation (1) et que

$$U^{1,o}_{m_1,n_1} = u^{m',o}_{m,n}.$$

Il résulte alors d'après les formules (7) et (17)

$$\boxed{u^{m',o}_{m,n} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} [a^{m-m'-1}(ab+c)^n]} \tag{21}$$

ou

$$\boxed{u^{m',o}_{m,n} = \frac{ab+c}{(m-m')!} \frac{\partial^{m-m'}}{\partial b^{m-m'}} [b^n (ab+c)^{m-m'-1}]}. \tag{21'}$$

Comme la formule (21) se déduit de la formule (7), en changeant m en $m - m' + 1$, il s'ensuit que nous pouvons écrire, d'après la formule (18):

$$(21'')\quad u^{m',o}_{m,n} = (ab+c)[C^1_n a^{m-m'-1} b^{n-1} + C^1_{m-m'-1} C^2_n a^{m-m'-2} b^{n-2}(ab+c) + C^2_{m-m'-1} C^3_n a^{m-m'-3} b^{n-3}(ab+c)^2 + \dots].$$

La formule (21) est valable pour $m \geqslant m' + 1$. Pour $m = m'$, nous avons

$$u^{m',o}_{m',n} = b^n.$$

Il est aussi évident que

$$u^{m',o}_{m',n} = 0,$$

pour $m < m'$.

Pour faire entrer tous ces cas dans la formule (21) ou (21'), nous supposerons que

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} [a^{-n-1}(ab+c)^n] = 0, \quad \frac{\partial^{-s}}{\partial b^{-s}} [b^n (ab+c)^{-s-1}] = 0,$$

pour toutes les valeurs positives de r et s.

13. On démontre de la même façon que la solution $u^{o,n'}_{m,n}$ de l'équation (1), égale à 1 pour les indices $(0,n')$ et nulle pour les indices $(m,0)$ et $(0,n)$, $(n \neq n')$ est donnée par l'une des deux formules

$$(22)\quad \boxed{\begin{aligned} u^{o,n'}_{m,n} &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}} [b^{n-n'-1}(ab+c)^m] \\ u^{o,n'}_{m,n} &= \frac{ab+c}{(n-n')!} \frac{\partial^{n-n'}}{\partial a^{n-n'}} [a^m (ab+c)^{n-n'-1}] \end{aligned}}$$

On a la formule suivante

$$(22') \quad u^{o,\,n'}_{m,\,n} = (ab+c)\,[C^1_m\, a^{m-1}\, b^{n-n'-1} + C^2_m\, C^1_{n-n'-1}\, a^{m-2}\, b^{n-n'-2}\,(ab+c) + C^3_m\, C^2_{n-n'-1}\, a^{m-3}\, b^{n-n'-3}\,(ab+c)^2 + \ldots]$$

analogue à la formule (21'').

14. Nous passons maintenant à la determination de la solution $u^{o,\,o}_{m,\,n}$ de l'équation (1), égale à 1 pour les valeurs (0,0) des indices et nulle pour les valeurs $(m,0)$ et $(0,n)$ des indices. Pour abréger nous désignerons cette solution par $\mu_{m,\,n}$.

Si dans l'équation

$$(23) \qquad \mu_{m.\,n} = a\mu_{m-1,\,n} + b\mu_{m,\,n-1} + \mu_{m-1,\,n-1}$$

nous faisons $m = 1$, nous aurons

$$\mu_{1,\,n} = b\mu_{1,\,n-1} + c\mu_{o,\,n-1}\,.$$

En faisant $n = 1, 2, \ldots, n$ nous aurons les équations

$$\mu_{1,\,1} = c$$

$$\mu_{1,\,2} = b\mu_{1,\,1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_{1,\,n} = b\mu_{1,\,n-1}\,.$$

Il en résulte

$$(24) \qquad \boxed{\mu_{1,\,n} = cb^{n-1}}$$

Nous pouvons écrire cette formule sous la forme

$$(24') \qquad \boxed{\mu_{1,\,n} = \frac{c}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[(ab+c)^{n-1}]}$$

et nous démontrerons qu'en général nous avons

$$(25) \qquad \boxed{\mu_{m,\,n} = \frac{c}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}\,(ab+c)^{n-1}]}$$

A cause de l'identité

$$\frac{1}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}\,(ab+c)^{n-1}] = \frac{1}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[b^{n-1}\,(ab+c)^{m-1}]$$

nous pouvons encore écrire la formule (25) sous la forme

$$(25) \qquad \boxed{\mu_{m,\,n} = \frac{c}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[b^{n-1}\,(ab+c)^{m-1}]}\,.$$

15. On établit facilement la formule

$$\mu_{m,n} = b\mu_{m,n-1} + (ab+c)[\mu_{m-1,n-1} + a\mu_{m-2,n-1} + \ldots + a^{m-2}\mu_{1,n-1}] \tag{26}$$

analogue à la formule (9) et valable pour $n \geqslant 2$.

On démontre ensuite comme précédemment que

$$\mu_{m,1} = ca^{m-1}. \tag{27}$$

En faisant dans la formule (26) $n = 2$, et en utilisant la formule (27), nous aurons

$$\mu_{m,2} = c\,[ba^{m-1} + (m-1)\,a^{m-2}(ab+c)]$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mu_{m,2} = c\,D_1\,[a^{m-1}(ab+c)]} \tag{28}$$

Si nous faisons maintenant dans la formule (26) $n = 3$, et si nous utilisons la formule (28) ainsi que la formule de sommation (12), on arrive à la formule

$$\boxed{\mu_{m,3} = cD_2\,[a^{m-1}(ab+c)^2]}$$

Ensuite, on démontre de la même manière que

$$\mu_{m,4} = cD_3\,[a^{m-1}(ab+c)^3]$$

et ainsi de suite.

La formule (25) et donc démontrée.

16. En développant la dérivée d'ordre $n-1$ de la formule (25) suivant la règle de Leibnitz, on arrive à la formule

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_{m,n} = c\,[a^{m-1}b^{n-1} &+ C^1_{m-1}C^1_{n-1}a^{m-2}b^{n-2}(ab+c) \\ &+ C^2_{m-1}C^2_{n-1}a^{m-3}b^{n-3}(ab+c)^2 + \ldots]\end{aligned}} \tag{25'}$$

Lorsque $m = n$, la grande parenthèse est un polynome homogène en ab, c son dernier terme étant

$$C^{m-1}_{m-1}\,C^{n-1}_{n-1}\,(ab+c)^{m-1}.$$

Lorsque $m < n$, les termes de la grande parenthèse ont le facteur commun b^{n-m}, et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\mu_{m,n} = c\,b^{n-m}\,[(ab)^{m-1} &+ C^1_{m-1}C^1_{n-1}(ab)^{m-2}(ab+c) \\ &+ C^2_{m-1}C^2_{n-1}(ab)^{m-3}(ab+c)^2 + \ldots + C^{m-1}_{m-1}C^{m-1}_{n-1}(ab+c)^{n-1}].\end{aligned} \tag{25''}$$

Lorsque $m > n$, les termes de la grande parenthèse ont le facteur commun a^{m-n}, et nous pouvons écrire

$$(25''') \quad \mu_{m,n} = ca^{m-n}\left[(ab)^{n-1} + C^1_{m-1}C^1_{n-1}(ab)^{n-2}(ab+c)\right.$$
$$\left. + C^2_{m-1}C^2_{n-1}(ab)^{n-3}(ab+c)^2 + \ldots + C^{n-1}_{m-1}C^{n-1}_{n-1}(ab+c)^{n-1}\right]$$

En posant

$$\frac{ab}{c} = u,$$

les grandes parenthèses des formules (25″, et (25‴) sont des polynomes en u, que nous désignons par $\varphi_1(u)$ et $\psi_1(u)$. En ordonnant ces polynomes suivant les puissances de u, on trouve par un calcul qui a été donné au No. 10

$$(29) \quad \boxed{\begin{aligned}\varphi_1(u) = {} & C^{m-1}_{m+n-2}u^{m-1} + C^1_{m-1}C^{m-1}_{m+n-3}u^{m-2} \\ & + C^2_{m-1}C^{m-1}_{m+n-4}u^{m-3} + \ldots + C^{m-1}_{m-1}C^{m-1}_{n-1}\end{aligned}}$$

et

$$(29') \quad \boxed{\begin{aligned}\psi_1(u) = {} & C^{m-1}_{m+n-2}u^{n-1} + C^1_{m-1}C^{m-1}_{m+n-3}u^{n-2} \\ & + C^2_{m-1}C^{m-1}_{m+n-4}u^{n-3} + \ldots + C^{n-1}_{m-1}C^{m-1}_{m-1}\end{aligned}}$$

La formule (29) a lieu pour $n > m$ et la formule (29′) a lieu pour, $n < m$. Lorsque $n = m$, ces deux formules coïncident.

Les polynomes $\varphi_1(u)$ *et* $\psi_1(u)$ *ont les racines réelles distinctes et comprises entre* -1 *et* 0. Cela résulte de l'identité

$$\varphi_1(u) \text{ ou } \psi_1(u) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left[u^{m-1}(u+1)^{n-1}\right],$$

qu'on déduit de la formule (25).

17. En résumé, nous avons trouvé les solutions

$$\mu^{m',0}_{m,n};\ \mu^{0,n'}_{m,n};\ \mu^{0,0}_{m,n}$$

de l'équation (1) qui sont données par les formules (21) ou (21'), (22) et (25). Il résulte alors que la solution du problème fondamental posé au No. 1, sera donnée par la formule

$$
(30)\quad \boxed{\begin{aligned}
u_{m,n} = {} & \frac{u_{1,0}}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[a^{m-2}(ab+c)^n] + \frac{u_{2,0}}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[a^{m-3}(ab+c)^n] + \\
& + \ldots + \frac{u_{m-1,0}}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[(ab+c^n] + u_{m,0}\,b^n \\
& + \frac{u_{0,1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}[b^{n-2}(ab+c)^m] + \frac{u_{0,2}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}[b^{n-3}(ab+c)^m] \\
& + \ldots + \frac{u_{0,n-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}[(ab+c)^m] + u_{0,n}\,a^m \\
& + \frac{u_{0,0}\,c}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[a^{m-1}(ab+c)^{n-1}].
\end{aligned}}
$$

II. PREMIÈRE APPLICATION

Solution de l'équation: $u_{m,n} = u_{m-1,n} + u_{m-1,n-1}$

18. Faisons une application à l'équation

$$(31)\qquad u_{m,n} = u_{m-1,n} + u_{m-1,n-1}$$

qui relie trois nombres du triangle arithmétique de Pascal.

Nous avons dans ce cas

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

La formule (21'') donne

$$u_{m,n}^{m',0} = C_{m-m'-1}^{n-1}$$

Pour $m' > m - n$, nous avons donc

$$u_{m,n}^{m',0} = 0.$$

et pour $m' = 1, 2, \ldots, m-n$, nous avons

$$u_{m,n}^{1,0} = C_{m-2}^{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{m,n}^{m-n,0} = C_{n-1}^{n-1}$$

Les formules (22') et (25''') donnent

$$u_{m,n}^{0,n'} = C_m^{n-n'}$$

$$u_{m,n}^{0,0} = C_{m-1}^{n-1}.$$

En appliquant la formule (30), il résulte que la solution du problème fondamental sur l'équation (31) est

$$(32)\quad \boxed{\begin{aligned} u_{m,n} = {} & C_m^{n-1} u_{0,1} + C_m^{n-2} u_{0,2} + \ldots + C_m^1 u_{o,n-1} + u_{o,n} \\ & + C_{m-2}^{n-1} u_{1,0} + C_{m-3}^{n-1} u_{2,0} + \ldots + C_{n-1}^{n-1} u_{m-n,o} \\ & + C_{m-1}^{n-1} u_{0,0}. \end{aligned}}$$

On obtient le cas particulier des nombres du triangle arithmétique de Pascal, en prenant

$$u_{m,o} = 1 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, m)$$
$$u_{o,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, n)$$

La formule (32), donne dans ce cas

$$u_{m,n} = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-2}^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1}$$

c'est-à-dire

$$u_{m,n} = C_m^n .$$

III. DEUXIÈME APPLICATION

Calcul d'un coefficient des polynomes d'Hermite

19. Faisons une nouvelle application de la formule (30). Ch. Hermite[1]) a étudié les polynomes $V_{m,n}(x, y)$ définis par le développement en série de

$$\frac{1}{1 - 2\lambda x - 2\mu y + \lambda^2 + \mu^2}$$

suivant les puissances de λ et de μ.

De l'identité

$$1 = (1 - 2\lambda x - 2\mu y + \lambda^2 + \mu^2)(V_{0,0} + \lambda V_{1,0} + \mu V_{0,1} + \lambda^2 V_{2,0} + \lambda\mu V_{1,1} + \mu^2 V_{0,2} + \ldots)$$

il résulte

$$\begin{aligned} & V_{0,0} = 1 \\ & V_{1,0} - 2x V_{0,0} = 0 \\ (33)\quad & V_{0,1} - 2y V_{0,0} = 0 \\ & V_{1,1} - 2x V_{0,1} - 2y V_{1,0} = 0 \\ & V_{m,o} - 2x V_{m-1,o} + V_{m-2,o} = 0 \qquad \text{pour } m \geqslant 2 \\ (34)\quad & V_{o,n} - 2y V_{o,n-1} + V_{o,n-2} = 0 \qquad \text{pour } n \geqslant 2 \\ & V_{m,1} - 2x V_{m-1,1} - 2y V_{m,o} + V_{m-2,1} = 0 \qquad \text{pour } m \geqslant 2 \\ (35)\quad & V_{1,n} - 2x V_{o,n} - 2y V_{1,n-1} + V_{1,n-2} = 0 \qquad \text{pour } n \geqslant 2 \end{aligned}$$

[1]) Ch. Hermite, *Oeuvres*, Tome II, p. 319—347.

et

$$(36) \quad V_{m,n} = 2x\, V_{m-1,n} + 2y\, V_{m,n-1} - V_{m-2,n} - V_{m,n-2}$$

pour $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$.

On démontre que $V_{m,n}$ est un polynome de degré $m+n$, et qu'il a un terme en $x^m\, y^n$. Désignons par $u_{m,n}$ son coefficient.

La relation (36) montre que pour $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$, on a

$$(37) \qquad \boxed{u_{m,n} = 2u_{m-1,n} + 2u_{m,n-1}}$$

$u_{m,n}$ satisfait donc a une équation de récurrence à deux indices, à coefficients constants, comme l'équation (1).

Les relations (33) montrent que

$$u_{0,0} = 1,\; u_{1,0} = 2,\; u_{0,1} = 2,\; u_{1,1} = 8.$$

Ensuite les relations (34) montrent que

$$u_{m,o} = 2u_{m-1,o} \quad , \quad u_{o,n} = 2u_{o,n-1}\,,$$

d'où il résulte que

$$u_{m,o} = 2^m \quad \text{et} \quad u_{o,n} = 2^n.$$

Enfin les relations (35) montrent que

$$u_{m,1} = 2u_{m-1,1} + 2^{m+1}$$
$$u_{1,n} = 2u_{1,n-1} + 2^{n+1}$$

d'où il résulte, en faisant $m = 0, 1, 2, \ldots$ et $n = 0, 1, 2, \ldots$, que

$$u_{m,1} = 2^{m+1}\,(m+1)$$
$$u_{1,n} = 2^{n+1}\,(n+1)$$

Si nous posons donc

$$u_{m,n} = U_{m-1,n-1}\,,$$

nous voyons d'après l'équation (37) que

$$(37') \qquad U_{m,n} = 2U_{m-1,n} + 2U_{m,n-1}$$

et que

$$(38) \qquad \begin{aligned} U_{m,o} &= 2^{m+2}\,(m+2) \\ U_{o,n} &= 2^{n+2}\,(n+2). \end{aligned}$$

Le problème de la détermination de $U_{m,n}$ est donc le problème fondamental sur l'équation (37') avec les données (38). Sa solution sera donnée par la formule (30).

20. Il y a lieu de faire une remarque sur l'équation (1). Dans le cas ou $c = 0$, c'est-à-dire dans le cas de l'équation

$$\boxed{u_{m,n} = a u_{m-1,n} + b u_{m,n-1}} \tag{39}$$

les formules (21), (22) et (25) se simplifient. Elles se réduisent à

$$\boxed{\begin{aligned} u_{m,n}^{m',o} &= C_{n-1+m-m'}^{n-1} a^{m-m'} b^n \\ u_{m,n}^{o,n'} &= C_{m-1+n-n'}^{m-1} a^m b^{n-n'} \\ u_{m,n}^{o,o} &= 0 \end{aligned}} \tag{40}$$

La formule (30) donne alors

$$\boxed{\begin{aligned} u_{m,n} = (&C_{m+n-2}^{m-1} u_{o,1} b^{n-1} + C_{m+n-3}^{m-1} u_{o,2} b^{n-2} + \ldots + \\ &C_{m-1}^{m-1} u_{o,n}) a^m + (C_{m+n-2}^{n-1} u_{1,o} a^{m-1} + C_{m+n-3}^{n-1} u_{2,o} a^{m-2} \\ &+ \ldots + C_{n-1}^{n-1} u_{m,o}) b^n \end{aligned}} \tag{41}$$

Dans le cas particulier de l'équation (37') et des données (38), la formule (41) donne

$$U_{m,n} = 2^{m+n+2} [(n+2) C_{m-1}^{m-1} + (n+1) C_m^{m-1} + \ldots + 3C_{m+n-2}^{m-1} + (m+2) C_{n-1}^{n-1} + (m+1) C_n^{n-1} + \ldots + 3C_{m+n-2}^{n-1}]$$

ou bien

$$U_{m,n} = 2^{m+n+2} [(n+2) C_{m-1}^{m-1} + (n+1) C_m^{m-1} + \ldots + 2C_{m+n-1}^{m-1} - C_{m+n}^{n} + (m+2) C_{n-1}^{n-1} + (m+1) C_n^{n-1} + \ldots + 2C_{m+n-1}^{n-1} - C_{m+n}^{m}].$$

On démontre facilement que

$$(m+2) C_{n-1}^{n-1} + (m+1) C_n^{n-1} + \ldots + 2C_{m+n-1}^{n-1} - C_{m+n}^{m} = C_{m+n+1}^{m}$$

de sorte que

$$U_{m,n} = 2^{m+n+2} [C_{m+n+1}^{m} + C_{m+n+1}^{n}]$$

c'est-à-dire

$$\boxed{U_{m,n} = 2^{m+n+2} C_{m+n+2}^{m+1}}$$

Il s'ensuit que le coefficient $u_{m,n}$ de $x^m y^n$ dans le polynome $V_{m,n}(x, y)$ d'Hermite, est donc

$$\boxed{u_{m,n} = 2^{m+2} C_{m+n}^{m}}$$

IV. SECOND PROBLÈME

Résolution de l'équations (1), connaissant les valeurs de $u_{m,n}$ pour les valeurs $(m, 0)$ et (n, n) des indices

21. Nous allons résoudre l'équation (1), en supposant connues, les valeurs

$$\begin{array}{l} u_{0,0},\ u_{1,1},\ u_{2,2},\ \ldots \\ \quad\quad u_{1,0},\ u_{2,0}\ \ldots \end{array}$$

de $u_{m,n}$, pour les valeurs

$$\begin{array}{l} (0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ \ldots \\ \quad\quad (1,0),\ (2,0),\ \ldots \end{array}$$

des indices m et n.

Nous employons la même méthode qu'au No. 1, en résolvant d'abord trois problèmes élémentaires.

1°. *Déterminer* $u_{m,n}$, *sachant que*

$$(42)\qquad \begin{array}{ll} u_{p,p} = 1 & \\ u_{q,0} = 0 & (q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \\ u_{q,q} = 0 & (q \neq p) \end{array}$$

Cette solution sera désignée par $\lambda^p_{m,n}$

2°. *Déterminer* $u_{m,n}$, *sachant que*

$$(43)\qquad \begin{array}{ll} u_{p,0} = 1 & \\ u_{q,q} = 0 & (q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \\ u_{q,0} = 0 & (q \neq p) \end{array}$$

Cette solution sera désignée par $\mu^p_{m,n}$.

3°. *Déterminer* $u_{m,n}$, *sachant que*

$$(44)\qquad \begin{array}{ll} u_{0,0} = 1 & \\ u_{q,q} = 0 & (q = 1,\ 2,\ \ldots) \\ u_{q,0} = 0 & (q = 1,\ 2,\ \ldots) \end{array}$$

Cette solution sera désignée par $\nu_{m,n}$.

A l'aide des solutions de ces problèmes élémentaires on aura la solution générale du problème posé au début de ce chapitre, par la formule

$$\begin{aligned} u_{m,n} = u_{0,0}\,\nu_{m,n} &+ u_{1,1}\,\lambda^1_{m,n} + u_{2,2}\,\lambda^2_{m,n} + \cdots \\ &+ u_{1,0}\,\mu^1_{m,n} + u_{2,0}\,\mu^2_{m,n} + \cdots \end{aligned}$$

22. Nous aurons besoin de résoudre d'abord un problème auxiliaire et donner une nouvelle formule.

Reprenons l'équation (1)

(1) $$u_{m,n} = au_{m-1,n} + bu_{m,n-1} + cu_{m-1,n-1}$$

et cherchons la solution qui satisfait aux conditions suivantes

$$u_{0,1} = 1$$
$$u_{0,n} = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

et

$$u_{m,0} = 0,$$

quelque soit l'indice entier m, *positif*, *négatif* ou *nul*.

Nous avons résolu ce problème lorsque m est positif ou nul, et nous avons donné les formules (22) et (22'):

(22) $$u^{0,1}_{m,n} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}[b^{n-2}(ab+c)^m]$$

(22') $$u^{0,1}_{m,n} = (ab+c)[C^1_m a^{m-1} b^{n-2} + C^2_m C^1_{n-2} a^{m-2} b^{n-3}(ab+c) + C^3_m C^2_{n-2} a^{m-3} b^{n-4}(ab+c)^2 + \ldots]$$

pour $n \geqslant 2$, et

(22'') $$u^{0,1}_{m,1} = a^m$$

pour $n = 1$.

Nous pouvons écrire la formule (22') sous la forme suivante

(46) $$u^{0,1}_{m,n} = (ab+c)\left[\frac{m}{1} a^{m-1} b^{n-2} + \frac{m(m-1)}{1.2} C^1_{n-2} a^{m-2} b^{n-3}(ab+c) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} C^2_{n-2} a^{m-3} b^{n-4}(ab+c)^2 + \ldots\right]$$

Nous allons démontrer, que pour l'indice négatif m, l'expression de $u^{0,1}_{m,n}$, se déduit des formules (22'') et (46), *en changeant m en $-m$.*

23. Dans l'équation (1), où l'on remplace m par $m+1$, supposons l'indice m négatif et posons

$$m = -m'.$$

L'équation (1) devient

$$u_{-m'+1,n} = au_{-m',n} + bu_{-m'+1,n-1} + cu_{-m',n-1}$$

Cette équation donne la valeur de $u_{-m',n}$, lorsqu'on connait les valeurs de $u_{-m'+1,n-1}$, $u_{-m'+1,n}$, et $u_{-m',n-1}$. En résolvant par rapport à $u_{-m',n}$, nous aurons

$$u_{-m',n} = \frac{1}{a}u_{-m'+1,n} - \frac{c}{a}u_{-m',n-1} - \frac{b}{a}u_{-m'+1,n-1}$$

et en posant

$$u_{-m',n} = V_{m',n}$$

nous pouvons écrire l'équation précédente sous la forme

$$V_{m',n} = a'V_{m'-1,n} + b'V_{m',n-1} + c'V_{m'-1,n-1}$$

où

$$(47) \qquad a' = \frac{1}{a}, \quad b' = -\frac{c}{a}, \quad c' = -\frac{b}{a}.$$

L'indice m' étant positif, nous pouvons appliquer les formules (22') et (22'') pour avoir l'expression de $V^{o,1}_{m',n}$ et par suite celle de $u^{o,1}_{-m,n}$.

Nous aurons d'abord

$$u^{o,1}_{-m,1} = a'^m$$

et en remplaçant a' par $\frac{1}{a}$, nous aurons

$$u^{o,1}_{-m,1} = a^{-m},$$

ce qui montre que la formule (22'') est valable aussi pour m négatif.

Nous aurons ensuite pour $n \geqslant 2$,

$$u^{o,1}_{-m,n} = (a'b' + c')\,[C^1_m\, a'^{m-1}\, b'^{n-2} + C^2_m\, C^1_{n-2}\, a'^{m-2}\, b'^{n-3}\, (a'b' + c')$$
$$+ C^3_m\, C^2_{n-2}\, a'^{m-3}\, b'^{n-4}\, (a'b' + c')^2 + \ldots]$$

et en remplaçant a', b', c' par les formules (47), nous aurons d'abord

$$a'b' + c' = -\frac{ab + c}{a^2} = -\frac{h}{a^2},$$

et ensuite

$$u^{o,1}_{-m,n} = -\frac{h}{a^2}\Bigg[C^1_m\, \frac{1}{a^{m-1}}\, \frac{(-1)^{n-2}\, c^{n-2}}{a^{n-2}} + C^2_m\, C^1_{n-2}\, \frac{1}{a^{m-2}}\, \frac{(-1)^{n-2}\, c^{n-3}}{a^{n-3}}\, \frac{h}{a^2}$$
$$+ C^3_m\, C^2_{n-2}\, \frac{1}{a^{m-3}}\, \frac{(-1)^{n-2}\, c^{n-4}}{a^{n-4}}\, \frac{h^2}{a^4} + \ldots\Bigg]$$

ou bien

$$(48) \quad u^{o,1}_{-m,n} = \frac{(-1)^{n-1}\, h}{a^{m+n-1}}[C^1_m\, c^{n-2} + C^2_m\, C^1_{n-2}\, c^{n-3}\, h + C^3_m\, C^2_{n-2}\, c^{n-4}\, h^2 + \ldots]$$

Dans cette formule remplaçons

$$c = -(ab - h).$$

Nous aurons

$$u_{-m,n}^{o,1} = \frac{h}{a^{m+n-1}} [-C_m^1 (ab - h)^{n-2} + C_m^2 C_{n-2}^1 h (ab-h)^{n-} -C_m^3 C_{n-2}^2 h^2 (ab - h)^{n-4} + \dots]$$

ou

$$(49)\quad u_{-m,n}^{o,1} = \frac{h}{a^{m+n-1}} [D_0 (ab)^{n-2} + D_1 (ab)^{n-3} h + D_2 (ab)^{n-4} h^2 + \dots]$$

où

$$\boxed{D_0 = -C_m^1,}$$

$$D_1 = C_m^1 C_{n-2}^1 + C_m^2 C_{n-2}^1,$$

$$D_2 = -[C_m^1 C_{n-2}^2 + C_m^2 C_{n-2}^1 C_{n-3}^1 + C_m^3 C_{n-2}^2].$$

et en général

$$D_k = (-1)^{k-1} [C_m^1 C_{n-2}^k + C_m^2 C_{n-2}^1 C_{n-3}^{k-1} + C_m^3 C_{n-2}^2 C_{n-4}^{k-2} + \dots + C_m^{k+1} C_{n-2}^k].$$

Nous aurons

$$D_1 = (C_m^1 + C_m^2) C_{n-2}^1$$

c'est-à-dire

$$\boxed{D_1 = C_{m+1}^2 C_{n-2}^1}$$

Ensuite

$$D_2 = -(C_m^1 + C_2^1 C_m^2 + C_2^2 C_m^3) C_{n-2}^2.$$

Mais

$$C_m^1 + C_2^1 C_m^2 + C_2^2 C_m^3 = C_{m+2}^3$$

de sorte que

$$\boxed{D_2 = -C_{m+2}^3 C_{n-2}^2}$$

En général nous avons

$$D_k = (-1)^{k+1} [C_m^1 + C_k^1 C_m^2 + C_k^2 C_m^3 + \dots + C_k^k C_m^{k+1}] C_{n-2}^k$$

Mais

$$C_m^1 + C_k^1 C_m^2 + C_k^2 C_m^3 + \dots + C_k^k C_m^{k+1} = C_{m+k}^{k+1},$$

de sorte que

$$\boxed{D_k = (-1)^{k+1} C_{m+k}^{k+1} C_{n-2}^k}$$

Il en résulte que la formule (49) devient

$$u_{-m,n}^{o,1} = \frac{h}{a^{m+n-1}}\left[-C_m^1 (ab)^{n-2} + C_{m+1}^2 C_{n-2}^1 (ab)^{n-3} h - C_{m+2}^3 C_{n-2}^2 (ab)^{n-4} h^2 + \dots\right]$$

c'est-à-dire

$$u_{-m,n}^{o,1} = h\left[-\frac{m}{1} a^{-m-1} b^{n-2} + \frac{m(m+1)}{1.2} C_{n-2}^1 a^{-m-2} b^{n-3} h - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} C_{n-2}^2 a^{-m-3} b^{n-4} h^2 + \dots\right]$$

ce qui prouve que l'expression de $u_{-m,n}^{o,1}$, s obtient en changeant m en $-m$ dans la formule (46).

Une conséquence de ce résultat est que nous pouvons écrire l'expression de $u_{m,n}^{o,1}$, d'après la formule (48), aussi sous la forme

$$u_{m,n}^{o,1} = \frac{(-1)^{n-1} h}{a^{-m+n-1}}\left[-\frac{m}{1} c^{n-2} + \frac{m(m+1)}{1.2} C_{n-2}^1 c^{n-3} h - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} C_{n-2}^2 c^{n-4} h^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{m(m+1)\dots(m+n-2)}{1.2\dots(n-1)} C_{n-2}^{n-2} h^{n-2}\right]$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{aligned} u_{m,n}^{o,1} = a^{m-n+1} h \Big[&\frac{m(m+1)\dots(m+n-2)}{1.2\dots(n-1)} h^{n-2} \\ &- C_{n-2}^1 \frac{m(m+1)\dots(m+n-3)}{1.2\dots(n-2)} h^{n-3} c \\ &+ C_{n-2}^2 \frac{m(m+1)\dots(m+n-4)}{1.2\dots(n-3)} h^{n-4} c^2 \\ &+ \dots + (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} \frac{m}{1} c^{n-2}\Big] \end{aligned}} \tag{50}$$

Nous aurons besoin dans la suite de cette formule.

On démontre de la même manière que *la solution de l'équation* (1), *qui satisfait aux conditions*

$$u_{o,n'} = 1$$
$$u_{o,n} = 0 \qquad n = 1, 2, \dots, n'-1, n'+1, \dots$$

et

$$u_{m,o} = o,$$

quelque soit l'entier m positif, négatif on nul, s'obtient en changeant m en — m, dans la formule (22').

$$(51)\qquad u_{m,n}^{o,n'} = h\left[\frac{m}{1} a^{m-1} b^{n-n'-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} C^1_{n-n'-1} a^{m-2} b^{n-n'-2} h\right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} C^2_{n-n'-1} a^{m-3} b^{n-n'-3} h^2 + \dots\right].$$

On démontre aussi comme pour la formule (50), que l'expression de $u_{m,n}^{o,n'}$ peut s'écrire également sous la forme

$$(52)\qquad \boxed{\begin{aligned} u_{m,n}^{o,n'} = a^{m-n+n'} h \Big[& \frac{m(m+1)\dots(m+n-n'-1)}{1.2\dots(n-n')} h^{n-n'-1} \\ & - C^1_{n-n'-1} \frac{m(m+1)\dots(m+n-n'-2)}{1.2\dots(n-n'-1)} h^{n-n'-2} c \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + (-1)^{n-n'-1} C^{n-n'-1}_{n-n'-1} \frac{m}{1} c^{n-n'-1}\Big]. \end{aligned}}$$

Nous aurons besoin dans la suite de cette formule.

La formule (52) est valable pour $n' = 1.2, \dots, n-1$. Pour $n' = n$, nous avons

$$(53)\qquad u_{m,n}^{o,n} = a^m.$$

La solution de l'équation (1) *qui est nulle lorsque* $n = 0$ *et m prend toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulle et qui prend des valeurs données* $u_{o,n}$ *pour les valeurs* (o, n) *des indices, sera donnée par la formule*

$$(54)\qquad u_{m,n} = u_{o,1} u_{m,n}^{o,1} + u_{o,2} u_{m,n}^{o,2} + \dots + u_{o,n} u_{m,n}^{o,n}$$

où $u_{m,n}^{o,n}$ est donné par la formule (53) et $u_{m,n}^{o,n'}$ $(n' = 1, 2, \dots, n-1)$ par la formule (52).

Remarque. Nous pouvons écrire

$$u_{-m,n}^{o,1} = \frac{h}{a^{m+n-1}}\left[-\frac{m}{1}(ab)^{n-2} + \frac{m(m+1)}{1.2} C^1_{n-2}(ab)^{n-3} h\right.$$
$$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} C^2_{n-2}(ab)^{n-4} h^2 + \dots$$
$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{1.2\dots(n-1)} C^{n-2}_{n-2} h^{n-2}\right].$$

Le polynome de la parenthèse en $\frac{ab}{c} = u$, *a toutes les racines réelles négatives et plus petites que* -1.

Cela résulte du fait, qu'en utilisant les formules (47), on a

$$\frac{a'b'}{c'} = \frac{c}{ab}$$

c'est-à-dire

$$u = \frac{1}{u'},$$

et en faisant cette transformation on tombe sur l'équation

$$u_{-m,n}^{o,1} = (a'b' + c')\,[C_m^1\, a'^{m-1}\, b'^{n-2} + C_m^2\, C_{n-2}^1\, a'^{m-2}\, b'^{n-3}\,(a'b' + c') + \ldots],$$

dont la parenthèse a, comme nons le savons, toutes les racines réelles et comprises entre -1 et 0.

24. Occupons nous maintenant de la solution $\lambda_{m,n}^1$ de l'équation (1), *mais supposons que l'indice m prend aussi des valeurs négatives.* D'une façon précise cherchons la solution $\lambda_{m,n}^1$ de l'équation (1), qui satisfait aux conditions suivantes

$$\lambda_{1,1}^1 = 1$$

$$\lambda_{n,n}^1 = 0 \qquad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$$

et

$$\lambda_{m,o}^1 = 0,$$

quelque soit l'entier m, *positif, négatif* ou *nul.*

Si dans l'équation

$$\lambda_{m,n}^1 = a\,\lambda_{m-1,n}^1 + b\lambda_{m,n-1}^1 + c\lambda_{m-1,n-1}^1 \tag{55}$$

nous faisons $n = 1$, nous déduisons

$$\boxed{\lambda_{o,1}^1 = \frac{1}{a}} \tag{56}$$

et on démontre qu'en général, nous avons

$$\boxed{\lambda_{m,1}^1 = a^{m-1}} \tag{57}$$

Dans l'équation (55) faisons maintenant $n = 2$; nous aurons

$$\lambda_{m,2}^1 = a\lambda_{m-1,2}^1 + b\lambda_{m,1}^1 + c\lambda_{m-1,1}^1$$

En faisant $m = 2$ et $m = 1$, on trouve

$$\lambda^1_{1,2} = -\frac{h}{a} \quad , \quad \lambda^1_{o,2} = -\frac{2h}{a^2} \tag{58}$$

où

$$h = ab + c.$$

Connaissant les valeurs

$$\lambda^1_{o,1} = \frac{1}{a} \quad , \quad \lambda^1_{o,2} = -\frac{2h}{a^2}$$

et

$$\lambda^1_{m,o} = 0 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

nous pouvons appliquer la formule (54) et déterminer $\lambda^1_{m,2}$. Nous aurons

$$\lambda^1_{m,2} = -\frac{2h}{a^2}\, a^m + \frac{1}{a}\left(\frac{m}{1}\, a^{m-1}\, h\right)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lambda^1_{m,2} = (m-2)\, a^{m-2}\, h} \tag{59}$$

Dans l'équation

$$\lambda^1_{m,3} = a\lambda^1_{m-1,3} + b\lambda^1_{m,2} + c\lambda^1_{m-1,2}$$

faisons $m = 3$, $m = 2$ et $m = 1$; nous aurons, d'après les résultats précédents

$$\lambda^1_{2,3} = -hb \quad , \quad \lambda^1_{1,3} = \frac{h}{a}\left(\frac{c}{a} - b\right), \quad \lambda^1_{o,3} = \frac{3hc}{a^3}. \tag{60}$$

Connaissant les valeurs

$$\lambda^1_{o,1} = \frac{1}{a} \quad , \quad \lambda^1_{o,2} = -\frac{2h}{a^2} \quad , \quad \lambda^1_{o,3} = \frac{3hc}{a^3}$$

et

$$\lambda^1_{m,o} = 0 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

nous pouvons appliquer la formule (54) et déterminer $\lambda^1_{m,3}$. On trouve

$$\lambda^1_{m,3} = \frac{3hc}{a^3}\, a^m - \frac{2h}{a^2}\left(\frac{m}{1}\, a^{m-1}\, h\right) + \frac{1}{a}\left[\frac{m(m+1)}{1.2}\, h - \frac{m}{1}\, c\right] a^{m-2}\, h,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lambda^1_{m,3} = \frac{m-3}{2}\, a^{m-3}\, h\,(mh - 2c)} \tag{61}$$

25. En résumé, nous avons trouvé dans le No. précédent

$$\lambda^1_{0,1} = \frac{1}{a} \quad , \quad \lambda^1_{0,2} = -\frac{2h}{a^2} \quad , \quad \lambda^1_{0,3} = \frac{3hc}{a^3}$$

et nous pouvons continuer la même méthode pour déterminer $\lambda^1_{0,4}$, $\lambda^1_{0,5}, \ldots$. En général nous aurons

$$\boxed{\lambda^1_{0,n} = (-1)^{n-1} \frac{nhc^{n-2}}{a^n}} \qquad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots) \tag{62}$$

Au lieu de démontrer directement cette formule, nous allons calculer à l'aide de la formule (54), l'expression de $\lambda^1_{m,n}$, connaissant les valeurs (62) de $\lambda^1_{0,n}$, ainsi que

$$\lambda^1_{0,1} = \frac{1}{a}\,, \quad \text{et} \quad \lambda^1_{m,0} = o$$

pour toute valeur entière de m, positive, négative on nulle.

Nous démontrerons de cette façon que $\lambda^1_{n,n} = o$ et nous aurons en même temps l'expression générale de $\lambda^1_{m,n}$. Nous aurons d'après les formules (50) et (52),

$$\lambda^1_{m,n} = \frac{1}{a}\, a^{m-n+1}\, h\Big[\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)} h^{n-2} - C^1_{n-2} \frac{m(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-2)} h^{n-3} c$$

$$+ C^2_{n-2} \frac{m(m+1)\ldots(m+n-4)}{1.2\ldots(n-3)} h^{n-4} c^2 + \ldots + (-1)^{n-2} C^{n-2}_{n-2} \frac{m}{1} C^{n-2}\Big]$$

$$-\frac{2h}{a^2} a^{m-n+2}\, h\Big[\frac{m(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-2)} h^{n-3} - C^1_{n-3} \frac{m(m+1)\ldots(m+n-4)}{1.2\ldots(n-3)} h^{n-4} c$$

$$+ C^2_{n-3} \frac{m(m+1)\ldots(m+n-5)}{1.2\ldots(n-4)} h^{n-5} c^2 + \ldots + (-1)^{n-3} C^{n-3}_{n-3} \frac{m}{1} c^{n-3}\Big]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-2} \frac{(n-1)\, hc^{n-3}}{a^{n-1}} \left[\frac{m}{1} h a^{m-1}\right]$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{nhc^{n-2}}{a^n} \left[a^m\right],$$

ou bien

$$\lambda^1_{m,n} = a^{m-n} h \left\{ \frac{m(m+1)\dots(m+n-2)}{1.2\dots(n-1)} h^{n-2} - C^1_{n-2} \frac{m(m+1)\dots(m+n-3)}{1.2\dots(n-2)} h^{n-3} c \right.$$

$$+ C^2_{n-2} \frac{m(m+1)\dots(m+n-4)}{1.2\dots(n-3)} h^{n-4} c^2 + \dots + (-1)^{n-2} C^{n-2}_{n-2} \frac{m}{1} c^{n-2}$$

$$-2h \left[\frac{m(m+1)\dots(m+n-3)}{1.2\dots(n-2)} h^{n-3} - C^1_{n-3} \frac{m(m+1)\dots(m+n-4)}{1.2\dots(n-3)} h^{n-4} c \right.$$

$$\left. + C^2_{n-3} \frac{m(m+1)\dots(m+n-5)}{1.2\dots(n-4)} h^{n-5} c^2 + \dots + (-1)^{n-3} C^{n-3}_{n-3} \frac{m}{1} c^{n-3} \right]$$

$$+3hc \left[\frac{m(m+1)\dots(m+n-4)}{1.2\dots(n-3)} h^{n-4} - C^1_{n-4} \frac{m(m+1)\dots(m+n-5)}{1.2\dots(n-4)} h^{n-5} c \right.$$

$$\left. + C^2_{n-4} \frac{m(m+1)\dots(m+n-6)}{1.2\dots(n-5)} h^{n-6} c^2 + \dots + (-1)^{n-4} C^{n-4}_{n-4} \frac{m}{1} c^{n-4} \right]$$

$$- \dots\dots\dots\dots$$

$$+ (-1)^{n-2} (n-1)\, h\, c^{n-3} \frac{m}{1}$$

$$\left. + (-1)^{n-1} n c^{n-2} \right\}$$

Nous pouvons écrire

$$\lambda^1_{m,n} = a^{m-n} h \,[A_0 h^{n-2} + A_1 h^{n-3} c + \dots + A_{n-2} c^{n-2}] \tag{63}$$

où

$$A_0 = \frac{m(m+1)\dots(m+n-2)}{1.2\dots(n-1)} - 2\, \frac{m(m+1)\dots(m+n-3)}{1.2\dots(n-2)},$$

$$A_1 = -C^1_{n-2} \frac{m(m+1)\dots(m+n-3)}{1.2\dots(n-2)} + [2C^1_{n-3} + 3] \frac{m(m+1)\dots(m+n-4)}{1.2\dots(n-3)},$$

$$A_2 = \quad C^2_{n-2} \frac{m(m+1)\dots(m+n-4)}{1.2\dots(n-3)} - [2C^2_{n-3} + 3C^1_{n-4} + 4] \frac{m(m+1)\dots(m+n-5)}{1.2\dots(n-4)},$$

(64) . . . .

$$A_k = (-1)^k C^k_{n-2} \frac{m(m+1)\dots(m+n-k-2)}{1.2\dots(n-k-1)}$$

$$+ (-1)^{k-1} [2\, C^k_{n-3} + 3C^{k-1}_{n-4} + \dots + (k+1) C^1_{n-k-2} + (k+2)] \frac{m(m+1)\dots(m+n-k-3)}{1.2\dots(n-k-2)},$$

. . . .

$$A_{n-2} = (-1)^{n-2} (m-n).$$

Nous avons

$$A_0 = \left(\frac{m+n-2}{n-1} - 2\right) \frac{m(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-2)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{A_0 = \frac{m-n}{n-1} \frac{m(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-2)}}$$

Ensuite

$$A_1 = -\left[(n-2)\frac{m+n-3}{n-2} - 2(n-3) - 3\right] \frac{m(m+1)\ldots(m+n-4)}{1.2\ldots(n-3)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{A_1 = -\frac{m-n}{n-1} C_{n-1}^1 \frac{m(m+1)\ldots(m+n-4)}{1.2\ldots(n-3)}}$$

Nous avons également

$$A_2 = \left[C_{n-2}^2 \frac{m+n-4}{n-3} - 2\frac{(n-3)(n-4)}{1.2} - 3(n-4) - 4\right] \frac{m(m+1)\ldots(m+n-5)}{1.2\ldots(n-4)}$$

ou

$$A_2 = (m-n)\frac{n-2}{2} \frac{m(m+1)\ldots(m+n-5)}{1.2\ldots(n-4)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{A_2 = \frac{m-n}{n-1} C_{n-1}^2 \frac{m(m+1)\ldots(m+n-5)}{1.2\ldots(n-4)}}$$

En général, d'après l'expression de A_k, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} A_k = {} & (-1)^k C_{n-2}^k \frac{m(m+1)\ldots(m+n-k-2)}{1.2\ldots(n-k-1)} \\ & + (-1)^k C_{n-2}^{k+1} \frac{m(m+1)\ldots(m+n-k-3)}{1.2\ldots(n-k-2)} \\ & + (-1)^k [C_{n-2}^{k+1} + 2C_{n-3}^k + 3C_{n-4}^{k-1} + \ldots \\ & + (k+1)C_{n-k-2}^1 + (k+2)] \frac{m(m+1)\ldots(m+n-k-3)}{1.2\ldots(n-k-2)}. \end{aligned}$$

Mais

$$C_{n-2}^{k+1} + 2C_{n-3}^{k} + 3C_{n-4}^{k-1} + \ldots + (k+1)\, C_{n-k-2}^{1} + (k+2) = C_{n}^{k+1}$$

de sorte que

$$A_k = (-1)^k \left[C_{n-2}^{k} \frac{m+n-k-2}{n-k-1} + C_{n-2}^{k+1} - C_{n}^{k+1} \right] \frac{m\,(m+1)\ldots(m+n-k-3)}{1.2\ldots(n-k-2)}$$

$$= (-1)^k \left[\frac{m+n-k-2}{n-k-1} + \frac{n-k-2}{k+1} - \frac{n\,(n-1)}{(k+1)\,(n-k-1)} \right]$$

$$C_{n-2}^{k} \frac{m\,(m+1)\ldots(m+n-k-3)}{1.2\ldots(n-k-2)} .$$

Si nous faisons les calculs, la parenthèse se réduit à

$$\frac{m-n}{n-k-1}$$

et par suite

$$A_k = (-1)^k \frac{m-n}{n-k-1} C_{n-2}^{k} \frac{m\,(m+1)\ldots(m+n-k-3)}{1.2\ldots(n-k-2)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{A_k = (-1)^k \frac{m-n}{n-1} C_{n-1}^{k} \frac{m\,(m+1)\ldots(m+n-k-3)}{1.2\ldots(n-k-2)}}$$

Cette formule est bien en accord avec les expressions de A_0, A_1, A_2 trouvées plus haut, ainsi qu'avec celle de A_{n-2}. La formule (63) peut donc s'écrire

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{m,n}^{1} = \frac{m-n}{n-1} a^{m-n} h \Big[& \frac{m\,(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-2)} h^{n-2} \\ & - C_{n-1}^{1} \frac{m\,(m+1)\ldots(m+n-4)}{1.2\ldots(n-3)} h^{n-3} c \\ & + \ldots + (-1)^k C_{n-1}^{k} \frac{m\,(m+1)\ldots(m+n-k-3)}{1.2\ldots(n-k-2)} h^{n-k-2} c^k \\ & + \ldots + (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-1} c^{n-2} \Big] \end{aligned}} \tag{65}$$

La formule (65) montre que

$$\lambda_{n,n}^{1} = 0,$$

et par suite la valeur (62) de $\lambda_{o,n}^{1}$ est exacte.

La formule (65) est valable pour $n \geqslant 2$. Pour $n = 1$ nous avons la formule (57), c'est-à-dire

$$\boxed{\lambda^1_{m,1} = a^{m-1}} \tag{57}$$

Nous allons maintenant transformer la grande parenthèse de la formule (65), pour donner l'expression définitive de la solution $\lambda^1_{m,n}$ et mettre en évidence une propriété de cette solution.

26. Dans la formule (65) remplaçons h par $ab + c$, et désignons par P la grande parenthèse.

Nous aurons

$$P = \frac{m(m+1)\dots(m+n-3)}{1.2\dots(n-2)}(ab+c)^{n-2} - C^1_{n-1}\frac{m(m+1)\dots(m+n-4)}{1.2\dots(n-3)}(ab+c)^{n-3}c$$

$$+\dots+(-1)^k C^k_{n-1}\frac{m(m+1)\dots(m+n-k-3)}{1.2\dots(n-k-2)}(ab+c)^{n-k-2}c^k+\dots+(-1)^{n-2}C^{n-2}_{n-1}c^{n-2}$$

$$= B_0(ab)^{n-2} + B_1(ab)^{n-3}c + \dots + B_{n-2}c^{n-2},$$

où les coefficients $B_0, B_1, \dots, B_{n-2}$ sont donnés par les formules

$$\boxed{B_0 = \frac{m(m+1)\dots(m+n-3)}{1.2\dots(n-2)}}$$

$$B_1 = C^1_{n-2}\frac{m(m+1)\dots(m+n-3)}{1.2\dots(n-2)} - C^1_{n-1}\frac{m(m+1)\dots(m+n-4)}{1.2\dots(n-3)},$$

$$B_2 = C^2_{n-2}\frac{m(m+1)\dots(m+n-3)}{1.2\dots(n-2)} - C^1_{n-1}C^1_{n-3}\frac{m(m+1)\dots(m+n-4)}{1.2\dots(n-3)}$$

$$+ C^2_{n-1}\frac{m(m+1)\dots(m+n-5)}{1.2\dots(n-4)},$$

$$B_k = C^k_{n-2}\frac{m(m+1)\dots(m+n-3)}{1.2\dots(n-2)} - C^1_{n-1}C^{k-1}_{n-3}\frac{m(m+1)\dots(m+n-4)}{1.2\dots(n-3)}$$

$$+ C^2_{n-1}C^{k-2}_{n-4}\frac{m(m+1)\dots(m+n-5)}{1.2\dots(n-4)}+\dots+(-1)^k C^k_{n-1}C^0_{n-k-2}\frac{m(m+1)\dots(m+n-k-3)}{1.2\dots(n-k-2)},$$

Nous pouvons écrire

$$B_1 = \left[\frac{n-2}{1}\,\frac{m+n-3}{n-2} - C_{n-1}^1\right]\frac{m(m+1)\ldots(m+n-4)}{1.2\ldots(n-3)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{B_1 = \frac{m-2}{1}\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-4)}{1.2\ldots(n-3)}}$$

Nous avons également

$$B_2 = \left[\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\,\frac{(m+n-3)(m+n-4)}{(n-2)(n-3)} - C_{n-1}^1\,\frac{n-3}{1}\,\frac{m+n-4}{n-3} + C_{n-1}^2\right]$$
$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-5)}{1.2\ldots(n-4)} = \left[\frac{(m+n-3)(m+n-4)}{1.2}\right.$$
$$\left.- C_{n-1}^1\,\frac{m+n-4}{1} + C_{n-1}^2\right]\frac{m(m+1)\ldots(m+n-5)}{1.2\ldots(n-4)}.$$

Mais

$$\frac{(m+n-3)(m+n-4)}{1.2} - C_{n-1}^1\,\frac{m+n-4}{1} + C_{n-1}^2 = \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}$$

de sorte que

$$\boxed{B_2 = \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\,\frac{m(m+1)\ldots(m+n-5)}{1.2\ldots(n-4)}}$$

En général nous avons

$$B_k = \left[\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-k-1)}{1.2\ldots k}\,\frac{(m+n-3)(m+n-4)\ldots(m+n-k-2)}{(n-2)(n-3)\ldots(n-k-1)}\right.$$
$$- C_{n-1}^1\,\frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-k-1)}{1.2\ldots(k-1)}\,\frac{(m+n-4)(m+n-5)\ldots(m+n-k-2)}{(n-3)(n-4)\ldots}$$
$$\left.+\ldots+(-1)^k\,C_{n-1}^k\right]\frac{m(m+1)\ldots(m+n-k-3)}{1.2\ldots(n-k-2)}$$

ou

$$B_k = \left[\frac{(m+n-3)(m+n-4)\ldots(m+n-k-2)}{1.2\ldots k}\right.$$
$$- C_{n-1}^1\,\frac{(m+n-4)(m+n-5)\ldots(m+n-k-2)}{1.2\ldots(k-1)}$$
$$+ C_{n-1}^2\,\frac{(m+n-5)(m+n-6)\ldots(m+n-k-2)}{1.2\ldots(k-2)}$$
$$\left.-\ldots+(-1)^k\,C_{n-1}^k\right]\frac{m(m+1)\ldots(m+n-k-3)}{1.2\ldots(n-k-2)}.$$

On démontre que

$$\frac{(m+n-3)(m+n-4)\ldots(m+n-k-2)}{1.2\ldots k} - C_{n-1}^{1}\frac{(m+n-4)(m+n-5)\ldots(m+n-k-2)}{1.2\ldots(k-1)}$$

$$+C_{n-1}^{2}\frac{(m+n-5)(m+n-6)\ldots(m+n-k-2)}{1.2\ldots(k-2)} - \ldots + (-1)^{k}C_{n-1}^{k}$$

$$= \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-k-1)}{1.\,2\ldots k}$$

et par suite

$$\boxed{B_k = \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-k-1)}{1.\,2\ldots k}\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-k-3)}{1.2\ldots(n-k-2)}}$$

La formule (65) devient donc

$$(66)\quad \boxed{\begin{aligned} \lambda_{m,n}^{1} = \frac{m-n}{n-1}\,a^{m-n}(ab+c)\Big[&\frac{m(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-2)}(ab)^{n-2} \\ &+\frac{m-2}{1}\,\frac{m(m+1)\ldots(m+n-4)}{1.2\ldots(n-3)}(ab)^{n-3}c \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-k-1)}{1.\,2\ldots k}\,\frac{m(m+1)\ldots(m+n-k-3)}{1.2\ldots(n-k-2)}(ab)^{n-k-2}c^{k} \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-2)}c^{n-2}\Big] \end{aligned}}$$

Telle est la formule définitive que nous avions en vue. Elle s'applique quelque soit m *positif*, *négatif* ou *nul*.

27. Pour $m = 0$, la formule (66) donne

$$\lambda_{0,n}^{1} = (-1)^{n-1}\frac{nhc^{n-2}}{a^{n}}$$

c'est-à-dire la formule (62).

Pour $m = 1$, la formule (66) donne

$$\lambda_{1,n}^{1} = -\frac{h}{a^{n-1}}\left[(ab)^{n-2} - (ab)^{n-3}c + \ldots + (-1)^{n-2}c^{n-2}\right]$$

Pour $m = 2$, nous avons

$$\lambda_{2,n}^{1} = -(n-2)\,hb^{n-2},$$

formule analogue à la formule (59).

Pour $m = 3, 4. 5, \ldots, n-1$, nous avons

$$\lambda^1_{3,n} = -\frac{n-3}{n-1} hb^{n-3}\,[C^2_n ab + C^1_1 C^2_{n-1} c],$$

$$\lambda^1_{4,n} = -\frac{n-4}{n-1} hb^{n-4}\,[C^3_{n+1}(ab)^2 + C^1_2 C^3_n (ab).c + C^2_2 C^3_{n-1} c^2], \tag{67}$$

$$\lambda^1_{5,n} = -\frac{n-5}{n-1} hb^{n-5}\,[C^4_{n+2}(ab)^3 + C^1_3 C^4_{n+1}(ab)^2 c + C^2_3 C^4_n (ab).c^2 + C^3_3 C^4_{n-1} c^3],$$

. . . .

$$\lambda^1_{n-1,n} = -\frac{1}{n-1} hb\,[C^{n-2}_{2n-4}(ab)^{n-3} + C^1_{n-3} C^{n-2}_{2n-5}(ab)^{n-4} c + C^2_{n-3} C^{n-2}_{2n-6}(ab)^{n-5} c^2 + \ldots + C^{n-3}_{n-3} C^1_{n-1} c^{n-3}].$$

Pour $m \geqslant n$, nous avons

$$\lambda^1_{m,n} = \frac{m-n}{n-1} a^{m-n} h\,[C^{m-1}_{m+n-3}(ab)^{n-2} + C^1_{m-2} C^{m-1}_{m+n-4}(ab)^{n-3} c + C^2_{m-2} C^{m-1}_{m+n-5}(ab)^{n-4} c^2 + \ldots + C^{n-2}_{m-2} C^{m-1}_{m-1} c^{n-2}]. \tag{68}$$

Il est important de remarquer qu'on peut résumer les formules (67) et (68) dans la formule

$$\boxed{\lambda^1_{m,n} = \frac{m-n}{n-1}\,\frac{ab+c}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[b^{n-1}(ab+c)^{m-2}]} \quad m > 2. \tag{69}$$

En effet il est facile d'identifier la formule (69) avec les formules (67) et (68).

Il s'ensuit que si nous posons $\dfrac{ab}{c} = u$, *les grandes parenthèses des formules* (67) *et* (68) *sont des polynomes en* u, *ayant toutes les racines réelles, distinctes et comprises entre* -1 *et* 0.

Cela résulte de la formule (69).

28. Pour $m = -1, -2, -3, \ldots, -(n-3)$, nous avons

$$\lambda^1_{-1,n} = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n-1}\,\frac{h}{a^{n+1}}\,c^{n-3}\,[C^2_{n-1}ab + C^1_1 C^2_n c],$$

$$\lambda^1_{-2,n} = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{n-1}\,\frac{h}{a^{n+2}}\,c^{n-4}[C^3_{n-1}(ab)^2 + C^1_2 C^3_n (ab).c + C^2_2 C^3_{n+1} c^2],$$

$$\lambda^1_{-3,n} = (-1)^{n-1}\frac{n+3}{n-1}\,\frac{h}{a^{n+3}}\,c^{n-5}[C^4_{n-1}(ab)^3 + C^1_3 C^4_n (ab)^2 c + C^2_3 C^4_{n\pm1} abc^2 + C^3_3 C^4_{n+2} c^3], \tag{70}$$

. . . .

$$\lambda^1_{-(n-3),n} = (-1)^{n-1}\frac{2n-3}{n-1}\,\frac{h}{a^{2n-3}}\,c\,[C^{n-2}_{n-1}(ab)^{n-3} + C^1_{n-3} C^{n-2}_n (ab)^{n-4} c + \ldots + C^{n-3}_{n-3} C^{n-2}_{2n-4} c^{n-3}]$$

et pour $m = -p$, où $p > n-3$, nous avons

$$(71)\quad \lambda^{1}_{-p,n} = (-1)^{n-1}\frac{n+p}{n-1}\frac{h}{a^{n+p}}[C_p^{n-2}C_{p+1}^{p+1}(ab)^{n-2} + C_p^{n-3}C_{p+2}^{p+1}(ab)^{n-3}c$$
$$+C_p^{n-4}C_{p+3}^{p+1}(ab)^{n-4}c^2 + \ldots + C_p^p C_{p+n-1}^{p+1}c^{n-2}].$$

Si nous posons $\frac{ab}{c} = u$, *dans les grandes parenthèses des formules* (70) *et* (71), *on obtient des polynomes en u ayant toutes les racines réelles.*

En effet les polynomes en u des formules (70) peuvent s'obtenir en remplaçant u par $\frac{1}{u}$ dans les polynomes des formules (67). De même le polynome en u de la formule (71) se déduit du polynome en u de la formule (68) en remplaçant m par $p+2$ et u par $\frac{1}{u}$.

29. A l'aide du problème posé au No. 24 et traité dans les N-os 25—28, nous pouvons résoudre le problème suivant.

Trouver la solution de l'équation:

$$(72)\qquad u_{m,n} = au_{m-1,n} + bu_{m,n-1} + cu_{m-1,n-1}$$

sachant que

$$(73)\qquad \begin{aligned} u_{p,p} &= 1 \\ u_{m,n} &= 0 \end{aligned}$$

pour toutes les valeurs entières de $n \neq p$, *et*

$$(73)\qquad u_{m,o} = 0,$$

pour toutes les valeurs entières de m, positives, négatives ou nulles.

Cette solution sera désignée par $\lambda^p_{m,n}$.

Il est évident d'abord que

$$\lambda^p_{m,n} = 0,$$

pour $n \leqslant p+1$ et quel que soit m.

Si nous posons

$$m = p-1+m_1 \quad , \quad n = p-1+n_1$$

et

$$(74)\qquad \lambda^p_{m,n} = \lambda^p_{p-1+m_1,\,p-1+n_1} = V_{m_1,n_1}$$

nous voyons que V_{m_1,n_1} satisfait à l'équation (72) et que nous avons

$$\begin{aligned} V_{1,1} &= 1 \\ V_{n_1,n_1} &= 0 \qquad \text{pour } n_1 \neq 1 \\ V_{m_1,o} &= 0 \qquad (m_1 = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \end{aligned}$$

Il résulte alors que V_{m_1, n_1} est la solution du problème posé au No. 24, qui est donnée par la formule (66).

Nous aurons donc

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda^p_{m,n} = \frac{m-n}{n-p} a^{m-n} h \Bigg[& \frac{(m-p+1)(m-p+2)\ldots(m+n-2p-1)}{1.2\ldots(n-p-1)} (ab)^{n-p-1} \\ & + \frac{m-p-1}{1} \frac{(m-p+1)(m-p+2)\ldots(m+n-2p-2)}{1.2\ldots(n-p-2)} (ab)^{n-p-2} c \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{(m-p-1)(m-p-2)(m-p-k)}{1.2.\ldots k} \times \\ & \quad \frac{(m-p+1)(m-p+2)\ldots(m+n-2p-k-1)}{1.2\ldots(n-p-k-1)} (ab)^{n-p-k-1} c^k \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-p-1)} c^{n-p-1} \Bigg]\end{aligned}} \tag{75}$$

pour $n \geqslant p+1$, et pour $n = p$.

$$\boxed{\lambda^p_{m,p}\, p = a^{m-p}} \tag{75'}$$

30. Nous allons nous occuper maintenant de l'autre problème élémentaire posé au No. 21, c'est-à-dire: *déterminer* $u_{m,n}$, *sachant que*

$$u_{p,o} = 1$$

$$u_{m,o} = 0 \qquad \textit{pour } m \neq p \tag{76}$$

$$u_{n,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{77}$$

Cette solution sera désignée par $\mu^p_{m,n}$.

Il est d'abord evident que

$$\mu^p_{m,n} = 0$$

pour

$$m < p \quad \text{et} \quad n < p.$$

Nous allons démontrer que

$$\mu^p_{o,p} = -\left(\frac{b}{a}\right)^p \tag{78}$$

et que

$$\mu^p_{o,n} = 0 \tag{78}$$

pour $n \neq p$.

Il suffira de résoudre l'équation (72) connaissant les conditions (76) et (78) et de prouver ensuite que les relations (77) sont satisfaites. Pour cela nous appliquerons la formule (30) qui nous donnera

$$\tag{79} \boxed{\begin{aligned} \mu^p_{m,n} = {} & \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left[a^{m-p-1} (ab+c)^n\right] \\ & - \left(\frac{b}{a}\right)^p \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}} \left[b^{n-p-1} (ab+c)^m\right]. \end{aligned}}$$

Dans cette formule on supposera $m > p$ et $n > p$.

En faisant $m = n$, nous aurons

$$\begin{aligned} \mu^p_{n,n} = {} & \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left[a^{n-p-1} (ab+c)^n\right] \\ & - \left(\frac{b}{a}\right)^p \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}} \left[b^{n-p-1} (ab+c)^n\right] \end{aligned}$$

et en développant les calculs, nous aurons

$$\begin{aligned} \mu^p_{n,n} = {} & h \left[C^1_n a^{n-p-1} b^{n-1} + C^2_n C^1_{n-p-1} a^{n-p-2} b^{n-2} h \right. \\ & \left. + C^3_n C^2_{n-p-1} a^{n-p-3} b^{n-3} h^2 + \ldots + C^{n-p}_n C^{n-p-1}_{n-p-1} b^p h^{n-p-1}\right] \\ & - h \left(\frac{b}{a}\right)^p \left[C^1_n b^{n-p-1} a^{n-1} + C^2_n C^1_{n-p-1} b^{n-p-2} a^{n-2} h \right. \\ & \left. + C^3_n C^2_{n-p-1} b^{n-p-3} a^{n-3} h^2 + \ldots + C^{n-p}_n C^{n-p-1}_{n-p-1} a^p h^{n-p-1}\right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mu^p_{n,n} = 0,$$

ce qui prouve que la formule (78) est démontrée et que la formule (79) donne la solution du problème pour $m > p$ et $n > p$.

Il réste à donner la solution du problème pour $m \geqslant p$ et $n \leqslant p$ et ensuite pour $m \leqslant p$ et $n \geqslant p$.

31. Supposons $m \geqslant p$ et $n \leqslant p$.

L'équation (72) montre que

$$\tag{80} \mu^p_{p,n} = b \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

Nous allons déterminer d'abord $\mu^p_{m,n}$ pour $n < p$.

Nous voyons que $\mu^p_{m,n}$ est la solution de l'équation (72) qui correspond aux données (80) et aux données

$$\mu^p_{m,o} = 0 \qquad (m = p+1, p+2, \ldots)$$

Il est facile de voir que nous pouvons écrire

$$\mu^p_{m,n} = \mu'_{m,n} + \frac{b}{c}\mu''_{m,n}$$

où $\mu'_{m,n}$ est la solution de l'équation (72), satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} &\mu'_{p,o} = 1 & & \\ &\mu'_{p,n} = 0 & &(n = 1, 2, \ldots, p-1) \\ &\mu'_{m,o} = 0 & &(m = p+1, p+2, \ldots) \end{aligned}$$

et $\mu''_{m,n}$ est la soultion de l'équation (72), satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} &\mu''_{p-1,o} = 1 & & \\ &\mu''_{p-1,n} = 0 & &(n = 1, 2, \ldots, p-1) \\ &\mu''_{m,o} \ = 0 & &(m = p,\ p+1, \ldots) \end{aligned}$$

En utilisant la formule (25) du No. 14, nous autons donc

$$\mu^p_{m,n} = \frac{c}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[a^{m-p-1}(ab+c)^{n-1}] + \frac{b}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[a^{m-p}(ab+c)^{n-1}]$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mu^p_{m,n} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[a^{m-p-1}\,(ab+c)^n]} \tag{81}$$

De cette formule, nous déduisons aussi l'expression de $\mu^p_{m,p}$, en utilisant la formule (30). Nous aurons

$$\boxed{\mu^p_{m,p} = \frac{1}{(p-1)!}\frac{\partial^{p-1}}{\partial a^{p-1}}[a^{m-p-1}\,(ab+c)^p] - a^{m-p}\,b^p} \tag{82}$$

32. Supposons maintenant $m \leqslant p$ et $n \geqslant p$.

Déterminons d'abord $\mu^p_{m,n}$ dans le cas $m < p$. L'équation (72) nous donne

$$\mu^p_{m,p} = -\left(\frac{b}{a}\right)^p a^m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, p-1) \tag{83}$$

Il résulte que $\mu^p_{m,n}$ sera la solution de l'équation (72) qui correspond aux données (83) et aux données

$$\mu^p_{o,n} = 0, \qquad (n = p+1, p+2, \ldots)$$

Il est facile de voir qu'on peut écrire

$$\mu^p_{m,n} = -\left(\frac{b}{a}\right)^p\left[\mu'''_{m,n} + \frac{a}{c}\mu^{IV}_{m,n}\right]$$

où $\mu'''_{m,n}$ est la solution de l'équation (72) satisfaisant aux conditions

$$\mu'''_{o,p} = 1$$
$$\mu'''_{o,n} = 0 \qquad (n = p+1, p+2, \ldots)$$
$$\mu'''_{m,p} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, p-1)$$

et où $\mu^{IV}_{m,n}$ est la solution de l'équation (72) satisfaisant aux conditions

$$\mu^{IV}_{o,p-1} = 1$$
$$\mu^{IV}_{o,n} = 0 \qquad (n = p, p+1, \ldots)$$
$$\mu^{IV}_{m,p-1} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, p-1)$$

Nous aurons donc, en utilisant la formule (25)

$$\mu^{p}_{m,n} = -\left(\frac{b}{a}\right)^{p} \left[\frac{c}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}} [b^{n-b-1}(ab+c)^{m-1}] + \frac{a}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}} [b^{n-p}(ab+c)^{m-1}]\right]$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mu^{p}_{m,n} = -\left(\frac{b}{a}\right)^{p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}} [b^{n-p-1}(ab+c)^{m}]} \tag{84}$$

Dans le cas $m = p$, on établit comme plus haut que

$$\boxed{\mu^{b}_{p,n} = -\left(\frac{b}{a}\right)^{p} \frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial b^{p-1}}{\partial^{p-1}} [b^{n-p-1}(ab+c)^{p}] + b^{n}} \tag{85}$$

En résumé, la solution du problème posé au No. 30, est donnée par les formules (79), (81), (82), (84) et (85).

33. Le cas $p = 1$, est particulièrement intéressant.

La formule (82) donne

$$\mu^{1}_{m,1} = a^{m-2}(ab+c) - a^{m-1}b$$

c'est-à-dire

$$\mu^{1}_{m,1} = a^{m-2}c \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots) \tag{86}$$

De même, la formule (85) donne

$$\mu^{1}_{1,n} = -\frac{b}{a} b^{n-2}(ab+c) + b^{n}$$

c'est-à-dire

$$\mu^{1}_{1,n} = -\frac{c}{a} b^{n-1} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots) \tag{87}$$

Pour donner l'expression de $\mu^1_{m,n}$ pour $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$, on peut employer la formule (79), ou bien suivre la méthode suivante.

D'après les formules (86) et (87) ainsi que $\mu^1_{1,1} = 0$, il résulte que nous pouvons écrire

$$\mu^1_{m,n} = \mu'_{m,n} - \frac{b}{a}\mu''_{m,n}$$

où $\mu'_{m,n}$ est la solution de l'équation (72) qui correspond aux données

$$\mu'_{1,0} = 1$$

$$\mu'_{m,0} = 0 \qquad (m = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\mu'_{1,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

et où $\mu''_{m,n}$ est la solution de l'équation (72) qui correspond aux données

$$\mu''_{0,1} = 1$$

$$\mu''_{m,1} = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\mu''_{0,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

En appliquant la formule (25) du No. 14, il résultera que

$$\text{(88)} \quad \mu^1_{m,n} = \frac{c}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[a^{m-2}(ab+c)^{n-1}] - \frac{b}{a}\frac{c}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial a^{n-2}}[a^{m-1}(ab+c)^{n-2}]$$

Nous allons transformer cette formule.

1°. Supposons $m \geqslant n+1$. En développant les dérivées de la formule (88), nous pouvons écrire

$$\mu^1_{m,n} = c\,[a^{m-2}b^{n-1} + C^1_{m-2}C^1_{n-1}a^{m-3}b^{n-2}h + C^2_{m-2}C^2_{n-1}a^{m-4}b^{n-3}h^2$$

$$+ \dots + C^{n-1}_{m-2}C^{n-1}_{n-1}a^{m-n-1}h^{n-1}]$$

$$-\frac{bc}{a}[a^{m-1}b^{n-2} + C^1_{m-1}C^1_{n-2}a^{m-2}b^{n-3}h + C^2_{m-1}C^2_{n-2}a^{m-3}b^{n-4}h^2$$

$$+ \dots + C^{n-2}_{m-1}C^{n-2}_{n-2}a^{m-n+1}h^{n-2}]$$

c'est-à-dire

$$\text{(89)} \qquad \mu^1_{m,n} = ch\,[(C^1_{m-2}C^1_{n-1} - C^1_{m-1}C^1_{n-2})a^{m-3}b^{n-2}$$

$$+ (C^2_{m-2}C^2_{n-1} - C^2_{m-1}C^2_{n-2})a^{m-4}b^{n-3}h + \dots$$

$$+ (C^{n-2}_{m-2}C^{n-2}_{n-1} - C^{n-2}_{m-1}C^{n-2}_{n-2})a^{m-n}bh^{n-3} + C^{n-1}_{m-2}a^{m-n-1}h^{n-2}]$$

Remarquons que

$$C^1_{m-2}\,C^1_{n-1} - C^1_{m-1}\,C^1_{n-2} = m - n$$

et qu'en général, nous avons

$$C^k_{n-1}C^k_{m-2} - C^k_{n-2}C^k_{m-1} = \frac{(m-2\,!\,(n-2)\,!}{(k)\,!^2\,(m-k-2)\,!\,(n-k-2)\,!}\left[\frac{n-1}{n-k-1} - \frac{m-1}{m-k-1}\right]$$

$$= \frac{m-n}{m-1}\cdot\frac{(m-1)\,!}{(m-k-1)\,!\,k\,!}\cdot\frac{(n-2)\,!}{(n-k-1)\,!\,(k-1)\,!}$$

c'est-à-dire

$$C^k_{n-1}\,C^k_{m-2} - C^k_{n-2}\,C^k_{m-1} = \frac{m-n}{m-1}\,C^k_{m-1}\,C^{k-1}_{n-2}.$$

Cette formule sera appliquée pour $k = 2, 3, \dots, n-2$.

Nous avons aussi

$$C^{n-1}_{m-2} = \frac{(m-2)\,(m-3)\,\dots\,(m-n)}{1.2\,\dots\,(n-1)} = \frac{m-n}{m-1}\,\frac{(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\,\dots\,(n-1)}$$

c'est-à-dire

$$C^{n-1}_{m-2} = \frac{m-n}{m-1}\,C^{n-1}_{m-1}.$$

Nous pouvons donc écrire la formule (89) sous la forme

$$\mu^1_{m,n} = \frac{m-n}{m-1}\,\frac{ch}{a}\,[C^1_{m-1}\,a^{m-2}\,b^{n-2} + C^2_{m-1}\,C^1_{n-2}\,a^{m-3}\,b^{n-3}\,h + \dots$$

$$+ C^{n-2}_{m-1}\,C^{n-3}_{n-2}\,a^{m-n+1}\,bh^{n-3} + C^{n-1}_{m-1}\,C^{n-2}_{n-2}\,a^{m-n}\,h^{n-2}].$$

On reconnaît facilement que la parenthèse est identique à

$$\frac{1}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}\,(ab+c)^{n-2}],$$

de sorte que

$$\text{(90)}\qquad \boxed{\mu^1_{m,n} = \frac{m-n}{m-1}\,\frac{ch}{a}\,\frac{1}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}\,(ab+c)^{n-2}]}\,.$$

Telle est la formule que nous avions en vue.

2°. Supposons maintenant que $m \leqslant n-1$. Nous avons dans ce cas

$$\mu^1_{m,n} = c\,[a^{m-2}\,b^{n-1} + C^1_{m-2}\,C^1_{n-1}\,a^{m-3}\,b^{n-2}\,h + \dots + C^{m-2}_{m-2}\,C^{m-2}_{n-1}\,b^{n-m+1}\,h^{m-2}]$$

$$-\frac{bc}{a}\,[a^{m-1}\,b^{n-2} + C^1_{m-1}\,C^1_{n-2}\,a^{m-2}\,b^{n-3}\,h + \dots$$

$$+ C^{m-2}_{m-1}\,C^{m-2}_{n-2}\,ab^{n-m}\,h^{m-2} + C^{m-1}_{m-1}\,C^{m-1}_{n-2}\,b^{n-m-1}\,h^{m-1}]$$

ou

$$\mu^1_{m,n} = ch\Big[(C^1_{m-2}\,C^1_{n-1} - C^1_{m-1}\,C^1_{n-2})\,a^{m-3}\,b^{n-2} + (C^2_{m-2}\,C^2_{n-1}$$
$$- C^2_{m-1}\,C^2_{n-2})\,a^{m-4}\,b^{n-3}\,h + \ldots + (C^{m-2}_{m-2}\,C^{m-2}_{n-1}$$
$$- C^{m-2}_{m-1}\,C^{m-2}_{n-2})\,b^{n-m+1}\,h^{m-3} - C^{m-1}_{m-1}\,C^{m-1}_{n-2}\,\frac{b^{n-m}}{a}\,h^{m-2}\Big].$$

En remarquant que

$$C^{m-1}_{n-2} = -\,\frac{m-n}{m-1}\,C^{m-2}_{n-2},$$

nous pouvons écrire

$$\mu^1_{m,n} = \frac{m-n}{m-1}\,\frac{ch}{a}\,[C^1_{m-1}\,a^{m-2}\,b^{n-2} + C^2_{m-1}\,C^1_{n-2}\,a^{m-3}\,b^{n-3}\,h + \ldots$$
$$+ C^{m-1}_{m-1}\,C^{m-2}_{n-2}\,b^{n-m}\,h^{m-2}].$$

On reconnaît que la parenthèse représente

$$\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}\,(ab+c)^{n-2}],$$

de sorte que la formule (90) est valable aussi pour $m \leqslant n-1$. Elle est valable aussi pour $m = n$, car nous avons dans ce cas $\mu^1_{n,n} = 0$.

En résumé, dans le cas $p = 1$, nous avons les formules (86), (87) et (90) qui donne la solution du problème posé au No. 30.

34. Le troisième problème élémentaire posé au No. 21, c'est-à-dire la détermination de la solution $u_{m,n}$ de l'équation (72) que nous avons désignée par $\nu_{m,n}$, et qui satisfait aux conditions

$$\nu_{0,0} = 1$$
$$\nu_{n,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$
$$\nu_{m,0} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

est très simple

Il est évident que nous avons

$$\text{(91)} \qquad \boxed{\nu_{m,n} = 0} \qquad (m \neq 0)$$

Pour avoir la valeur de $\nu_{0,n}$ nous ferons dans l'équation (72) $m = 1$, ce qui nous donnera

$$a\,\nu_{0,n} + c\,\nu_{0,n-1} = 0,$$

d'où il résultera que

$$\text{(91')} \qquad \nu_{0,n} = \left(-\frac{c}{a}\right)^n$$

35. Nous avons ainsi résolu les trois problèmes élémentaires posés au No. 21, et par suite la problème général de la détermination de la solution de l'équation

$$u_{m,n} = a u_{m-1,n} + b u_{m,n-1} + c u_{m-1,n-1}$$

connaissant les valeurs de $u_{m,o}$ et $u_{n,n}$ quelque soit les entiers m et n.

Dans le cas où $a = 0$, *les résultats précédents n'ont pas de sens. Les seules données* $u_{m,o}$ *suffisent pour déterminer* $u_{m,n}$ *lorsque* $m \geqslant n$.

En effet, en faisant $n = 1$, l'équation précédente devient

$$u_{m,1} = b u_{m,o} + c u_{m-1,o}$$

En faisant $n = 2$, dans la même équation, on trouve

$$u_{m,2} = b^2 u_{m,o} + 2 bc u_{m-1,o} + c^2 u_{m-2,o}$$

et de proche en proche on démontre que

$$u_{m,n} = b^n u_{m,o} + C_n^1 b^{n-1} c u_{m-1,o} + \dots + C_n^n c^n u_{m-n,o}.$$

36. Nous allons faire une application en considérant l'équation

$$\boxed{u_{m,n} = u_{m-1,n} + u_{m-1,n-1}} \tag{92}$$

qui relie trois nombres du triangle arithmétique de Pascal.

Nous avons dans ce cas

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad h = 1.$$

La formule (75) nous donne

$$\lambda_{m,n}^p = \frac{(m-p-1)\,(m-p-2)\dots(m-n)}{1.2\dots(n-p)} \tag{93}$$

pour $n > p + 1$, et

$$\lambda_{m,p+1}^p = m - p - 1, \quad \lambda_{m,p}^p = 1 \tag{93}$$

pour $n = p + 1$, et $n = p$.

Nous avons enfin

$$\lambda_{m,n}^p = 0, \tag{93}$$

pour $n < p$.

On peut remplacer les formule (93) par les suivantes

$$\begin{aligned} &\lambda_{m,n}^p = 0 && \text{si } n < p \\ &\lambda_{m,n}^p = C_{m-p-1}^{n-p} && \text{si } n \geqslant p \text{ et } m \geqslant p+1 \\ &\lambda_{m,n}^p = (-1)^{n-p} C_{n-m}^{n-p} && \text{si } n \geqslant p \text{ et } m \leqslant p. \end{aligned} \tag{93'}$$

Les formules (79) et (81) montrent que

$$\mu_{m,n}^p = C_{m-p-1}^{n-1} \qquad \text{si } m > p. \tag{94}$$

Les formules (84) et (85) montrent que

$$\mu^p_{m,n} = 0, \qquad \text{si } m < p \tag{94}$$

et la formule (80) montre que

$$\mu^p_{p,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases} \tag{94}$$

Enfin les formules (91) et (91′) montrent que

$$\nu_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ (-1) & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

Il résulte alors d'après les formules (93′) et (94) que la solution générale de l'équation (92) sera pour $m > n$

$$\boxed{\begin{aligned} u_{m,n} = {} & C^{n-1}_{m-2} u_{1,1} + C^{n-2}_{m-3} u_{2,2} + \ldots + C^{o}_{m-n-1} u_{n,n} \\ & + C^{n-1}_{m-2} u_{1,o} + C^{n-1}_{m-3} u_{2,o} + \ldots + C^{n-1}_{n-1} u_{m-n,o} \end{aligned}} \tag{95}$$

et pour $m < n$

$$\boxed{\begin{aligned} u_{m,n} = (-1)^{n-m} [C^{o}_{n-m} u_{m,m} - C^{1}_{n-m} u_{m+1,m+1} + \ldots \\ + (-1)^{n-m} C^{n-m}_{n-m} u_{n,n}] \end{aligned}} \tag{95′}$$

La formule (95) a été donnée aussi par M. Antonio Colucci[1]).

On obtient le cas des nombres du triangle arithmétique de Pascal, en prenant

$$u_{m,o} = 1 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$u_{n,n} = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nous avons dans ce cas, pour $m > n$

$$u_{m,n} = C^{n-1}_{m-2} + C^{n-2}_{m-3} + \ldots + C^{o}_{m-n-1} + C^{n-1}_{m-2} + C^{n-1}_{m-3} + \ldots + C^{n-1}_{n-1}.$$

On sait que

$$C^{n-1}_{m-2} + C^{n-2}_{m-3} + \ldots + C^{o}_{m-n-1} = C^{n-1}_{m-1},$$
$$C^{n-1}_{m-2} + C^{n-1}_{m-3} + \ldots + C^{n-1}_{n-1} \quad = C^{n}_{m-1}$$

de sorte que

$$u_{m,n} = C^{n}_{m-1} + C^{n-1}_{m-1},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{u_{m,n} = C^{n}_{m}}$$

[1]) Antonio Colucci, *Su di un'equazione funzionale e sua relazione con una proprietà caratteristica dei coefficienti binomiali* (Giornale di Matematiche di Battaglini, 1925, p. 132).

Lorsque $m < n$, la formule (95') montre que

$$u_{m,n} = 0,$$

parceque

$$C^{o}_{n-m} - C^{1}_{n-m} + \dots + (-1)^{n-m} C^{n-m}_{n-m} = 0.$$

V. DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION $\frac{1}{1 - ax - by - cxy}$ SUIVANT LES PUISSANCES DE x ET y

37. Si nous développons la fonction

$$\frac{1}{1 - ax - by - cxy}$$

on obtient

$$\frac{1}{1 - ax - by - cxy} = \Sigma u_{m,n}\, x^m\, y^n \tag{96}$$

Il s'agit de calculer $u_{m,n}$.

En faisant $y = 0$, on a

$$\frac{1}{1 - ax} = u_{o,o} + u_{1,o}\, x + u_{2,o}\, x^2 + \dots$$

d'où il résulte que

$$u_{m,o} = a^m \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots) \tag{97}$$

On voit de la même manière que

$$u_{o,n} = b^n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2.\ \dots) \tag{97'}$$

D'autre part, de l'identité

$$1 = (1 - ax - by - cxy)\,(\Sigma u_{m,n}\, x^m\, y^n)$$

il résulte que

$$u_{m,n} = a u_{m-1,n} + b u_{m,n-1} + c u_{m-1,n-1}\,. \tag{98}$$

La détermination des coefficients $u_{m,n}$ se ramène donc à la résolution de l'équation (98) avec les données (97), ce qui constitue notre problème fondamental, traité dans le premier chapitre.

Nous pouvons appliquer la formule (30), mais il est plus simple de procéder comme il suit.

Nous voyons que nous pouvons écrire

$$u_{m,n} = \frac{1}{c}\, u'_{m,n}$$

où $u'_{m,n}$ est la solution de l'équation (98) qui satisfait aux conditions

$$u_{-1,-1} = 1$$
$$u_{-1,\ n} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$u_{m,-1} = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Il résulte d'après la formule (25) que

$$\boxed{u_{m,n} = \frac{1}{n\,!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[a^m(ab+c)^n\right] = \frac{1}{m\,!}\frac{\partial^m}{\partial b^m}\left[b^n(ab+c)^m\right]} \tag{99}$$

Il résulte d'après les considérations du No. 16, que si $m = n$, nous avons

$$u_{m,m} = (ab)^m + (C_m^1)^2 (ab)^{m-1} h + \ldots + (C_m^m)^2 h^m$$
$$= C_{2m}^m (ab)^m + C_m^1 C_{2m-1}^m (ab)^{m-1} c + \ldots + C_m^m C_m^m c^m.$$

Si $m > n$, nous avons

$$u_{m,n} = a^{m-n}\left[(ab)^n + C_m^1 C_n^1 (ab)^{n-1} h + \ldots + C_m^n C_n^n h^n\right]$$
$$= a^{m-n}\left[C_{m+n}^m (ab)^n + C_m^1 C_{m+n-1}^m (ab)^{n-1} c + \ldots + C_m^n C_n^n c^n\right].$$

Si $m < n$, nous avons

$$u_{m,n} = b^{n-m}\left[(ab)^m + C_m^1 C_n^1 (ab)^{m-1} h + \ldots + C_m^m C_n^m h^m\right]$$
$$= b^{n-m}\left[C_{m+n}^m (ab)^m + C_m^1 C_{m+n-1}^m (ab)^{m-1} c + \ldots + C_m^m C_n^m c^m\right].$$

En posant $\dfrac{ab}{c} = u$, *les grandes parenthèses de ces formules sont des polynomes en* u, *ayant toutes les racines réelles et comprises entre* -1 *et* 0.

VI. UN PROBLÈME SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION $\dfrac{f(y)}{1 - ax - by - cxy}$, SUIVANT LES PUISSANCES DE x ET DE y

38. Nous allons faire une nouvelle application, *en cherchant une fonction de* y,

$$f(y) = 1 + \nu_1 y + \nu_2 y^2 + \ldots$$

telle, que dans le développement de

$$F(x, y) = \frac{f(y)}{1 - ax - by - cxy},$$

suivant les puissances de x *et de* y, *les coefficients de* xy, x^2y^2, x^3y^3, $\ldots$, *soient tous nuls.*

Ce problème nous conduira à un système d'équation linéaires à une infinité d'inconnues, qu'il est interessant de résoudre.

En posant

$$F(xy) = \Sigma u_{m,n} x^m y^n ,$$

l'identité

$$1 + v_1 y + v_2 y^2 + \ldots = (1 - ax - by - cxy) \Sigma u_{m,n} x^m y^n ,$$

nous donnera

(101) $$u_{m,n} = a u_{m-1,n} + b u_{m,n-1} + c u_{m-1,n-1}$$

et $$u_{m,o} = a^m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

(102) $$u_{o,n} = v_n + v_{n-1} b + \ldots + v_1 b^{n-1} + b^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Nous pouvons écrire

(103) $$u_{m,n} = u'_{m,n} + u''_{m,n}$$

où $u'_{m,n}$ est la solution de l'équation (101) correspondant aux données

(104) $$u'_{m,o} = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$u'_{o,n} = v_n + v_{n-1} b + \ldots + v_1 b^{n-1} + b^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et $u''_{m,n}$ est la solution de l'équation (101) correspondant aux données

(105) $$u''_{m,o} = a^m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$u''_{o,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Il est facile de voir que nous pouvons écrire

$$u''_{m,n} = v'_{m,n} + \frac{a}{c} v''_{m,n}$$

où $v'_{m,n}$ est la solution de l'équation (101) correspondant aux données

$$v'_{o,o} = 1$$

$$v'_{m,o} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$v'_{o,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et $v''_{m,n}$ est la solution de l'équation (101) correspondant aux données

$$v''_{o,-1} = 1$$

$$v''_{m,-1} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$v''_{o,n} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Nous aurons d'après la formule (25)

$$u''_{m,n} = \frac{c}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} [a^{m-1} (ab+c)^{n-1}] + \frac{a}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^u} [a^{m-1} (ab + c)^n].$$

Mais

$$\frac{a}{n\,!}\,\frac{\partial^n}{\partial a^n}\,[a^{m-1}(ab+c)^n] = \frac{a\,h}{n\,!}\,\frac{\partial^n}{\partial a^n}\,[a^{m-1}(ab+c)^{n-1}]$$

$$+\frac{ab}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}\,(ab+c)^{n-1}]$$

de sorte que

$$u''_{m,\,n} = h\left[\frac{a}{n\,!}\,\frac{\partial^n}{\partial a^n}\,[a^{m-1}\,(ab+c)^{n-1}] + \frac{1}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}\,(ab+c)^{n-1}]\right]$$

c'est-à-dire

$$\text{(106)} \qquad \boxed{u''_{m,\,n} = \frac{h}{n\,!}\,\frac{\partial^n}{\partial a^n}\,[a^m(ab+c)^{n-1}]}\,.$$

En revenant maintenant à la formule (103) et en utilisant la formule fondamentale (30), nous aurons

$$\text{(107)} \qquad u_{m,\,n} = u_{o,\,n}\,a^m + \frac{u_{o,\,n-1}}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[(ab+c)^m]$$

$$+\frac{u_{o,\,n-2}}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[b\,(ab+c)^m]$$

$$+\dots+\frac{u_{o,\,1}}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[b^{n-2}(ab+c)^m] + \frac{h}{n\,!}\,\frac{\partial^n}{\partial a^n}\,[a^m(ab+c)^{n-1}].$$

En développant les calculs, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
u_{m,\,n} = {} & u_{o,\,n}\,a^m \\
& + u_{o,\,n-1}\,[C_m^1\,h a^{m-1}] \\
& + u_{o,\,n-2}\,[C_m^2\,h^2 a^{m-2} + C_m^1\,C_1^1\,h a^{m-1}\,b] \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + u_{o,\,1}\,[C_m^{n-1}\,h^{n-1}\,a^{m-n+1} + C_m^{n-2}\,C_{n-2}^1\,h^{n-2}\,a^{m-n}\,b + \dots] \\
& + \qquad [C_m^n\,h^n\,a^{m-n} + C_m^{n-1}\,C_{n-1}^1\,h^{n-1}\,a^{m-n-1}\,b + \dots].
\end{aligned}$$

En faisant $m = n$ et ensuite $n = 1, 2, \dots$ nous aurons pour satisfaire aux conditions

$$u_{m,\,n} = 0 \qquad\qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\dots)$$

le système d'équations

$$
(107')\qquad
\begin{aligned}
& u_{o,n}\, a^{n} \\
& + u_{o,n-1}\, a^{n-1}\, C_n^1\, h \\
& + u_{o,n-2}\, a^{n-2} [C_n^2\, h^2 + C_n^1\, C_1^1\, hab] \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + u_{o,1}\, a [C_n^{n-1}\, h^{n-1} + C_n^{n-2}\, C_{n-2}^1\, h^{n-2}\, ab + \dots + C_n^1\, C_{n-2}^{n-2}\, h(ab)^{n-2}] \\
& + \qquad [C_n^n\, h^n + C_n^{n-1}\, C_{n-1}^1\, h^{n-1}\, ab + \dots + C_n^1\, C_{n-1}^{n-1}\, h(ab)^{n-1}] = 0,
\end{aligned}
$$

où $n = 1, 2, \dots, n$ pour déterminer les inconnues $u_{o,1}, u_{o,2}, \dots, u_{o,n}$.

Posons pour abréger

$$(108)\qquad u_{o,p}\, a^p = w_p \quad , \quad ab = \alpha$$

et

$$(109)\qquad P_n^q = C_n^q\, h^q + C_n^{q-1}\, C_{q-1}^1\, h^{q-1}\, \alpha + \dots + C_n^1\, C_{q-1}^{q-1}\, h\alpha^{q-1}$$

où

$$q = 1, 2, \dots, n.$$

Avec ces notations on peut écrire l'équation (107′) sous la forme suivante

$$w_n + P_n^1\, w_{n-1} + P_n^2\, w_{n-2} + \dots + P_n^{n-1}\, w_1 + P_n^n = 0,$$

et en faisant $n = 1, 2, \dots, n$ nous aurons le système d'équations

$$
(110)\qquad
\boxed{
\begin{aligned}
& w_1 + P_1^1 = 0 \\
& w_2 + P_2^1\, w_1 + P_2^2 = 0 \\
& w_3 + P_3^1\, w_2 + P_3^2\, w_1 + P_3^3 = 0 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& w_n + P_n^1\, w_{n-1} + P_n^2\, w_{n-2} + \dots + P_n^n = 0
\end{aligned}
}\ ,
$$

qui déterminent de proche en proche $w_1, w_2, \dots, w_n$.

39. Tachons de résoudre les premières équations (110), que nous écrivons sous la forme explicite

$$
\begin{aligned}
& w_1 + h = 0 \\
& w_2 + (C_2^1\, h)\, w_1 + (C_2^2\, h^2 + C_2^1\, h\alpha) = 0 \\
& w_3 + (C_3^1\, h)\, w_2 + (C_3^2\, h^2 + C_3^1\, C_1^1\, h\alpha)\, w_1 + (C_3^3\, h^3 \\
& \quad + C_3^2\, C_2^1\, h^2\alpha + C_3^1\, C_2^2\, h\alpha^2) = 0 \\
& w_4 + C_4^1\, h)\, w_3 + (C_4^2\, h^2 + C_4^1\, C_1^1\, h\alpha)\, w_2 + (C_4^3\, h^3 \\
& \quad + C_4^2\, C_2^1\, h^2\alpha + C_4^1\, C_2^2\, h\alpha^2)\, w_1 + (C_4^4\, h^4 + C_4^3\, C_3^1\, h^3\alpha \\
& \quad + C_4^2\, C_3^2\, h^2\alpha^2 + C_4^1\, C_3^3\, h\alpha^3) = 0.
\end{aligned}
$$

La première équation donne

$$w_1 = -h$$

La seconde donne

$$w_2 = 2h^2 - (h^2 + 2ha)$$

c'est-à-dire

$$w_2 = h^2 - 2ha.$$

La troisième équation donne

$$w_3 = -3h(h^2 - 2ha) + h(3h^2 + 3ha) - (h^3 + 6h^2a + 3ha^2)$$

c'est-à-dire

$$w_3 = -h^3 + 3h^2a - 3ha^2.$$

La quatrième équation donne

$$w_4 = -4h(-h^3 + 3h^2a - 3ha^2) - (6h^2 + 4ha)(h^2 - 2ha)$$
$$+ h(4h^3 + 12h^2a + 4ha^2) - (h^4 + 12h^3a + 18h^2a^2 + 4ha^3)$$

c'est-à-dire

$$w_4 = h^4 - 4h^3a + 6h^2a^2 - 4ha^3.$$

En résumé, la solution des quatre premières équations (110) est la suivante

$$\begin{aligned} w_1 &= (a-h) - a = -c - ab \\ w_2 &= (a-h)^2 - a^2 = \quad c^2 - (ab)^2 \\ w_3 &= (a-h)^3 - a^3 = -c^3 - (ab)^3 \\ w_4 &= (a-h)^4 - a^4 = \quad c^4 - (ab)^4. \end{aligned}$$

En général, nous allons démontrer que si de proche en proche, nous avons prouvé que

$$(111) \qquad w_i = (a-h)^i - a^i$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, alors w_n sera donné par une formule analogue, c'est-à-dire

$$(112) \qquad w_n = (a-h)^n - a^n.$$

Pour faire cette démonstration, il est utile de faire d'abord quelques transformations.

40. Dans la polynome P_n^q, donné par la formule (109) faisons la transformation

$$h = a + c.$$

En développant les calculs nous aurons

$$
\begin{aligned}
P_n^q = {} & C_n^q\,[c^q + C_q^1\, c^{q-1}a + C_q^2\, c^{q-2}a^2 + \dots + C_q^q\, a^q] \\
& + C_{q-1}^1\, C_n^{q-1}\,[c^{q-1}a + C_{q-1}^1\, c^{q-2}a^2 + \dots + C_{q-1}^{q-1}\, a^q] \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + C_{q-1}^{q-2}\, C_n^2\,[c^2\, a^{q-2} + C_2^1\, c\, a^{q-1} + C_2^2\, a^q] \\
& + C_{q-1}^{q-1}\, C_n^1\,[ca^{q-1} + C_1^1\, a^q]
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
P_n^q = {} & C_n^q\, c^q + (C_n^q\, C_q^1 + C_n^{q-1}\, C_{q-1}^1)\, c^{q-1}a + \dots \\
& + (C_n^q\, C_{q-1}^o\, C_q^i + C_n^{q-1}\, C_{q-1}^1\, C_{q-1}^{i-1} + \dots + C_n^{q-i}\, C_{q-1}^i\, C_{q-i}^o)\, c^{q-i}a^i \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + (C_n^q\, C_{q-1}^o\, C_q^q + C_n^{q-1}\, C_{q-1}^1\, C_{q-1}^{q-1} + \dots + C_n^1\, C_{q-1}^{q-1}\, C_1^1)\, a^q.
\end{aligned}
$$

Remarquons que

$$C_n^q\, C_q^1 + C_n^{q-1}\, C_{q-1}^1 = C_n^{q-1}\,(C_{n-q+1}^1 + C_{q-1}^1) = C_n^{q-1}\, C_n^1.$$

Nous avons aussi

$$
\begin{aligned}
C_n^q\, C_q^2 + C_n^{q-1}\, C_{q-1}^1\, C_{q-1}^1 + C_n^{q-2}\, C_{q-1}^2 = C_n^{q-2}\, [C_{n-q+2}^2 \\
+ C_{n-q+2}^1\, C_{q-1}^1 + C_{q-1}^2\,] = C_n^{q-2}\, C_{n+1}^2.
\end{aligned}
$$

En général nous avons

$$
\begin{aligned}
C_n^{q-j} C_{q-1}^j C_{q-j}^{i-j} = {} & \frac{n\,(n-1)\dots(n-q+j+1)}{(q-j)\,!}\;\frac{(q-1)\,(q-2)\dots(q-j)}{j\,!}\,. \\
& \frac{(q-j)\,(q-j-1)\dots(q-i+1)}{(i-j)\,!} = \frac{n\,(n-1)\dots(n-q+i+1)}{(q-i)\,!} \\
& \frac{(n-q+i)\dots(n-q+j+1)}{(i-j)\,!}\;\frac{(q-1)\dots(q-j)}{j\,!}
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$C_n^{q-j}\, C_{q-1}^j\, C_{q-j}^{i-j} = C_n^{q-i}\, C_{n-q+i}^{i-j}\, C_{q-1}^j$$

et par suite

$$\sum_{j=o}^{j=i} C_n^{q-j}\, C_{q-1}^j\, C_{q-i}^{i-j} = C_n^{q-i} \sum_{j=o}^{j=i} C_{n-q+i}^{i-j}\, C_{q-1}^j\,.$$

Mais

$$\sum_{j=o}^{j=i} C_{n-q+i}^{i-j}\, C_{q-1}^j = C_{n+i-1}^i$$

de sorte que

$$\sum_{j=o}^{j=i} C_n^{q-j}\, C_{q-1}^j\, C_{q-j}^{i-j} = C_n^{q-i}\, C_{n+i-1}^i$$

Il résulte alors que

$$
(113)\quad \boxed{\begin{aligned} P_n^q = C_n^q c^q + C_n^{q-1} C_n^1 c^{q-1} a + C_n^{q-2} C_{n+1}^2 c^{q-2} a^2 + \dots \\ + C_n^0 C_{n+q-1}^q a^q. \end{aligned}}
$$

Cette formule nous sera très utile pour achever la démonstration.

41. Calculons maintenant ϖ_n à l'aide de la dernière équation (110), sachant que $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{n-1}$ sont données par les formules (111). Nous aurons

$$
\begin{aligned} \varpi_n = - P_n^1 [(-c)^{n-1} - a^{n-1}] - P_n^2 [(-c)^{n-2} - a^{n-2}] - \dots \\ - P_n^{n-1} [(-c) - a] - P_n^n, \end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
(114)\qquad \varpi_n = (-1)^n P_n + P_n'
$$

où

$$
(115)\quad P_n = P_n^1 c^{n-1} - P_n^2 c^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} P_n^{n-1} c + (-1)^{n-1} P_n^n
$$

$$
(116)\quad P_n' = P_n^1 a^{n-1} + P_n^2 a^{n-2} + \dots + P_n^{n-2} a^2 + P_n^{n-1} a.
$$

En utilisant les formules (113), nous aurons

$$
\begin{aligned} P_n = (C_n^1 c + C_n^0 C_n^1 a)\, c^{n-1} - (C_n^2 c^2 + C_n^1 C_n^1 ca + C_n^0 C_{n+1}^2 a^2)\, c^{n-2} + \dots \\ + (-1)^{n-2} (C_n^{n-1} c^{n-1} + C_n^{n-2} C_n^1 c^{n-2} a + \dots + C_n^0 C_{2n-2}^{n-1} a^{n-1})\, c \\ + (-1)^{n-1} (C_n^n c^n + C_n^{n-1} C_n^1 c^{n-1} a + \dots + C_n^0 C_{2n-1}^n a^n), \end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned} P_n = [C_n^1 - C_n^2 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^n]\, c^n + C_n^1 [1 - C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}]\, c^{n-1} a \\ - C_{n+1}^2 [1 - C_n^1 + \dots + (-1)^{n-2} C_n^{n-2}]\, c^{n-2} a^2 + \dots \\ + (-1)^{n-2} C_{2n-2}^{n-1} [1 - C_n^1]\, ca^{n-1} + (-1)^{n-1} C_{2n-1}^n a^n. \end{aligned}
$$

En utilisant la formule

$$
1 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^q C_n^q = (-1)^q C_{n-1}^q
$$

il résulte que

$$
\begin{aligned} (115')\quad P_n = c^n + (-1)^{n-1} [C_n^1 C_{n-1}^{n-1} c^{n-1} a + C_{n+1}^2 C_{n-1}^{n-2} c^{n-2} a^2 + \dots \\ + C_{2n-2}^{n-1} C_{n-1}^1 ca^{n-1} + C_{2n-1}^n a^n] \end{aligned}
$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} P_n = {} & (C_n^{n-1}\, c^{n-1} + C_n^{n-2}\, C_n^1\, c^{n-2}\, a + \ldots + C_{2n-1}^{n-1}\, a^{n-1})\, a \\ & + (C_n^{n-2}\, c^{n-2} + C_n^{n-3}\, C_n^1\, c^{n-3}\, a + \ldots + C_{2n-3}^{n-2}\, a^{n-2})\, a^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (C_n^2\, c^2 + C_n^1\, C_n^1\, ca + C_{n+1}^2\, a^2)\, a^{n-2} \\ & + (C_n^1\, c + C_n^1\, a)\, a^{n-1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P'_n = {} & C_n^{n-1}\, c^{n-1}\, \alpha + C_n^{n-2}\, (1 + C_n^1)\, c^{n-2} a^2 + C_n^{n-3}\, (1 + C_n^1 + C_{n+1}^2)\, c^{n-3}\, \alpha^3 + \ldots \\ & + C_n^1\, (1 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{2n-3}^{n-2})\, c\alpha^{n-1} \\ & + (C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{2n-2}^{n-1})\, a^n \end{aligned}$$

ou

$$P'_n = C_n^{n-1} c^{n-1} a + C_n^{n-2} C_{n+1}^1\, c^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^1\, C_{2n-2}^{n-2}\, ca^{n-1} + (-1 + C_{2n-1}^{n-1})\, a^n.$$

Nous pouvons encore écrire

$$(116') \quad \begin{aligned} P'_n = {} & -a^n + C_n^1\, c^{n-1}\, a + C_{n+1}^2\, C_{n-1}^1\, c^{n-2}\, a^2 + \ldots \\ & + C_{2n-2}^{n-1}\, C_{n-1}^{n-2}\, c\alpha^{n-1} + C_{2n-1}^{n-1}\, a^n. \end{aligned}$$

Avec les formules (115′) et (116′), nous pouvons écrire la formule (114)

$$v_n = (-c)^n - a^n$$

et par suite la formule (112) est démontrée.

42. Reprenons maintenant les formules (108), (102), (112). Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & (v_1 + b)\, a = -c - ab \\ & (v_2 + bv_1 + b^2)\, a^2 = (-c)^2 - (ab)^2 \\ & (v_3 + bv_2 + b^2\, v_1 + b^3)\, a^3 = (-c)^3 - (ab)^3 \\ & (v_4 + bv_3 + b^2\, v_2 + b^3 v_1 + b^4)\, a^4 = (-c)^4 - (ab)^4 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} & v_2\, a^2 = (-c)^2 + abc \\ & v_3\, a^3 = (-c)^3 - ab\, (-c)^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & v_n\, a^n = (-c)^n - ab\, (-c)^{n-1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{v_n = -\frac{h}{a}\left(-\frac{c}{a}\right)^{n-1}}$$

Cette formule est valable pour $n = 2, 3, \ldots$.

Pour $n = 1$ nous avons

$$v_1 = -\frac{h + ab}{a}.$$

La fonction cherchée $f(y)$

$$f(y) = 1 + v_1 y + v_2 y^2 + \ldots$$

est donc

$$f(y) = 1 - \frac{h + ab}{a} y + \frac{hc}{a^2} y^2 \left[1 + \left(-\frac{c}{a}\right) y + \left(-\frac{c}{a}\right)^2 y^2 + \ldots\right]$$

c'est-a-dire

$$f(y) = 1 - \frac{h + ab}{a} y + \frac{hc}{a^2} \frac{y^2}{1 + \frac{c}{a} y}$$

ou bien

$$\boxed{f(y) = \frac{a - 2\,aby - bcy^2}{a + cy}}.$$

Nous avons donc démontré que si l'on développe la fonction

$$\boxed{F(xy) = \frac{a - 2\,aby - bcy^2}{(a + cy)(1 - ax - by - cxy)}} \tag{117}$$

suivant les puissances de x et de y, tous les termes en xy, $(xy)^2$, $(xy)^3$, ... ont les cœfficients nuls, et cette fonction est la seule jouissant de cette propriété.

43. Nous sommes aussi en mesure de donner l'expression du cœfficient $u_{m,n}$ du développement de la fonction (117) suivant les puissances de x et de y.

En remplaçant dans la formule (107) les $u_{0,p}$ par

$$u_{o,p} = -b^p + \left(-\frac{c}{a}\right)^b,$$

nous voyons que nous pouvons écrire

$$u_{m,n} = u'_{m,n} + u''_{m,n} + \frac{h}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} [a^m (ab + c)^{n-1}] \tag{118}$$

où $u'_{m,n}$ est la solution de l'équation (101) correspondant aux données

$$u'_{m,o} = 0 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$
$$u'_{o,n} = -b^n \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

et où $u''_{m,n}$ est la solution de l'équation (101) correspondant aux données

$$u''_{m,o} = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$u''_{o,n} = \left(-\frac{c}{a}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Remarquons que

$$u''_{1,n} = -cb^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$u''_{m,n} = -u'''_{m,n},$$

où $u'''_{m,n}$ est la solution de l'équation (101) correspondant aux données

$$u'''_{o,o} = 1$$

$$u'''_{m,o} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$u'''_{o,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Nous aurons donc, d'après la formule (25)

$$u''_{m,n} = -\frac{c}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}[b^{n-1}(ab+c)^{m-1}].$$

D'autre part, nous pouvons écrire

$$u'_{m,n} = -\frac{b}{c}u^{IV}_{m,n}$$

où $u^{IV}_{m,n}$ est la solution de l'équation (101) correspondant aux données

$$u^{IV}_{-1,o} = 1$$

$$u^{IV}_{-1,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$u^{IV}_{m,o} = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Nous aurons donc d'après la formule (25)

$$u'_{m,n} = -\frac{b}{m!}\frac{\partial^m}{\partial b^m}[b^{n-1}(ab+c)^m].$$

Il en résulte que

$$-(u'_{m,n}+u''_{m,n}) = \frac{b}{m!}\frac{\partial^m}{\partial b^m}[b^{n-1}(ab+c)^m] + \frac{c}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}[b^{n-1}(ab+c)^{m-1}].$$

Mais

$$\frac{b}{m!}\frac{\partial^m}{\partial b^m}[b^{n-1}(ab+c)^m] = \frac{bh}{m!}\frac{\partial^m}{\partial b^m}[b^{n-1}(ab+c)^{m-1}]$$

$$+\frac{ab}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}[b^{n-1}(ab+c)^{m-1}]$$

de sorte que

$$-(u'_{m,n}+u''_{m,n}) = h\left[\frac{b}{m\,!}\frac{\partial^m}{\partial b^m}[b^{n-1}(ab+c)^{m-1}]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(m-1)\,!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}[b^{n-1}(ab+c)^{m-1}]\right]$$

$$=\frac{h}{m\,!}\frac{\partial^m}{\partial b^m}[b^n(ab+c)^{m-1}].$$

En revenant à la formule (118), nous aurons donc

$$u_{m,n}=h\left[\frac{1}{n\,!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}[a^m(ab+c)^{n-1}]-\frac{1}{m\,!}\frac{\partial^m}{\partial b^m}[b^n(ab+c)^{m-1}]\right].$$

En développant les calculs, on trouve

$$u_{m,n}=h\,[(C_m^1-C_n^1)\,a^{m-1}\,b^{n-1}+(C_m^2\,C_{n-1}^1-C_n^2\,C_{m-1}^1)\,a^{m-2}\,b^{n-2}\,h$$

$$+(C_m^3\,C_{n-1}^2-C_n^3\,C_{m-1}^2)\,a^{m-3}\,b^{n-3}\,h^2+\dots].$$

Mais

$$C_m^k\,C_{n-1}^{k-1}-C_n^k\,C_{m-1}^{k-1}=\frac{m-n}{k}\,C_{m-1}^{k-1}\,C_{n-1}^{k-1},$$

et par suite

$$\text{(119)}\quad \boxed{\begin{aligned}u_{m,n}=(m-n)\,h\,\Big[&a^{m-1}\,b^{n-1}+\frac{C_{m-1}^1\,C_{n-1}^1}{2}\,a^{m-2}\,b^{n-2}\,h\\&+\frac{C_{m-1}^2\,C_{n-1}^2}{3}\,a^{m-3}\,b^{n-3}\,h^2+\frac{C_{m-1}^3\,C_{n-1}^3}{4}\,a^{m-4}\,b^{n-4}\,h^3+\dots\Big]\end{aligned}}$$

Telle est l'expression de $u_{m,n}$. Le développement se termine par le terme pour lequel l'exposant de a ou de b est nul.

VII. EQUATION DE RÉCURRENCE LINÉAIRE, A DEUX INDICES ET «AVEC SECOND MEMBRE»

44. Nous allons considérer maintenant, l'équation de récurrence à deux indices et «avec second membre»

$$\text{(120)}\quad \boxed{u_{m,n}=au_{m-1,n}+bu_{m,n-1}+cu_{m-1,n-1}+f(m,n)}$$

où $f(m,n)$ est une fonction connue de m et de n.

Nous allons chercher la solution de cette équation correspondant aux données

(121) $$u_{m,o} \qquad (m = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$
$$u_{o,n} \qquad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

On peut supposer que les données (121) sont nulles.

En effet, considérons l'équation homogène (120) et désignons par $V_{m,n}$ la solution qui correspond aux données (121). En posant

$$w_{m,n} = u_{m,n} - v_{m,n}$$

nous voyons que $w_{m,n}$ satisfait à l'équation (120) et que nous avons

$$w_{m,o} = 0 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$
$$w_{o,n} = 0 \qquad (n = 1,\ 2, \ldots).$$

Il résulte qu'il suffit de s'occuper de l'équation (120), en supposant nulles les données (120).

Nous allons donner une formule intéressante pour cette solution, dans le cas où $f(m, n)$ ne dépend pas de b.

Introduisons les polynomes en b

(122) $$\boxed{F_{m,n} = f(m, n) + b\,f(m, n-1) + b^2 f(m, n-2) + \ldots + b^{n-1} f(m, 1)}$$

Démontrons la relation suivante

(123) $$\boxed{F_{m,n-1} + b\,F_{m,n-2} + \ldots + b^{n-2} F_{m,1} = \frac{\partial F_{m,n}}{\partial b}}$$

En effet, nous avons

$$F_{m,n-1} = f(m, n-1) + b\,f(m, n-2) + \ldots + b^{n-2} f(m, 1)$$
$$F_{m,n-2} = f(m, n-2) + b\,f(m, n-3) + \ldots + b^{n-3} f(m, 1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{m,2} = f(m, 2) + b\,f(m, 1)$$
$$F_{m,1} = f(m, 1).$$

En multipliant ces relations par $1, b, \ldots, b^{n-2}$ et en les ajoutant, nous obtenons

$$F_{m,n-1} + b\,F_{m,n-2} + \ldots + b^{n-2} F_{m,1} = f(m, n-1)$$
$$+ 2\,b\,f(m, n-2) + \ldots + (n-1)\, b^{n-2} f(m, 1)$$

et puisque $f(m, n)$ ne dépend pas de b, il résulte la formule (123)

On démontre de la même manière, que

$$(124)\quad \boxed{\frac{\partial F_{m,n-1}}{\partial b} + b\frac{\partial F_{m,n-2}}{\partial b} + \ldots + b^{n-3}\frac{\partial F_{m,2}}{\partial b} = \frac{1}{2\,!}\frac{d^2 F_{m,n}}{\partial b^2}}$$

et en général

$$(125)\quad \boxed{\begin{aligned}\frac{1}{p\,!}\left[\frac{\partial^p F_{m,n-1}}{\partial b^p} + b\frac{\partial^p F_{m,n-2}}{\partial b^p} + \ldots + b^{n-p-2}\frac{\partial^p F_{m,p+1}}{\partial b^p}\right]\\ = \frac{1}{(p+1)\,!}\frac{\partial^{p+1} F_{m,n}}{\partial b^{p+1}}\end{aligned}}$$

46. Introduisons maintenant les polynomes

$$(126)\quad G^p_{m,n} = \frac{1}{p\,!}\left[\frac{\partial^p}{\partial b^p}[(ab+c)^p F_{m,n-1}] + b\frac{\partial^p}{\partial b^p}[(ab+c)^p F_{m,n-2}] + \ldots + b^{n-2}\frac{\partial^p}{\partial b^p}[(ab+c)^p F_{m,1}]\right]$$

et démontrons la formule

$$(127)\quad \boxed{\begin{aligned}G^p_{m,n} = \frac{(ab+c)^p}{(p+1)\,!}\frac{\partial^{p+1} F_{m,n}}{\partial b^{p+1}} + C^1_p\, a\frac{(ab+c)^{p-1}}{p\,!}\frac{\partial^p F_{m,n}}{\partial b^p}\\ + C^2_p\, a^2\frac{(ab+c)^{p-2}}{(p-1)\,!}\frac{\partial^{p-1} F_{m,n}}{\partial b^{p-1}} + \ldots + C^p_p a^p\frac{\partial F_{m,n}}{\partial b}\end{aligned}}$$

En effet, développons

$$\frac{1}{p\,!}\frac{\partial^p}{\partial b^p}[(ab+c)^p F_{m,n-1}]$$

suivant la formule de Leibnitz; nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{1}{p\,!}\frac{\partial^p}{\partial b^p}\left[(ab+c)^p F_{m,n-1}\right] = \frac{1}{p\,!}\Big[(ab+c)^p\frac{\partial^p F_{m,n-1}}{\partial b^p} + C^1_p pa(ab+c)^{p-1}\frac{\partial^{p-1} F_{m,n-1}}{\partial b^{p-1}}\\ + C^2_p p(p-1)a^2(ab+c)^{p-2}\frac{\partial^{p-2} F_{m,n-1}}{\partial b^{p-2}} + \ldots + C^p_p\, p(p-1)\ldots 1\, a^p F_{m,n-1}\Big]\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\frac{1}{p\,!}\frac{\partial^p}{\partial b^p}[(ab+c)^p F_{m,n-1}] = \frac{(ab+c)^p}{p\,!}\frac{\partial^p F_{m,n-1}}{\partial b^p} + C^1_p\, a\frac{(ab+c)^{p-1}}{(p-1)\,!}\frac{\partial^{p-1} F_{m,n-1}}{\partial b^{p-1}}\\ + \ldots + C^p_p a^p F_{m,n-1}.\end{aligned}$$

En écrivant les identités analogues pour $F_{m,n-2}, F_{m,n-3}, \ldots F_{m,1}$, en multipliant ensuite ces formules par $1, b, b^2, \ldots b^{n-2}$ et en les ajoutant, on obtient, d'après les formules (125), la formule (127).

47. Nous pouvons maintenant passer à la résolution du problème posé à la fin du No. 44.

En faisant dans l'équation (120) $n = 1, 2, \ldots, n$ nous avons les équations

$$\begin{aligned} u_{m,1} &= a u_{m-1,1} + f(m, 1) \\ u_{m,2} &= b u_{m,1} + a u_{m-1,2} + c u_{m-1,1} + f(m, 2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{m,n} &= b u_{m,n-1} + a u_{m-1,n} + c u_{m-1\,n-1} f(m, n) \end{aligned}$$

d'où résulte que

$$u_{m,n} = a u_{m-1,n} + (ab + c)\,[u_{m-1,n-1} + b u_{m-1,n-2} + \ldots + b^{n-2} u_{m-1,1}] + f(m, n) + b f(m, n-1) + \ldots + b^{n-1} f(m, 1)$$

on bien, en utilisant la notation (122),

$$(128) \quad u_{m,n} = F_{m,n} + a u_{m-1,n} + (ab + c)\,[u_{m-1,n-1}\, b u_{m-1,n-2} + \ldots + b^{n-2} u_{m-1,1}].$$

En faisant $m = 1$, dans cette formule, on obtient

$$(129) \quad \boxed{u_{1,n} = F_{1,n}}$$

Ensuite, en faisant dans la formule (128) $m = 2$, on obtient

$$u_{2,n} = F_{2,n} + a\, F_{1,n} + (ab + c)\;[F_{1,n-1} + b F_{1,n-2} + \ldots + b^{n-2} F_{1,1}]$$

on bien, en utilisant la formule (123), on peut écrire

$$u_{2,n} = F_{2,n} + a\, F_{1,n} + (ab + c)\,\frac{\partial F_{1,n}}{\partial b}$$

c'est-à-dire

$$(130) \quad \boxed{u_{2,n} = F_{2,n} + \frac{1}{1!}\,\frac{\partial}{\partial b}\,[(ab + c) F_{1,n}]}$$

En général, nous allons démontrer que

$$(131) \quad \boxed{\begin{aligned} u_{m,n} = {} & F_{m,n} + \frac{1}{1!}\,\frac{\partial}{\partial b}\,[(ab + c)\, F_{m-1,n}] + \frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2}{\partial b^2}\,[(ab \\ & + c)^2 F_{m-2,n}] + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[(ab + c)^{m-1} F_{1,n}]. \end{aligned}}$$

Cette formule est vraie pour $m = 2$. Nous démontrerons que si elle est vraie pour l'indice m, elle sera encore vraie pour l'indice $m + 1$.

En remplaçant m par $m + 1$ dans la formule (128), nous aurons

$$u_{m+1,\,n} = F_{m+1,\,n} + au_{m,\,n} + (ab + c)\,[u_{m,\,n-1} + bu_{m,\,n-2} + \dots + b^{n-2}\,u_{m,\,1}]$$

En utilisant les formules (126), (127), et (131) nous aurons

$$\begin{aligned} u_{m,\,n-1} + bu_{m,\,n-2} + \dots + b^{n-2}\,u_{m,\,1} &= \frac{\partial F_{m,\,n}}{\partial b} \\ &+ \frac{ab + c}{2\,!}\,\frac{\partial^2 F_{m-1,\,n}}{\partial b^2} + C_1^1\,a\,\frac{\partial F_{m-1,\,n}}{\partial b} \\ &+ \frac{(ab + c)^2}{3\,!}\,\frac{\partial^3 F_{m-2,\,n}}{\partial b^3} + C_2^1\,a\,\frac{b + c}{2\,!}\,\frac{\partial^2 F_{m-2,\,n}}{\partial b^2} + C_2^2\,a^2\,\frac{\partial F_{m-2,\,n}}{\partial b} \\ &+ \dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{(ab + c)^{m-1}}{m\,!}\,\frac{\partial^m F_{1,\,n}}{\partial b^m} + C_{m-1}^1\,a\,\frac{(ab + c)^{m-2}}{(m - 1)\,!}\,\frac{\partial^{m-1} F_{1,\,n}}{\partial b^{m-1}} \\ &+ \dots + C_{m-1}^{m-1}\,a^{m-1}\,\frac{\partial F_{1,\,n}}{\partial b} \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} u_{m+1,\,n} = F_{m+1,\,n} &+ a\Big[F_{m,\,n} + \frac{1}{1\,!}\,\frac{\partial}{\partial b}\,(ab + c)\;F_{m-1,\,n}] \\ &+ \dots + \frac{1}{(m - 1\,!)}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}}\,[(ab + c)^{m-1}\,F_{1,\,n}]\Big] \\ &+ (ab+c)\Big[\frac{\partial F_{m,\,n}}{\partial b} + \Big(\frac{ab+c}{2\,!}\,\frac{\partial^2 F_{m-1,\,n}}{\partial b^2} + C_1^1 a\,\frac{\partial F_{m-1,\,n}}{\partial b}\Big) + \dots \\ &+ \Big(\frac{(ab + c)}{(p + 1)\,!}\,\frac{\partial^{p+1} F_{m-p,\,n}}{\partial b^{p+1}} + \dots + C_p^p\,a^p\,\frac{\partial F_{m-p,\,n}}{\partial b}\Big) \\ &+ \dots\dots\dots\dots \\ &+ \Big(\frac{(ab + c)^{m-1}}{m\,!}\,\frac{\partial^m F_{1,\,n}}{\partial b^m} + \dots + C_{m-1}^{m-1}\,a^{m-1}\,\frac{\partial F_{1,\,n}}{\partial b}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant l'identité suivante

$$\text{(133)}\quad \frac{a}{p\,!}\,\frac{\partial^p}{\partial b^p}\,[(ab+c)^p F_{m-p,n}] + (ab+c)\left[\frac{(ab+c)^p}{(p+1)\,!}\,\frac{\partial^{p+1} F_{m-p,n}}{\partial b^{p+1}} + \dots + C_p^p a^p\,\frac{\partial F_{m-p,n}}{\partial b}\right]$$

$$= \frac{1}{(p+1\,!)}\,\frac{\partial^{p+1}}{\partial b^{p+1}}\,[(ab+c)^{p+1}\,F_{m-p,\,n}] \quad (p = 0, 1, \dots, m-1)$$

En effet, en appliquant la formule de Leibnitz le premier membre de cette formule peut s'écrire

$$\frac{a}{p\,!}\left[(ab+c)^p\frac{\partial^p F_{m-p,n}}{\partial b^p}+C_p^1\,ap(ab+c)^{p-1}\frac{\partial^{p-1}F_{m-p,n}}{\partial b^{p-1}}+\ldots+C_p^p a^p\frac{\partial F_{m-p,n}}{\partial b}\right]$$

$$+(ab+c)\left[\frac{(ab+c)^p}{(p+1)\,!}\frac{\partial^{p+1}F_{m-p,n}}{\partial b^{p+1}}+C_p^1\,a\frac{(ab+c)^{p-1}}{p\,!}\frac{\partial^p F_{m-p,n}}{\partial b^p}\right.$$

$$\left.+C_p^2\,a^2\frac{(ab+c)^{p-2}}{(p-1)\,!}\frac{\partial_{p-1}F_{m-p,n}}{\partial b^{p-1}}+\ldots+C_p^p a^p\frac{\partial F_{m-p,n}}{\partial b}\right]$$

et cette expression peut encore s'écrire

$$\frac{(ab+c)^{p+1}}{(p+1)\,!}\frac{\partial^{p+1}F_{m-p,n}}{\partial b^{p+1}}+(C_p^1+1)\,a\frac{(ab+c)^p}{p\,!}\frac{\partial^p F_{m-p,n}}{\partial b^p}$$

$$+(C_p^2+C_p^1)\,a^2\frac{(ab+c)^{p-1}}{(p-1)\,!}\frac{\partial^{p-1}F_{m-p,n}}{\partial b^{p-1}}+\ldots+C_p^p a^{p+1}\frac{\partial F_{m-p,n}}{\partial b},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(ab+c)^{p+1}}{(p+1)\,!}\frac{\partial^{p+1}F_{m-p,n}}{\partial b^{p+1}}+C_{p+1}^1 a\frac{(ab+c)^p}{p\,!}\frac{\partial^p F_{m-p,n}}{\partial b^p}+\ldots+C_{p+1}^{p+1}a^{p+1}F_{m-p,n},$$

d'où il résulte la formule (133).

En revenant à la formule (132), et en utilisant la formule (133), nous aurons

$$u_{m+1,n}=F_{m+1,n}+\frac{1}{1\,!}\frac{\partial}{\partial b}[(ab+c)F_{m,n}]+\frac{1}{2\,!}\frac{\partial^2}{\partial b^2}[(ab+c)^2F_{m-1,n}]$$

$$+\ldots+\frac{1}{m\,!}\frac{\partial^m}{\partial b^m}[(ab+c)^m F_{1,n}],$$

ce qui prouve que la formule (131) est générale.

SECONDE PARTIE

48. Dans la seconde partie de notre travail, nous considérons l'équation à trois indices

$$(1)\qquad u_{m,n,p}=a\,u_{m-1,n,p}+bu_{m,n-1,p}+c\,u_{m-1,n-1,p}+a'u_{m-1,n,p-1}$$
$$+b'u_{m,n-1,p-1}+c'u_{m-1,n-1,p-1}+ku_{m,n,p-1}$$

où a, b, c, a', b', c', k sont des constantes quelconques, et nous nous poserons le même problème qu'au No. 1, c'est-à-dire, *déterminer la solution de l'équation* (1), *connaissant les valeurs de* $u_{\alpha,\beta,\gamma}$ *pour toutes les valeurs des entiers* α, β, γ *dont l'un au moins est nul.*

Nous pouvons employer une image géométrique, en faisant corespondre aux nombres entiers, m, n, p le point de coordonnées (m, n, p) par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.

Notre problème peut s'énoncer ainsi: *déterminer la solution de l'équation* (1), *dans un point quelconque de l'espace de coordonnées entières*; m, n, p, *connaissant les valeurs de* u, *sur les plans* yoz, zox, xoy, *pour tous les points de coordonnées entières.*

Nous suivrons la même méthode qu'au No. 1, en commençant par résoudre d'abord troisproblèmes élémentaires.

1°. *Déterminer la solution de l'équation* (1), *sachant qu'elle est nulle partout sur les plans* yOz, zOx, xOy, *sauf au point de coordonnées* $(m', n', 0)$ *où elle est égale à 1* (on suppose $(m'n' = 0)$.

Cette solution sera désignée par $u^{m', n', o}_{m, n, p}$.

2°. *Déterminer la solution de l'équation* (1), *sachant qu'elle est nulle sur les plans* yOz, zOx, xOy, *sauf au point de coordonées* $(m', 0, 0)$ *où elle est égale à* (1) (on suppose $m' \neq 0$).

Cette solution sera désignée par $u^{m', o, o}_{m, n, p}$.

3°. *Déterminer la solution de l'équation* (1), *sachant qu'elle est nulle sur les plans* yOz, zOx, xOy *sauf à l'origine, où elle est égale à 1.*

Cette solution sera désignée par $u^{o, o, o}_{m, n, p}$.

Il résulte du caractère linéaire de l'équation (1), que la solution qui prend les valeurs données

$$(2) \quad u_{o,o,o} \; ; \; u_{i,o,o} \, , \; u_{o,j,o} \, , \; u_{o,o,k} \; ; \; u_{i,j,o} \, , \; u_{o,j,k} \, , \; u_{i,o,k} \, ;$$

pour les points de coordonnées (o, o, o), (i, o, o), (o, j, o), (o, o, k), (i, j, o), (o, j, k), (i, o, k) où les entiers i, j, k prennent toutes les valeurs à partir de 1, sera donnée par la formule

$$(3) \quad u_{m,n,p} = u_{o,o,o} \, u^{o,o,o}_{m,n,p} + \sum_{i=1}^{m} u_{i,o,o} \, u^{i,o,o}_{m,n,p} + \sum_{j=1}^{n} u_{o,j,o} \, u^{o,j,o}_{m,n,p}$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} u_{o,o,k} \, u^{o,o,k}_{m,n,p} + \sum_{i,j=1}^{m,n} u_{i,j,o} \, u^{i,j,o}_{m,n,p} + \sum_{i,j=1}^{m,p} u_{i,o,k} \, u^{i,o,k}_{m,n,p}$$
$$+ \sum_{j,k=1}^{n,p} u_{o,j,k} \, u^{o,j,k}_{m,n,p} .$$

I. LA SOLUTION $u^{1, 1, 0}_{m, n, p}$

49. Déterminons la solution $u^{1,1,0}_{m,n,p}$ de l'équation (1) que nous désignerons par $\lambda_{m,n,p}$.

Donnons d'abord quelques formules préliminaires.

Si dans l'équation

$$(4) \quad \lambda_{m,n,p} = a\lambda_{m-1,n,p} + b\lambda_{m,n-1,p} + c\lambda_{m-1,n-1,p}$$
$$+ a'\lambda_{m-1,n,p-1} + b'\lambda_{m,n-1,p-1} + c'\lambda_{m-1,n-1,p-1} + k\lambda_{m,n,p-1}$$

nous faisons $m = n = 1$, nous obtenons l'équation à un seul indice p

$$\lambda_{1,1,p} = k\lambda_{1,1,p-1} .$$

Sachant que $\lambda_{1,1,0} = 1$, on déduit

(5) $$\boxed{\lambda_{1,1,p} = k^p}.$$

Si dans l'équation (4) nous faisons $m = 1$, nous aurons l'équation à deux indices n et p

$$\lambda_{1,n,p} = b\lambda_{1,n-1,p} + k\lambda_{1,n,p-1} + b'\lambda_{1,n-1,p-1}$$

que nous pouvons écrire sous la forme

$$V_{n,p} = bV_{n-1,p} + kV_{n,p-1} + b'V_{1,n-1,p-1},$$

en posant

$$\lambda_{1,n,p} = V_{n,p}.$$

Nous savons que

$$V_{1,0} = 1$$

$$V_{n,0} = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

$$V_{0,p} = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

Il résulte que $V_{n,p}$ sera donné par notre formule fondamentale (14) de la première partie, c'est-à-dire

$$V_{n,p} = \frac{bk + b'}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}} [k^p (bk + b')^{n-2}]$$

d'où il résulte que

(6) $$\boxed{\lambda_{1,n,p} = \frac{bk + b'}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}} [k^p (bk + b')^{n-2}]}$$

On établit de la même manière, la formule

(7) $$\boxed{\lambda_{m,1,p} = \frac{ak + a'}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial k^{m-1}} [k^p (ak + a')^{m-2}]}$$

50. Faisons dans l'équation (4), $p = 1$, et cherchons une formule pour $\lambda_{m,n,1}$.

Il résulte immédiatement de l'équation

$$\lambda_{m,n,1} = a\lambda_{m-1,n,1} + b\lambda_{m,n-1,1} + c\lambda_{m-1,n-1,1}$$
$$+ a'\lambda_{m-1,n,0} + b'\lambda_{m,n-1,0} + c'\lambda_{m-1,n-1,0} + k\lambda_{m,n,0}$$

que

$$\lambda_{1,1,1} = k$$

$$\lambda_{2,1,1} = ak + a'$$

$$\lambda_{1,2,1} = bk + b'$$

(8) $$\lambda_{2,2,1} = a(bk + b') + b(ak + a') + ck + c'.$$

Pour d'autres valeurs de m et de n, nous aurons l'équation à deux indices m et n

$$\lambda_{m,n,1} = a\lambda_{m-1,n,1} + b\lambda_{m,n-1,1} + c\lambda_{m-1,n-1,1}.$$

Les formules (6) et (7) où l'on fait $p = 1$, donnent

$$\lambda_{1,n,1} = \frac{bk+b'}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}}\,[k\,(bk+b')^{n-2}]$$

$$\lambda_{m,1,1} = \frac{ak+a'}{(m-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}}\,[k\,(ak+a')^{n-2}]$$

c'est-à-dire

$$(9)\qquad \begin{aligned} \lambda_{1,n,1} &= b^{n-2}\,(bk+b') && (n \neq 1) \\ \lambda_{m,1,1} &= a^{m-2}\,(ak+a') && (m \neq 1) \end{aligned}$$

En posant

$$(10)\qquad \lambda_{m,n,1} = w_{m-1,n-1},$$

on voit que $w_{m,n}$ satisfait à l'équation à deux indices

$$(11)\qquad w_{m,n} = aw_{m-1,n} + bw_{m,n-1} + cw_{m-1,n-1}$$

qui a été étudiée dans la première partie de ce travail. Pour cette équation nous savons que

$$(9')\qquad \begin{aligned} w_{m,o} &= a^{m-1}\,(ak+a') && (m \neq 0) \\ w_{o,n} &= b^{n-1}\,(bk+b') && (n \neq 0) \end{aligned}$$

Nous n'avons pas la valeur de $w_{o,o}$ qui ne peut pas être donnée par la formule (10); nous la déduirons de la valeur de $\lambda_{2,2,1}$ en écrivant que $w_{1,1}$ satisfait à l'équation (11). Nous aurons

$$w_{1,1} = aw_{o,1} + bw_{1,o} + cw_{o,o},$$

d'où

$$cw_{o,o} = \lambda_{2,2,1} - a\lambda_{1,2,1} - b\lambda_{2,1,1}$$

c'est-à-dire

$$(12)\qquad w_{o,o} = \frac{ck+c'}{c}.$$

Nous pouvons écrire

$$w_{m,n} = \frac{ak+a'}{c}\,\alpha_{m,n} + \frac{bk+b'}{c}\,\beta_{m,n} + \frac{ck+c'}{c}\,\gamma_{m,n}$$

où $\alpha_{m,n}$, $\beta_{m,n}$, $\gamma_{m,n}$ sont des solutions de l'équation (11) satisfaisant aux conditions suivantes

$$\begin{array}{ll}
\alpha_{-1,o} = 1 & \\
\alpha_{-1,n} = 0 & (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \\
\alpha_{m,o} \ = 0 & (m = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \\
\beta_{o,-1} \ = 1 & \\
\beta_{o,n} \ \ = 0 & (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \\
\beta_{m,-1} = 0 & m = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \\
\gamma_{o,o} \ \ = 1 & \\
\gamma_{m,o} \ = 0 & (m = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \\
\gamma_{o,n} \ \ = 0 & (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)
\end{array}$$

La détermination de la solution de l'équation (11) satisfaisant à ces conditions a été faite au No. 14. La formule (25) de la première partie nous donne

$$\alpha_{m,n} = \frac{C}{n\,!}\,\frac{\partial^n}{\partial a^n}\,]a^{m-1}(ab + c)^n]$$

$$\beta_{m,n} = \frac{c}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^m(ab + c)^{n-1}]$$

$$\gamma_{m,n} = \frac{c}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}(ab + c)^{n-1}].$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
w_{m,n} = {} & \frac{ak + a'}{n\,!}\,\frac{\partial^n}{\partial a^n}\,[a^{m-1}(ab + c)^n] + \frac{bk + b'}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^m(ab + c)^{n-1}] \\
& + \frac{ck + c'}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}(ab + c)^{n-1}] \\
= {} & \frac{1}{n\,!}\,\frac{\partial^n}{\partial a^n}\,[a^{m-1}(ab+c)^n(ak+a')] - \frac{k}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}(ab + c)^n] \\
& + \frac{a(bk+b')}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}(ab+c)^{n-1}] + \frac{bk+b'}{(n-2)\,!}\,\frac{\partial^{n-2}}{\partial a^{n-2}}\,[a^{m-1}(ab+c)^{n-1}] \\
& + \frac{ck + c'}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}(ab + c)^{n-1}] \\
= {} & \frac{1}{n\,!}\,\frac{\partial^n}{\partial a^n}\,[a^{m-1}(ab+c)^n(ak+a')] + \frac{ab'+c'}{(n-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,[a^{m-1}(ab+c)^{n-1}] \\
& + \frac{b'}{(n-2)\,!}\,\frac{\partial^{n-2}}{\partial a^{n-2}}\,[a^{m-1}(ab + c)^{n-1}]
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$w_{m,n} = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}[a^{m-1}(ab+c)^n(ak+a')]$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[a^{m-1}(ab+c)^{n-1}(ab'+c')]$$

et par suite

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{m,n,1} = {} & \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[a^{m-2}(ab+c)^{n-1}(ak+a')] \\ & + \frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial a^{n-2}}[a^{m-2}(ab+c)^{n-2}(ab'+c')]\end{aligned}} \tag{13}$$

C'est la formule finale que nous avions en vue. Elle est valable pour $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$.

Pour $m = 1$ et $n \geqslant 2$ et pour $n = 1$ et $m \geqslant 2$ nous avons d'après la formule (9)

$$\begin{aligned}\lambda_{m,1,1} &= a^{m-2}(ak+a') \\ \lambda_{1,n,1} &= b^{n-2}(bk+b')\end{aligned} \tag{13'}$$

et pour $m = 1$, $n = 1$, nous avons d'après la formule (5)

$$\lambda_{1,1,1} = k \tag{13'}$$

Remarquons que nous pouvons encore écrire la seconde formule (13') sous la forme

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{1,n,1} = {} & \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}[(ab+c)^{n-1}(ak+a')] \\ & + \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[(ab+c)^{n-2}(ab'+c')]\end{aligned}} \tag{13''}$$

En utilisant la notation (10) de la première partie

$$D_n[F(a, b, c, \ldots)] = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}[F(a, b, c, \ldots)]$$

nous pouvons écrire les formules (13) et (13'') sous la forme

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{m,n,1} = {} & D_{n-1}[a^{m-2}(ab+c)^{n-1}(ak+a')] \\ & + D_{n-2}[a^{m-2}(ab+c)^{n-2}(ab'+c')]\end{aligned}} \quad (m \geqslant 2, n \geqslant 2) \tag{13$_1$}$$

et

$$(13_2) \qquad \boxed{\begin{aligned} \lambda_{1,n,1} &= D_n\left[(ab+c)^{n-1}(ak+a')\right] \\ &\quad + D_{n-1}\left[(ab+c)^{n-2}(ab'+c')\right] \end{aligned}} \qquad (n \geqslant 2)$$

Nous pouvons aussi écrire la première et la troisième formule (13′) sous la forme

$$(13_3) \qquad \boxed{\begin{aligned} \lambda_{m,1,1} &= D_0\left[a^{m-2}(ak+a')\right] \\ \lambda_{1,1,1} &= D_1\left[ak+a'\right] \end{aligned}} \qquad (m \geqslant 2)$$

Faisons une remarque qui sera constamment observée dans la suite. L'expression de $\lambda_{1,n,1}$ donnée par la formule (13_2) lorsque $n \geqslant 2$ et par la seconde formule (13_3) lorsque $n = 1$, se déduit de l'expression de $\lambda_{m,n,1}$ [formule (13_1) ou (13_3)], en supprimant dans ces formules a^{m-2} et en augmentant l'indice de l'opération D, d'une unité.

51. Nous avons donné l'expression de $\lambda_{1,n,p}$ par la formule (6). Donnons le développement de $\lambda_{1,n,p}$ suivant les puissances de k.

Nous avons

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}}\left[k^p(bk+b')^{n-2}\right] = C_{n+p-2}^{p-1} b^{n-2} k^{p-1} + C_{n-2}^{1} C_{n+p-3}^{p-2} b^{n-3} b' k^{p-2}$$
$$+ \dots + C_{n-2}^{q} C_{n+p-q-2}^{p-q-1} b^{n-q-2} b'^{q} k^{p-q-1} + \dots$$

et en multipliant les deux membres par $bk + b'$, nous aurons

$$\lambda_{1,n,p} = C_{n+p-2}^{p-1} b^{n-1} k^p + \left(C_{n-2}^{1} C_{n+p-3}^{p-2} + C_{n+p-3}^{p-2}\right) b^{n-2} b' k^{p-1} + \dots$$
$$+ \left(C_{n-2}^{q} C_{n+p-q-2}^{p-q-1} + C_{n-2}^{q-1} C_{n+p-q-1}^{p-q}\right) b^{n-q-1} b'^{q} k^{p-q} + \dots$$

Mais il est facile de montrer que

$$C_{n-2}^{q} C_{n+p-q-2}^{p-q-1} + C_{n-2}^{q-1} C_{n+p-q-1}^{p-q} = C_{n+p-q-2}^{p-1} C_p^q$$

de sorte que, pour $n \geqslant p + 1$, nous avons

$$\lambda_{1,n,p} = C_{n+p-2}^{p-1} b^{n-1} k^p + C_{n+p-3}^{p-1} C_p^1 b^{n-2} b' k^{p-1} + \dots$$
$$+ C_{n+p-q-2}^{p-1} C_p^q b^{n-q-1} b'^q k^{p-q} + \dots + C_{n-2}^{p-1} C_p^p b^{n-p-1} b'^p.$$

Si $n = n' \leqslant p + 1$, nous avons

$$\lambda_{1,n',p} = C_{n'+p-2}^{p-1} b^{n'-1} k^p + C_{n'+p-3}^{p-1} C_p^1 b^{n'-2} b' k^{p-1} + \dots$$
$$+ C_{p-1}^{p-1} C_p^{n'-1} b'^{n-1} k^{p-n'+1}.$$

Nous pouvons écrire ces formules sous la forme

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{1,n,p} = {} & C^{p-1}_{n+p-2}\, D_{n+p-1}\, [(ab+c)^{n-1}(ak+a')^{p}] \\ & + C^{p-1}_{n+p-3}\, C^{1}_{p}\, D_{n+p-2}\, [(ab+c)^{n-2}(ak+a')^{p-1}(ab'+c')] \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + C^{p-1}_{n-2}\, C^{p}_{p}\, D_{n-1}\, [(ab+c)^{n-p-1}(ab'+c')^{p}]\end{aligned}} \tag{14}$$

lorsque $n \geqslant p+1$ et

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{1,n',p} = {} & C^{p-1}_{n'+p-2}\, D_{n'+p-1}\, [(ab+c)^{n'-1}(ak+a')^{p}] \\ & + C^{p-1}_{n'+p-3}\, C^{1}_{p}\, D_{n'+p-2}\, [(ab+c)^{n'-2}(ak+a')^{p-1}(ab'+c')] \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + C^{p-1}_{p-1}\, C^{n'-1}_{p}\, D_{p}\, [(ak+a')^{p-n'+1}(ab'+c')^{n'-1}]\end{aligned}} \tag{14'}$$

lorsque $n' \leqslant p+1$.

52. Nous sommes maintenant en mesure de donner l'expression générale de $\lambda_{m,n,p}$. Nous aurons la formule

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{m,n',p} = {} & C^{p-1}_{n'+p-2}\, D_{n'+p-2}\, [a^{m-2}(ab+c)^{n'-1}(ak+a')^{p}] \\ & + C^{p-1}_{n'+p-3}\, C^{1}_{p}\, D_{n'+p-3}\, [a^{m-2}(ab+c)^{n'-2}(ak+a')^{p-1}(ab'+c')] \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + C^{p-1}_{p-1}\, C^{n-1}_{p}\, D_{p-1}\, [a^{m-2}(ak+a')^{p-n'+1}(ab'+c')^{n'-1}]\end{aligned}} \tag{15}$$

lorsque $n' \leqslant p+1$, et

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{m,n,p} = {} & C^{p-1}_{n+p-2}\, D_{n+p-2}\, [a^{m-2}(ab+c)^{n-1}(ak+a')^{p}] \\ & + C^{p-1}_{n+p-3}\, C^{1}_{p}\, D_{n+p-3}\, [a^{m-2}(ab+c)^{n-2}(ak+a')^{p-1}(ab'+c')] \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + C^{p-1}_{n-2}\, C^{p}_{p}\, D_{m-2}\, [a^{m-2}(ab+c)^{n-p-1}(ab'+c')^{p}]\end{aligned}} \tag{15'}$$

lorsque $n \geqslant p+1$. Ces formules sont valables pour $m \geqslant 2$. Lorsque $m = 1$, nous avons les formules (14) et (14') démontrées pour toutes les valeurs de n et de p.

Les formules (15) et (15') sont vraies pour $p = 1$; elles coïncident avec les formules (13_1) et (13_3).

Nous allons supposer que les formules (15) et (15') sont vraies pour l'indice p et nous démontrerons qu'elles sont également vraies pour l'indice $p+1$.

53. Dans l'équation

$$\begin{aligned}\lambda_{m,n,p+1} = {} & a\lambda_{m-1,n,p+1} + b\lambda_{m,n-1,p+1} + c\lambda_{m-1,n-1,p+1} \\ & + a'\lambda_{m-1,n,p} + b'\lambda_{m,n-1,p} + c'\lambda_{m-1,n-1,p} + k\lambda_{m,n,p},\end{aligned}$$

faisons successivement $m = 1, 2, \ldots, m$. Nous aurons les équations

$$\begin{aligned}\lambda_{1,n,p+1} &= b\lambda_{1,n-1,p+1} + b'\lambda_{1,n-1,p} + k\lambda_{1,n,p} \\ \lambda_{2,n,p+1} &= a\lambda_{1,n,p+1} + b\lambda_{2,n-1,p+1} + c\lambda_{1,n-1,p+1} \\ &\quad + a'\lambda_{1,n,p} + b'\lambda_{2,n-1,p} + c'\lambda_{1,n-1,p} + k\lambda_{2,n,p} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{m,n,p+1} &= a\lambda_{m-1,n,p+1} + b\lambda_{m,n-1,p+1} + c\lambda_{m-1,n-1,p+1} \\ &\quad + a'\lambda_{m-1,n,p} + b'\lambda_{m,n-1,p} + c'\lambda_{m-1,n-1,p} + k\lambda_{m,n,p}\end{aligned}$$

d'où, en eliminant $\lambda_{1,n,p+1}; \lambda_{2,n,p+1}; \ldots; \lambda_{m-1,n,p+1}$ on obtient

$$\begin{aligned}(16)\quad \lambda_{m,n,p+1} = {} & b\lambda_{m,n-1,p+1} + (ab+c)[\lambda_{m-1,n-1,p+1} + a\lambda_{m-2,n-1,p+1} + \ldots \\ & + a^{m-3}\lambda_{2,n-1,p+1} + a^{m-2}\lambda_{1,n-1,p+1}] + b'\lambda_{m,n-1,p} \\ & + (ab'+c')[\lambda_{m-1,n-1,p} + a\lambda_{m-2,n-1,p} + \ldots + a^{m-3}\lambda_{2,n-1,p} \\ & + a^{m-2}\lambda_{1,n-1,p}] + k\lambda_{m,n,p} + (ak+a')[\lambda_{m-1,n,p} \\ & + a\lambda_{m-2,n,p} + \ldots + a^{m-3}\lambda_{2,n,p} + a^{m-2}\lambda_{1,n,p}].\end{aligned}$$

A l'aide de cette équation, de la formule fondamentale (11) de la première partie, ainsi que des formules (14), (14'), (15) et (15') nous démontrerons les formules (15) et (15') pour l'indice $p+1$.

1°. Dans l'équation (16) faisons $n = 1$; nous aurons

$$\begin{aligned}\lambda_{m,1,p+1} = {} & k\lambda_{m,1,p} + (ak+a')[\lambda_{m-1,1,p} + a\lambda_{m-2,1,p} + \ldots \\ & + a^{m-3}\lambda_{2,1,p} + a^{m-2}\lambda_{1,1,p}].\end{aligned}$$

Mais d'après les formules (15) et (15'), nous avons

$$\begin{aligned}\lambda_{m,1,p} &= D_{p-1}\,[a^{m-2}(ak+a')^p] \\ \lambda_{1,1,p} &= D_p\quad [(ak+a')^p].\end{aligned}$$

Il résultera d'après la formule (11) de la première partie que

$$(17)\qquad \lambda_{m,1,p+1} = D_p\,[a^{m-2}(ak+a')^{p+1}].$$

Nous avons ainsi démontré la formule (15) pour l'indice $p+1$ et $n' = 1$.

2°. Supposons que de proche en proche nous avons démontré la formule

$$(18)\quad \boxed{\begin{aligned}\lambda_{m,n',p+1} = {} & C^p_{n'+p-1}\,D_{n'+p-1}\,[a^{m-2}(ab+c)^{n'-1}(ak+a')^{p+1}] \\ & + C^p_{n'+p-2}\,C^1_{p+1}\,D_{n'+p-2}[a^{m-2}(ab+c)^{n'-2}(ak+a')^p(ab'+c')] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C^p_p\,C^{n'-1}_{p+1}\,D_p\,[a^{m-2}(ak+a')^{p-n'+2}(ab'+c')^{n'-1}]\end{aligned}}$$

pour $n' = 1, 2, \ldots, n'$ et démontrons que la même formule est valable aussi lorqu'on remplace n' par $n' + 1$.

Dans la formule (16) faisons $n = n' + 1$; nous aurons

$$\begin{aligned}\lambda_{m,\, n'+1,\, p+1} = {} & b\lambda_{m,\, n',\, p+1} + (ab + c)\,[\lambda_{m-1,\, n',\, p+1} + a\lambda_{m-2,\, n',\, p+1} + \ldots \\ & + a^{m-3}\,\lambda_{2,\, n',\, p+1} + a^{m-2}\,\lambda_{1,\, n',\, p+1}] + b'\lambda_{m,\, n',\, p} \\ & + (ab' + c')\,[\lambda_{m-1,\, n',\, p} + a\lambda_{m-2,\, n',\, p} + \ldots + a^{m-3}\,\lambda_{2,\, n',\, p} \\ & + a^{m-2}\,\lambda_{1,\, n',\, p}] + k\lambda_{m,\, n'+1,\, p} + (ak + a')\,[\lambda_{m-1,\, n'+1,\, p} \\ & + a\lambda_{m-2,\, n'+1,\, p} + \ldots + a^{m-3}\,\lambda_{2,\, n'+1,\, p} + a^{m-2}\,\lambda_{1,\, n'+1,\, p}].\end{aligned}$$

En tenant compte des formules (18), (15) et (14') nous aurons en appliquant d'une façon systématique la formule (11) de la première partie

$$\begin{aligned}\lambda_{m,\, n'+1,\, p+1} = {} & C^p_{n'+p-1}\; D_{n'+p}\,[a^{m-2}\,(ab + c)^{n'}\,(ak + a')^{p+1}] \\ & + C^p_{n'+p-2}\; C^1_{p+1}\, D_{n'+p}\,[a^{m-2}\,(ab + c)^{n'-1}\,(ak + a')^p\,(ab' + c')] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C^p_p\, C^{n'-1}_{p+1}\, D_p\,[a^{m-2}\,(ab + c)\,(ak + a')^{p-n'+2}\,(ab' + c')^{n'-1}] \\ & + C^{p-1}_{n'+p-2}\, D_{n'+p-1}\,[a^{m-2}\,(ab + c)^{n'-1}\,(ak + a')^p\,(ab' + c')] \\ & + C^{p-1}_{n'+p-3}\, C^1_p\, D_{n'+p-2}\,[a^{m-2}\,(ab + c)^{n'-2}\,(ak + a')^{p-1}\,(ab' + c')^2] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C^{p-1}_{p-1}\, C^{n'-1}_p\, D_p\,[a^{m-2}\,(ak + a')^{p-n'+1}\,(ab' + c')^{n'}] \\ & + C^{p-1}_{n'+p-1}\, D_{n'+p}\,[a^{m-2}\,(ab + c)^{n'}\,(ak + a')^{p+1}] \\ & + C^{p-1}_{n'+p-1}\, C^1_p\, D_{n'+p-1}\,[a^{m-2}\,(ab + c)^{n-1}\,(ak + a')^p\,(ab' + c')] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C^{p-1}_{p-1}\, C^{n'}_p\, D_p\,[a^{m-2}\,(ak + a')^{p-n'+1}\,(ab' + c')^{n'}].\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{gathered}C^p_{n'+p-1} + C^{p-1}_{n'+p-1} = C^p_{n'+p} \\ C^p_{n'+p-2}\, C^1_{p+1} + C^{p-1}_{n'+p-2} + C^{p-1}_{n'+p-2}\, C^1_p = C^p_{n'+p-1}\; C^1_{p+1} \\ C^p_{n'+p-3}\, C^2_{p+1} + C^{p-1}_{n'+p-3}\, C^1_p + C^{p-1}_{n'+p-3}\, C^2_p = C^p_{n'+p-2}\; C^2_{p+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C^{p-1}_{p-1}\, C^{n'-1}_p + C^{p-1}_{p-1}\, C^{n'}_p = C^p_p\, C^{n'}_{p+1},\end{gathered}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\lambda_{m,\, n'+1,\, p+1} = {} & C^p_{n'+p}\, D_{n'+p}\,[a^{m-2}\,(ab + c)^{n'}\,(ak + a')^{p+1}] \\ & + C^p_{n'+p-1}\, C^1_{p+1}\, D_{n'+p-1}\,[a^{m-2}\,(ab + c)^{n'-1}(ak + a')^p\,(ab' + c')] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C^p_p\, C^{n'}_{p+1}\, D_p\,[a^{m-2}\,(ak + a')^{p-n'+1}\,(ab' + c')^{n'}],\end{aligned}$$

et cette formule ayant la même forme que la formule (18), il résulte que la formule (28) est donc vraie pour $n' \leqslant p+1$.

3°. Lorsque $n = p+2$, la formule (16) nous donne

$$\begin{aligned}\lambda_{m,\,p+2,\,p+1} = b\lambda_{m,\,p+1,\,p+1} &+ (ab+c)\,[\lambda_{m-1,\,p+1,\,p+1} + a\lambda_{m-2,\,p+1,\,p+1} + \dots \\ &+ a^{m-2}\,\lambda_{1,\,p+1,\,p+1}] + b'\lambda_{m,\,p+1,\,p} + (ab'+c')\,[\lambda_{m-1,\,p+1,\,p} \\ &+ a\lambda_{m-2,\,p+1,\,p} + \dots + a^{m-2}\,\lambda_{1,\,p+1,\,p}] + k\lambda_{m,\,p+2,\,p} \\ &+ (ak+a')\,[\lambda_{m-1,\,p+2,\,p} + a\lambda_{m-2,\,p+2\,p} + \dots + a^{m-2}\,\lambda_{1,\,p+1,\,p}]\end{aligned}$$

et les formules (8), (15'), (14), (14') ainsi que la formule fondamentale (11) de la première partie montreront que

$$\begin{aligned}(19)\qquad \lambda_{m,\,p+2,\,p+1} = {} & C_{2p+1}^{p}\,D_{2p+1}\,[a^{m-2}\,(ab+c)^{p+1}\,(ak+a')^{p+1}] \\ & + C_{2p}^{p}\,C_{p+1}^{1}\,D_{2p}\,[a^{m-2}\,(ab+c)^{p}\,(ak+a')^{p}\,(ab'+c')] \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + C_{p}^{p}\,C_{p+1}^{p+1}\,D_{p}\,[a^{m-2}\,(ab'+c')^{p+1}],\end{aligned}$$

ce qui prouve que la formule (18) est vraie aussi lorsque $n' = p+2$.

4° Lorsque $n \geqslant p+2$, nous voulons démontrer la formule

$$\begin{aligned}(20)\quad \lambda_{m,\,n,\,p+1} = {} & C_{n+p-1}^{p}\,D_{n+p-1}\,[a^{m-2}\,(ab+c)^{n-1}\,(ak+a')^{p+1}] \\ & + C_{n+p-2}^{p}\,C_{p+1}^{1}\,D_{n+p-2}\,[a^{m-2}(ab+c)^{n-2}(ak+a')^{p}(ab'+c')] \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + C_{n-2}^{p}\,C_{p+1}^{p+1}\,D_{n-2}\,[a^{m-2}\,(ab+c)^{n-p-2}\,(ab'+c')^{p+1}].\end{aligned}$$

Cette formule est vraie pour $n = p+2$, puisqu'elle coincide avec la formule (19). Pour la démontrer en général, nous la supposerons vraie pour l'indice n et nous démontrerons qu'elle est encore vraie pour l'indice $n+1$.

Cela résultera de la formule (16) dans laquelle on remplacera n par $n+1$ et de l'application des formules (20), (15'), (14) et (11) de la première partie.

5° Ainsi les formules (15) et (15') sont démontrées dans toute leurs généralité.

Nous avons donc démontré que *la solution de l'équation de récurrence à trois indices*

$$\begin{aligned}\lambda_{m,\,n,\,p} = a\lambda_{m-1,\,n,\,p} &+ b\lambda_{m,\,n-1,\,p} + c\lambda_{m-1,\,n-1,\,p} \\ &+ a'\lambda_{m-1,\,n,\,p-1} + b'\lambda_{m,\,n-1,\,p-1} + c'\lambda_{m-1,\,n-1,\,p-1} + k\lambda_{m,\,n,\,p-1}\end{aligned}$$

nulle sur les plans yoz, zox, xoy sauf au point de coordonnées (1, 1, 0) *où elle doit être égale à 1, est donnée par la formule*

$$(21)\quad \boxed{\begin{aligned} \lambda_{m,n,p} = {} & C_{n+p-2}^{p-1}\, D_{n+p-2}\, [a^{m-2}(ab+c)^{n-1}(ak+a')^p] \\ & + C_{n+p-3}^{p-1}\, C_p^1\, D_{n+p-3}\, [a^{m-2}(ab+c)^{n-2}(ak+a')^{p-1}(ab'+c')] \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + C_{n-2}^{p-1}\, C_p^p\, D_{n-2}\, [a^{m-2}(ab+c)^{n-p-1}(ab'+c')^p] \end{aligned}}$$

lorsque $m \geqslant 2$ *et par*

$$(22)\quad \boxed{\begin{aligned} \lambda_{1,n,p} = {} & C_{n+p-2}^{p-1}\, D_{n+p-1}\, [(ab+c)^{n-1}(ak+a')^p] \\ & + C_{n+p-3}^{p-1}\, C_p^1\, D_{n+p-2}\, [(ab+c)^{n-2}(ak+a')^{p-1}(ab'+c')] \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + C_{n-2}^{p-1}\, C_p^p\, D_{n-1}\, [(ab+c)^{n-p-1}(ab'+c')^p] \end{aligned}}$$

lorsque $m = 1$.

On peut appliquer ces formules pour toute valeur de n, à condition de supposer $C_r^s = 0$, lorsque $r < s$.

On peut faire la remarque, que l'expression de $\lambda_{1,n,p}$ se déduit le l'expression de $\lambda_{m,n,p}$ en supprimant le facteur a^{m-2} dans la formule (21) et en augmentant d'une unité les indices des opérations D.

54. Dans les calculs précédents, le paramètre a nous a servi comme guide dans la recherche de la solution

$$u_{m,n,p}^{1,1,0} = \lambda_{m,n,p},$$

de l'équation (1) et nous a conduit aux formules (21) et (22). Nous aurions pu prendre aussi comme guide le paramètre b. Dans ce cas en écrivant l'équation (4) sous la forme

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n,p} = {} & b\lambda_{m,n-1,p} + a\lambda_{m-1,n,p} + c\lambda_{m-1,n-1,p} + b'\lambda_{m,n-1,p-1} \\ & + a'\lambda_{m-1,n,p-1} + c'\lambda_{m-1,n-1,p-1} + k\lambda_{m,n,p-1} \end{aligned}$$

nous aurions eu les formules suivantes

$$23)\quad \boxed{\begin{aligned} \lambda_{m,n,p} = {} & C_{m+p-2}^{p-1}\, \frac{1}{(m-p-2)!}\, \frac{\partial^{m+p-2}}{\partial b^{m+p-2}}\, [b^{n-2}(ab+c)^{m-1}(bk+b')^p] \\ & + C_{m+p-3}^{p-1}\, \frac{C_p^1}{(m+p-3)!}\, \frac{\partial^{m+p-3}}{\partial b^{m+p-3}}\, [b^{n-2}(ab+c)^{m-2}(bk+b')^{p-1}(ba'+c')] \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + C_{m-2}^{p-1}\, \frac{C_p^p}{(m-2)!}\, \frac{\partial^{m-2}}{\partial b^{m-2}}\, [b^{n-2}(ab+c)^{m-p-1}(ba'+c')^p]. \end{aligned}}$$

pour $n \geqslant 2$ et

$$
\boxed{\begin{aligned}
i_{m,1,p} = {} & C_{m+p-2}^{p-1} \frac{1}{(m+p-1)\,!} \frac{\partial^{m+p-1}}{\partial b^{m+p-1}} \left[(ab+c)^{m-1} (bk+b')^{p} \right] \\
& + C_{m+p-3}^{p-1} \frac{C_p^1}{(m+p-2)\,!} \frac{\partial^{m+p-2}}{\partial b^{m+p-2}} \left[(ab+c)^{m-2} (bk+b')^{p-1} (ba'+c') \right] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + C_{m-2}^{p-1} \frac{C_p^p}{(m-1)\,!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}} \left[(ab+c)^{m-p-1} (ba'+c')^{p} \right]
\end{aligned}} \tag{24}
$$

pour $n = 1$.

55. Nous avons donné à la fin du No. 53 et dans le No. 54, des formules pour $u_{m,n,p}^{1,1,o}$. A l'aide de ces formules nous pouvons aussi donner les expressions de $u_{m,n,p}^{1,o,1}$ et de $u_{m,n,p}^{o,1,1}$.

En effet, écrivons l'équation (1) sous la forme

$$
\begin{aligned}
u_{m,n,p} = {} & a u_{m-1,n,p} + k u_{m,n,p-1} + a' u_{m-1,n,p-1} + c u_{m-1,n-1,p} \\
& + b' u_{m,n-1,p-1} + c' u_{m-1,n-1,p-1} + b u_{m,n-1,p}
\end{aligned}
$$

et posons

$$
u_{m,n,p} = v_{m,p,n}.
$$

Nous voyons que

$$
u_{m,n,p}^{1,o,1} = v_{m,p,n}^{1,1,o}
$$

et comme $v_{m,p,n}^{1,1,o}$ est donné par une des formules (21), (22), (23) on (24), nous aurons

$$
\boxed{\begin{aligned}
u_{m,n,p}^{1,o,1} = {} & C_{p+n-2}^{n-1} \frac{1}{(p+n-1)!} \frac{\partial^{p+n-2}}{\partial a^{p+n-2}} \left[a^{m-2} (ak+a')^{p-1} (ab+c)^{n} \right] \\
& + C_{p+n-3}^{n-1} \frac{C_n^1}{(p+n-3)!} \frac{\partial^{p+n-3}}{\partial a^{p+n-3}} \left[a^{m-2} (ak+a')^{p-2} (ab+c)^{n-1} (ab'+c') \right] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + C_{p-2}^{n-1} \frac{C_n^n}{(p-2)\,!} \frac{\partial^{p-2}}{\partial a^{p-2}} \left[a^{m-2} (ak+a')^{p-n-1} (ab'+c')^{n} \right]
\end{aligned}} \tag{25}
$$

pour $m \geqslant 2$ et

$$\boxed{\begin{aligned} u^{1,0,1}_{m,n,p} = {} & C^{n-1}_{p+n-2}\frac{1}{(p+n-1)\,!}\frac{\partial^{p+n-1}}{\partial a^{p+n-1}}\left[(ak+a')^{p-1}(ab+c)^{n}\right] \\ & + C^{n-1}_{p+n-2}\frac{C^{1}_{n}}{(p+n-2)\,!}\frac{\partial^{p+n-2}}{\partial a^{p+n-2}}\left[(ak+a')^{p-2}(ab+c)^{n-1}(ab'+c')\right] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + C^{n-1}_{p-2}\frac{C^{n}_{n}}{(p-1)\,!}\frac{\partial^{p-1}}{\partial a^{p-1}}\left[(ak+a')^{p-n-1}(ab'+c')^{n}\right] \end{aligned}} \tag{26}$$

pour $m = 1$, ou bien

$$\boxed{\begin{aligned} u^{1,0,1}_{m,n,p} = {} & C^{n-1}_{m+n-2}\frac{1}{(m+n-2)\,!}\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial k^{m+n-2}}\left[k^{p-2}(ka+a')^{m-1}(kb+b')^{n}\right] \\ & + C^{n-1}_{m+n-3}\frac{C^{1}_{n}}{(m+n-3)\,!}\frac{\partial^{m+n-3}}{\partial k^{m+n-3}}\left[k^{p-2}(ka+a')^{m-2}(kb+b')^{n-1}(kc+c')\right] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + C^{n-1}_{m-2}\frac{C^{n}_{n}}{(m-2)\,!}\frac{\partial^{m-2}}{\partial k^{m-2}}\left[k^{p-2}(ak+a')^{m-n-1}(kc+c')^{n}\right] \end{aligned}} \tag{27}$$

pour $p \geqslant 2$ et

$$\boxed{\begin{aligned} u^{1,0,1}_{m,n,p} = {} & C^{n-1}_{m+n-2}\frac{1}{(m+n-1)\,!}\frac{\partial^{m+n-1}}{\partial k^{m+n-1}}\left[(ka+a')^{m-1}(kb+b')^{n}\right] \\ & + C^{n-1}_{m+n-3}\frac{C^{1}_{n}}{(m+n+2)\,!}\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial k^{m+n-2}}\left[(ka+a')^{m-2}(kb+b')^{n-1}(kc+c')\right] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + C^{n-1}_{m-2}\frac{C^{n}_{n}}{(m-1)\,!}\frac{\partial^{m-1}}{k\partial^{m-1}}\left[(ka+a')^{m-n-1}(kc+c')^{n}\right] \end{aligned}} \tag{28}$$

pour $p = 1$.

De même, en écrivant l'équation (1) sous la forme

$$\begin{aligned} u_{m,n,p} = {} & bu_{m,n-1,p} + ku_{m,n,p-1} + b'u_{m,n-1,p-1} + cu_{m-1,n-1,p} \\ & + a'u_{m-1,n,p-1} + c'u_{m-1,n-1,p-1} + au_{m-1,n,p} \end{aligned}$$

et en posant

$$u_{m,n,p} = w_{n,p,m},$$

on voit que

$$u^{0,1,1}_{m,n,n} = w^{1,1,0}_{n,p,m}$$

de sorte que $u^{0,1,1}_{m,n,p}$ sera donné par une des formules suivantes

$$
\begin{aligned}
u^{0,1,1}_{m,n,p} = {} & C^{m-1}_{p+m-2} \frac{1}{(p+m-2)\,!} \frac{\partial^{p+m-2}}{\partial b^{p+m-2}} \left[b^{n-2} (bk+b')^{p-1} (ba+c)^m \right] \\
& + C^{m-1}_{p+m-3} \frac{C^1_m}{(p+m-3)\,!} \frac{\partial^{p+m-2}}{\partial b^{p+m-3}} \left[b^{n-2} (bk+b')^{p-2} (ba+c)^m (ba'+c') \right] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + C^{m-1}_{p-2} \frac{C^m_m}{(p-2)\,!} \frac{\partial^{p-2}}{\partial b^{p-2}} \left[b^{n-2} (bk+b')^{p-2} (ba'+c')^m \right]
\end{aligned}
\tag{29}
$$

pour $n \geqslant 2$, et

$$
\begin{aligned}
u^{0,1,1}_{m,1,p} = {} & C^{m-1}_{p+m-2} \frac{1}{(p+m-1)\,!} \frac{\partial^{p+m-1}}{\partial b^{p+m-1}} \left[(kb+b')^{p-1} (ba+c)^m \right] \\
& + C^{m-1}_{p+m-3} \frac{C^1_m}{(p+m-2)\,!} \frac{\partial^{p+m-2}}{\partial b^{p+m-2}} \left[(kb+b')^{p-2} (ba+c)^{m-1} (ba'+c') \right] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + C^{m-1}_{p-2} \frac{C^m_m}{(p-1)\,!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial b^{p-1}} \left[(kb+b')^{p-m-1} (ba'+c')^m \right]
\end{aligned}
\tag{30}
$$

pour $n = 1$, ou bien par

$$
\begin{aligned}
u^{0,1,1}_{m,n,p} = {} & C^{m-1}_{n+m-2} \frac{1}{(n+m-2)\,!} \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial k^{n+m-2}} \left[k^{p-2} (kb+b')^{n-1} (ka+a')^m \right] \\
& + C^{m-1}_{n+m-3} \frac{C^1_m}{(n+m-3)\,!} \frac{\partial^{n+m-3}}{\partial k^{n+m-3}} \left[k^{p-2} (kb+b')^{n-2} (ka+a')^{m-1} (kc+c') \right] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + C^{m-1}_{n-2} \frac{C^m_m}{(n-2)\,!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial k^{n-2}} \left[k^{p-2} (kb+b')^{n-m-1} (kc+c')^m \right]
\end{aligned}
\tag{31}
$$

pour $p \geqslant 2$, et

$$
\begin{aligned}
u^{0,1,1}_{m,n,1} = {} & C^{m-1}_{n+m-2} \frac{1}{(n+m-1)\,!} \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial k^{n+m-1}} \left[(kb+b')^{n-1} (ka+a')^m \right] \\
& + C^{m-1}_{n+m-3} \frac{C^1_m}{(n+m-2)\,!} \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial k^{n+m-2}} \left[(kb+b')^{n-2} (ka+a')^{m-1} (kc+c') \right] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + C^{m-1}_{n-2} \frac{C^m_m}{(n-1)\,!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}} \left[(kb+b')^{n-m-1} (kc+c')^m \right].
\end{aligned}
\tag{32}
$$

pour $p = 1$.

II. LES SOLUTIONS $u_{m,\,n,\,p}^{m',\,n',\,o}$, $u_{m,\,n,\,p}^{m',\,o,\,p'}$, $u_{m,\,n,\,p}^{o,\,n',\,p'}$.

56. Nous pouvons donner maintenant des formules pour

$$u_{m,\,n,\,p}^{m',\,n',\,o}, \quad u_{m,\,n,\,p}^{m',\,o,\,p'}, \quad u_{m,\,n,\,p}^{o,\,n',\,p'}.$$

En faisant la transformation

$$m = m' - 1 + m_1 \quad , \quad n = n' - 1 + n_1 \quad , \quad p = p_1$$

et en posant

$$u_{m,\,n,\,p} = u_{m'-1+m_1\,,\;n'-1+n_1\,,\;p_1} = U_{m_1\,,\;n_1\,,\;p_1}\,,$$

nous voyons que $U_{m_1\,,\;n_1\,,\;p_1}$ satisfait à l'équation (1) et que

$$U_{m_1\,,\;n_1\,,\;p_1}^{1,\,1,\,o} = u_{m,\,n,\,p}^{m',\,n',\,o}.$$

Comme $U_{m_1\,,\;n_1\,,\;p_1}^{1,\,1,\,0}$ est donné par une des formules (21), (22), (23) et (24), il résulte que

$$\tag{33} \boxed{\begin{aligned} u_{m,\,n,\,p}^{m',n',o} = {} & C_{n-n'+p-1}^{p-1}\,\frac{1}{(n-n'+p-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-n'+p-1}}{\partial a^{n-n'+p-1}}[a^{m-m'-1}(ab+c)^{n-n'}(ak+a')]^{p} \\ & + C_{n-n'+p-2}^{p-1}\,\frac{C_p^1}{(n-n'+p-2)\,!}\,\frac{\partial^{n-n'+p-2}}{\partial a^{n-n'+p-2}}[a^{m-m'-1}(ab+c)^{n-n'-1}(ak+a')^{p-1}(ab'+c')] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + C_{n-n'-1}^{p-1}\,\frac{C_p^p}{(n-n'+1)\,!}\,\frac{\partial^{n-n'-1}}{\partial a^{n-n'-1}}[a^{m-m'-1}(ab+c)^{n-n'-p}(ab'+c')^{p}] \end{aligned}}$$

lorsque $m \geqslant m' + 1$, et

$$\tag{34} \boxed{\begin{aligned} u_{m,\,n,\,p}^{m',n',o} = {} & C_{n-n'+p-1}^{p-1}\,\frac{1}{(n-n'+p)\,!}\,\frac{\partial^{n-n'+p}}{\partial a^{n-n'+p}}[(ab+c)^{n-n'}(ak+a')^{p}] \\ & + C_{n-n'+p-2}^{p-1}\,\frac{C_p^1}{(n-n'+p-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-n'+p-1}}{\partial a^{n-n'+p-1}}[(ab+c)^{n-n'-1}(ak+a')^{p-1}(ab'+c') \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + C_{n-n'-1}^{p-1}\,\frac{C_p^p}{(n-n')\,!}\,\frac{\partial^{n-n'}}{\partial a^{n-n'}}[(ab+c)^{n-n'-p}(ab'+c')^{p}] \end{aligned}}$$

lorsque $m = m'$.

Nous pouvons écrire aussi

$$
\boxed{\begin{aligned}
u_{m,n,p}^{m',n',o} = {} & C_{m-m'+p-1}^{p-1} \frac{1}{(m-m'+p-1)!} \frac{\partial^{m-m'+p-1}}{\partial b^{m-m'+p-1}} [b^{n-n'-1}(ab+c)^{m-m'}(kb+b')^{p}] \\
& + C_{m-m'+p-2}^{p-1} \frac{C_p^1}{(m-m'+p-2)!} \frac{\partial^{m-m'+p-2}}{\partial b^{m-m'+p-2}} [b^{n-n'-1}(ab+c)^{m-m'-1}(kb+b')^{p-1}(ba'+c')] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + C_{m-m'-1}^{p-1} \frac{C_p^p}{(m-m'-1)!} \frac{\partial^{m-m'-1}}{\partial b^{m-m'-1}} [b^{n-n'-1}(ab+c)^{m-m'-p}(ba'+c')^{p}]
\end{aligned}} \tag{35}
$$

lorsque $n \geqslant n' + 1$, et

$$
\boxed{\begin{aligned}
u_{m,n,p}^{m',n',o} = {} & C_{m-m'+p-1}^{p-1} \frac{1}{(m-m'+p)!} \frac{\partial^{m-m'+p}}{\partial b^{m-m'+p}} [(ab+c)^{m-m'}(kb+b')^{p}] \\
& + C_{m-m'+p-2}^{p-1} \frac{C_p^1}{(m-m'+p-1)!} \frac{\partial^{m-m'+p-1}}{\partial b^{m-m'+p-1}} [(ab+c)^{m-m'-1}(kb+b')^{p-1}(ba'+c')] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + C_{m-m'-1}^{p-1} \frac{C_p^p}{(m-m')!} \frac{\partial^{m-m'}}{\partial b^{m-m'}} [(ab+c)^{m-m'-p}(ba'+c')^{p}].
\end{aligned}} \tag{36}
$$

lorsque $n = n'$.

On trouve des formuler analogues pour $u_{m,n,p}^{m',o,p'}$ et $u_{m,n,p}^{o,n',p'}$.

III. LA SOLUTION $u_{m,n,p}^{1,o,o}$

57. Déterminons maintenant la solution $u_{m,n,p}^{1,o,o}$ de l'équation (1) c'est-à-dire la solution qui est nulle partout sur les plans yOz, zOx, xOy sauf au point de coordonnées (1, 0, 0) où elle est égale à 1. Pour abréger l'écriture, cette solution sera désignée par $\mu_{m,n,p}$.

Dans l'équation

$$
\begin{aligned}
\mu_{m,n,p} = {} & a\mu_{m-1,n,p} + b\mu_{m,n-1,p} + c\mu_{m-1,n-1,p} + \\
& + a'\mu_{m-1,n,p-1} + b'\mu_{m,n-1,p-1} + c'\mu_{m-1,n-1,p-1} + k\mu_{m,n,p-}
\end{aligned} \tag{37}
$$

faisons $m = 1$. Nous aurons une équation à deux indices n et p

$$\mu_{1,n,p} = b\mu_{1,n-1\,p} + ku_{1,n,p-1} + b'\mu_{1,n-1,p-1}$$

et nous savons que

$$
\begin{aligned}
&\mu_{1,o,o} = 1 \\
&\mu_{1,n,o} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \\
&\mu_{1,o,p} = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)
\end{aligned}
$$

Nous avons traité ce problème au No. 14, et la formule (25) de la première partie nous donne.

$$(38)\qquad \boxed{\mu_{1,\,n,\,p} = \frac{b'}{(p-1)!}\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial b^{p-1}}\,(b^{n-1}\,(kb+b')^{p-1}).}$$

Développons le second membre suivant les puissances de b. Nous aurons

$$\mu_{1,\,n;p} = \frac{b'}{(p-1)!}\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial b^{p-1}}[k^{p-1}\,b^{n+p-2} + C^1_{p-1}\,k^{p-2}b^{n+p-3}b' + \ldots + C^{p-1}_{p-1}\,b^{n-1}b'^{p-1}]$$

c'est-à-dire

$$\mu_{1,\,n,\,p} = \frac{(n+p-2)!}{(n-1)!\;(p-1)!}\,k^{p-1}\,b^{n-p}\,b' + \frac{n-1}{1}\,\frac{(n+p-3)!}{(n-1)!\;(p-2)!}\,k^{p-2}\,b^{n-2}\,b'^2$$

$$+ \frac{(n-1)\;(n-2)}{1.2}\,\frac{(n+p-4)!}{(n-1)!\;(p-3)!}\,k^{p-3}\,b^{n-3}\,b'^3 + \ldots$$

ou bien

$$\mu_{1,\,n,\,m} = C^{n-1}_{n+p-2}\,k^{p-1}\,b^{n-1}\,b' + C^1_{n-1}\,C^{n-1}_{n+p-3}\,k^{p-2}\,b^{n-2}\,b'^2 +$$

$$+ C^2_{n-1}\,C^{n-1}_{n+p-4}\,k^{p-3}\,b^{n-3}\,b'^3 + \ldots$$

Pour $p = p' = 1,\ 2, \ldots, n$, nous avons

$$(39)\quad \mu_{1,\,n,\,p'} = C^{n-1}_{n+p'-2}\,k^{p'-1}\,b^{n-1}\,b' + C^{n-1}_{n+p'-3}\,C^1_{n-1}\,k^{p'-2}\,b^{n-2}\,b'^2$$

$$+ C^2_{n-1}\,C^{n-1}_{n+p'-4}\,k^{p'-3}\,b^{n-3}\,b'^3 + \ldots + C^{p'-1}_{n-1}\,C^{n-1}_{n-1}\,b^{n-p'}\,b'^{p'}$$

et pour $p > n$, nous avons

$$(39')\quad \mu_{1,\,n,\,p} = C^{n-1}_{n+p-2}\,k^{p-1}\,b^{n-1}\,b' + C^1_{n-1}\,C^{n-1}_{n+p-3}\,k^{p-2}\,b^{n-2}\,b'^2 + \ldots$$

$$+ C^{n-1}_{n-1}\,C^{n-1}_{p-1}\,k^{p-n}\,b'^n.$$

On peut remplacer les formules (39), (39') par une seule formule

$$(40)\qquad \boxed{\begin{aligned} \mu_{1,\,n,\,p} = {} & C^{n-1}_{n+p-2}\,D_{n+p-1}\,[(ak+a')^{p-1}\,(ab+c)^{n-1}\,(ab'+c')] \\ & + C^{n-1}_{n+p-3}\,C^1_{n-1}\,D_{n+p-2}\,[(ak+a')^{p-2}\,(ab+c)^{n-2}\,(ab'+c')^3] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C^{n-1}_{p-1}\,C^{n-1}_{n-1}\,D_p\,[(ak+a')^{p-n}\,(ab'+c')^n] \end{aligned}}$$

à condition de considérer $C^s_r = 0$ toutes les fois que $r < S$.

Dans la suite, nous démontrerons que

$$
(41)\qquad \boxed{\begin{aligned}
\mu_{m,n,p} &= C_{n+p-2}^{n-1} D_{n+p-2}\left[a^{m-2}(ak+a')^{p-1}(ab+c)^{n-1}(ab'+c')\right] \\
&+ C_{n+p-3}^{n-1} C_{n-1}^{1} D_{n+p-3}\left[a^{m-2}(ak+a')^{p-2}(ab+c)^{n-2}(ab'+c')^2\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ C_{p-1}^{n-1} C_{n-1}^{n-1} D_{p-1}\left[(a_{m-2}k+a')^{p-n}(ab'+c')^n\right]
\end{aligned}}
$$

lorsque $m \geqslant 2$.

La formule (41) se déduit de la formule (40) en introduisant dans les opérations D le facteur a^{m-2} et en diminuant les indices de ces opérations d'une unité. Nous avons vu ce fait à propos de la solution $\lambda_{m,n,p}$ de l'équation (1).

58. Dans l'équation (37) faisons $n = 1$ et $p = 1$; nous aurons

$$\mu_{m,1,1} = a\mu_{m-1,1,1} + b'\mu_{m,o,o} + c'\mu_{m-1,o,o}$$

et en donnant à m les valeurs 1, 2, ... , m nous aurons les équations

$$
\begin{aligned}
\mu_{1,1,1} &= b' \\
\mu_{2,1,1} &= a\mu_{1,1,1} + c' \\
\mu_{3,1,1} &= a\mu_{2,1,1} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\mu_{m,1,1} &= a\mu_{m-1,1,1}
\end{aligned}
$$

d'où il résulte que

$$
(42)\qquad \boxed{\begin{aligned}
\mu_{m,1,1} &= a^{m-2}(ab'+c') \\
\mu_{1,1,1} &= b'
\end{aligned}}
$$

c'est-à-dire

$$
(42')\qquad \boxed{\begin{aligned}
\mu_{m,1,1} &= D_0\left[a^{m-2}(ab'+c')\right] \\
\mu_{1,1,1} &= D_1\left[ab'+c'\right]
\end{aligned}}
$$

Pour $p = 1$ *et* $n \geqslant 2$, l'équation (37) devient une équation à deux indices

$$\mu_{m,n,1} = a\mu_{m-1,n,1} = b\mu_{m,n-1,1} + c\mu_{m-1,n-1,1}.$$

En posant

$$\mu_{m,n,1} = w_{m-1,n-1},$$

nous aurons à résoudre l'équation

$$(43)\qquad w_{m,n} = aw_{m-1,n} + bw_{m,n-1} + cw_{m-1,n-1}$$

avec les données suivantes

$$
\begin{aligned}
w_{o,o} &= b' \\
w_{o,n} &= b'b^n & (n &= 1, 2, \ldots) \\
w_{m,o} &= a^{m-1}(ab'+c') & (m &= 1, 2, \ldots).
\end{aligned}
$$

On peut encore écrire

$$w_{u,n} = \frac{b'}{c} w'_{m,n} + \frac{c'}{c} w_{m,n},$$

où $w'_{m,n}$ et $w''_{m,n}$ sont des solutions de l'équation (43) avec 'es données

$$\begin{aligned} &w'_{-1,-1} = 1 \\ &w'_{m,\,-1} = 0 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \\ &w'_{-1,\ n} = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &w'_{o,-1} = 1 \\ &w''_{m,-1} = 0 \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \\ &w''_{o,n} = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \end{aligned}$$

$w'_{m,n}$ et $w''_{m,n}$ sont données par la formule (25) de la première partie, c'est-à-dire

$$w_{m,n} = \frac{C}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} [a^m (ab + c)^n]$$

$$w''_{m,n} = \frac{C}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} [a^{m-1} (ab + c)^n],$$

et par suite

$$\begin{aligned} w_{m,n} &= \frac{b'}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} [a^m (ab + c)^n] + \frac{C'}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} [a^{m-1} (ab + c)^n] \\ &= \frac{ab' + c'}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} [a^{m-1} (ab + c)^n] + \frac{b'}{(n-1)!} \frac{\partial a^{n-1}}{\partial^{n-1}} [a^{m-1} (ab + c)^n] \\ &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} [a^{m-1} (ab + c)^n (ab' + c')] \end{aligned}$$

Il en résulte donc que

$$\mu_{m,n,1} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} [a^{m-2} (ab + c)^{n-1} (ab' + c')]$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mu_{m,n,1} = D_{n-1} [a^{m-2} (ab + c)^{n-1} (ab' + c')]} \tag{44}$$

Ainsi la formule (41) est démontrée pour $p = 1$.

59. Nous pouvons maintenant faire la démonstration de la formule (41) pour un p quelconque. Nous utiliserons pour cela la formule

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_{m,n,p+1} = {} & b\mu_{m,n-1,p+1} + (ab+c)[\mu_{m-1,n-1,p+1} + a\mu_{m-2,n-1,p+1} + \dots \\ & + a^{m-2}\mu_{1,n-1,p+1}] + b'\mu_{m,n-1,p} + (ab'+c')[\mu_{m-1,n-1,p} \\ & + a\mu_{m-2,n-1,p} + \dots + a^{m-2}\mu_{1,n-1,p}] + k\mu_{m,n,p} \\ & + (ak+a')[\mu_{m-1,n,p} + a\mu_{m-2,n,p} + \dots a^{m-2}\mu_{1,n,p}]\end{aligned}} \tag{45}$$

analogue à la formule (16).

1°. Faisons dans cette formule $n = 1$, nous aurons

$$\mu_{m,1,p+1} = k\mu_{m,1,p} + (ak+a')[\mu_{m-1,1,p} + a\mu_{m-2,1,p} + \dots + a_{m-2}\mu_{1,1,p}]$$

En tenant compte des formules (42') et de la formule fondamentale (11) de la première partie, il résultera que

$$\boxed{\mu_{m,1,p} = D_{p-1}[a^{m-2}(ak+a')^{p-1}(ab'+c')]} \tag{46}$$

Ainsi la formule (41) et démontrée pour $n = 1$.

2°. Si nous faisons $n = 2$, dans la formule (45) et si nous utilisons les formules

$$\mu_{m,2,1} = D_1[a^{m-2}(ab+c)(ab'+c')[, \quad \mu_{1,2,1} = D_2[(ab+c)(ab'+c')]$$

nous démontrerons à l'aide de la formule (11) de la première partie, de proche en proche, que

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_{m,2,p} = {} & C_p^1 D_p[a^{m-2}(ak+a')^{p-1}(ab+c)(ab'+c')] \\ & + C_{p-1}^1 C_1^1 D_{p-1}[a^{m-2}(ak+a')^{p-2}(ab'+'c)^2]\end{aligned}} \tag{47}$$

3°. Dans la formule (45) faisons $n = 3$; nous aurons

$$\begin{aligned}\mu_{m,3,p+1} = {} & b\mu_{m,2,p+1} + (ab+c)\ [\mu_{m-1,2,p+1} + a\mu_{m-2,2,p+1} + \dots + a^{m-2}\mu_{1,2,p+1}] \\ & + b'\mu_{m,2,p} + (ab'+c')\ [\mu_{m-1,2,p} + a\mu_{m-2,2,p} + \dots + a^{m-2}\mu_{1,2,p}] \\ & + k\mu_{m,3,p} + (ak+a')\ [\mu_{m-1,3,p} + a\mu_{m-2,3,p} + \dots + a^{m-2}\mu_{1,3,p}]\end{aligned}$$

Dans cette formule faisons $p = 1$ et utilisons les formules (44), (47) et la formule de sommation (11) de la première partie. Nous aurons

$$\begin{aligned}\mu_{m,3,2} = {} & C_3^2 D_3[a^{m-2}(ak+a')(ab+c)^2(ab'+c')] \\ & + C_2^2 C_2^1 D_2[a^{m-2}(ab+c)(a'+c')^2]\end{aligned} \tag{49}$$

Ensuite on fait dans la formule (48) $p = 2$, et on utilise les formules (47), (49) et la formule de sommation ; on obtient

$$\begin{aligned}\mu_{m,3,3} = {} & C_4^2 D_4 \left[a^{m-2}(ak+a')^2(ab+c)^2(ab'+c')\right] \\ & + C_3^2 C_2^1 D_3 \left[a^{m-2}(ak+a')(ab+c)(ab'+c')^2\right] \\ & + C_2^2 C_2^2 D_2 \left[a^{m-2}(ab'+c')^3\right]\end{aligned}$$

Et ainsi de suite, en faisant $p = 3$, on trouve

$$\begin{aligned}\mu_{m,3,4} = {} & C_5^2 D_5 \left[a^{m-2}(ak+a')^3(ab+c)^2(ab'+c')\right] \\ & + C_4^2 C_2^1 D_4 \left[a^{m-2}(ak+a')^2(ab+c)(ab'+c')^2\right] \\ & + C_3^2 C_2^2 D_3 \left[a^{m-2}(ak+a')(ab'+c')^3\right]\end{aligned}$$

et en général, pour un p quelconque

$$\begin{aligned}\mu_{m,3,p} = {} & C_{p+1}^2 D_{p+1} \left[a^{m-2}(ak+a')^{p-1}(ab+c)^2(ab'+c')\right] \\ & + C_p^2 C_2^1 D_p \left[a^{m-2}(ak+a')^{p-2}(ab+c)(ab'+c')^2\right] \\ & + C_{p-1}^2 C_2^2 D_{p-1} \left[a^{m-2}(ak+a')^{p-3}(ab'+c')^3\right].\end{aligned}$$

On procède maintenant de la même manière en faisant $n=4, 5, \ldots, n$ et on arrive ainsi de proche en proche à démontrer la formule (41).

60. Nous pouvons aussi donner des formules pour $u_{m,n,p}^{o,1,o}$ et pour $u_{m,n,p}^{o,o,1}$. En écrivant l'équation (1) sous la forme

$$\begin{aligned}u_{m,n,p} = {} & bu_{m,n-1,p} + ku_{m,n,p-1} + b'u_{m,n-1,p-1} + cu_{m-1,n-1,p} \\ & + a'u_{m-1,n,p-1} + c'u_{m-1,n-1,p-1} + au_{m-1,n,p}\end{aligned}$$

nous pouvons écrire d'après les formules (41) et (40)

$$\boxed{\begin{aligned}u_{m,n,p}^{o.1.o} = {} & C_{p+m-2}^{p-1} \frac{1}{(p+m-2)!} \frac{\partial^{p+m-2}}{\partial b^{p+m-2}} \left[b^{n-2}(ab+c)^{m-1}(kb+b')^{m-1}(a'b+c')\right] \\ & + C_{p+m-3}^{p-1} \frac{C_{p-1}^1}{(p+m-3)!} \frac{\partial^{p+m-3}}{\partial b^{p+m-3}} \left[b^{n-2}(ab+c)^{m-2}(kb+b')^{p-2}(a'b+c')^2\right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + C_{m-1}^{p-1} \frac{C_{p-1}^{p-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial b^{m-1}} \left[b^{n-2}(ab+c)^{m-p}(ba'+c')^p\right].\end{aligned}} \tag{50}$$

lorsque $n \geqslant 2$, et

$$\boxed{\begin{aligned} u^{o,1,o}_{m,1,p} = C^{p-1}_{p+m-2} & \frac{1}{(p+m-1)!} \frac{\partial^{p+m-1}}{\partial b^{p+m-1}} \left[(ab+c)^{m-1} (kb+b')^{p-1} (ba'+c') \right] \\ + C^{p-1}_{p+m-3} & \frac{C^1_{p-1}}{(p+m-2)!} \frac{\partial^{p+m-2}}{\partial b^{p+m-2}} \left[(ab+c)^{m-2} (kb+b')^{p-2} (ba'+c')^2 \right] \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + C^{p-1}_{m-1} & \frac{C^{p-1}_{p-1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial b^m} \left[(ab+c)^{m-p} (ba'+c')^p \right] \end{aligned}} \tag*{51)}$$

lorsque $n = 1$.

On a également les formules suivantes

$$\boxed{\begin{aligned} u^{o,o,1}_{m,n,n} = C^{m-1}_{m+n-2} & \frac{1}{(m+n-2)!} \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial\ ^{m+n-2}} \left[k^{p-2} (kb+b')^{n-1} (ka+a')^{m-1} (kc+c') \right] \\ + C^{m+1}_{m+n-3} & \frac{C^{m-1}_1}{(m+n-3)!} \frac{\partial^{m+n-3}}{\partial k^{m+n-3}} \left[k^{p-2} (kb+b')^{n-2} (ka+a')^{m-2} (kc+c')^2 \right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + C^{m-1}_{n-1} & \frac{C^{m-1}_{m-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}} \left[k^{p-2} (kb+b')^{n-m} (kc+c')^m \right] \end{aligned}} \tag{52}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u^{o,o,1}_{m,n,1} = C^{m-1}_{m+n-2} & \frac{1}{(m+n-1)!} \frac{\partial^{m+n-1}}{\partial k^{m+n-1}} \left[(kb+b')^{n-1} (ka+a')^{m-1} (kc+c') \right. \\ + C^{m-1}_{m+n-3} & \frac{C^1_{m-1}}{(m+n-2)!} \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial k^{m+n-2}} \left[(kb+b')^{n-2} (ka+a')^{m-2} (kc+c')^2 \right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + C^{m-1}_{n-1} & \frac{C^{m-1}_{m-1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial k^n} \left[(kb+b')^{n-m} (kc+c')^m \right] \end{aligned}} \tag{53}$$

IV. LES SOLUTIONS $u^{m',o,p}_{m,n,o}$; $u^{o,n',p}_{m,n,p}$; $u^{o,o,p'}_{m,n,p}$

6 . Nous pouvons donner maintenant des formules pour

$$u^{m',o,o}_{m,n,p}\ ,\quad u^{o,n',o}_{m,n,p}\ ,\quad u^{o,o,p'}_{m,n,p} .$$

En faisant la transformation

$$m = m' - 1 + m_1 , \quad n = n_1 , \quad p = p_1$$

nous aurons

$$u_{m,n,p} = u_{m'-1+m_1,n,p_1} = U_{m_1 n_1,p_1} .$$

On voit que U_{m,n_1,p_1} satisfait à l'équation (1) et qu'on a

$$U^{1,o,o}_{m_1,n_1,p_1} = u^{m',o,o}_{m,n,p} .$$

Il résulte alors d'après les formules (40) et (41) que

$$
(54)\quad \boxed{\begin{aligned}
u^{m',o,o}_{m,n,p} = {} & C^{n-1}_{n+p-2}\frac{1}{(n+p-2)!}\frac{\partial^{n+p-2}}{\partial a^{n-1\,p-2}}\left[a^{m-m'-1}(ak+a')^{p-1}(ab+c)^{n-1}(ab'+c')\right] \\
& + C^{n-1}_{n+p-3}\frac{C^1_{n-1}}{(n+p-3)!}\frac{\partial^{n+p-3}}{\partial a^{n+p-3}}\left[a^{m-m'-1}(ak+a')^{p-2}(ab+c)^{n-2}(ab'+c')^2\right] \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + C^{n-1}_{p-1}\frac{C^{n-1}_{n-1}}{(p-1)!}\frac{\partial^{p-1}}{\partial a^{p-1}}\left[a^{m-m'-1}(ak+a')^{p-n}(ab'+c')^n\right]
\end{aligned}}
$$

lorsque $m \geqslant m'+1$, et

$$
(55)\quad \boxed{\begin{aligned}
u^{m',o,o}_{m',n,p} = {} & C^{n-1}_{n+p-2}\frac{1}{(n+p-1)!}\frac{\partial^{n+p-1}}{\partial a^{n+p-1}}\left[(ak+a')^{p-1}(ab+c)^{n-1}(ab'+c')\right] \\
& + C^{n-1}_{n+p-3}\frac{C^1_{n-1}}{(n+p-2)!}\frac{\partial^{n+p-2}}{\partial a^{n+p-2}}\left[(ak+a')^{p-2}(ab+c)^{n-2}(ab'+c')^2\right] \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + C^{n-1}_{p-1}\frac{C^{n-1}_{n-1}}{p!}\frac{\partial^{p}}{\partial b^{p}}\left[(ak+a')^{p-n}(ab'+c')^n\right]
\end{aligned}}
$$

Pour $u^{o,n',o}_{m,n,p}$, $u^{o,o,p'}_{m,n,p}$ on a des formules analogues.

V. LA SOLUTION $u^{o,o,o}_{m,n,p}$

62. Nous allons donner maintenant une formule pour la solution $u^{o,o,o}_{m,n,p}$ de l'équation (1), que nous désignerons pour abréger par $v_{m,n,p}$. Si dans l'équation

$$
(56)\quad \begin{aligned} v_{m,n,p} = {} & av_{m-1,n,p} + bv_{m,n-1,p} + cv_{m-1,n-1,p} \\ & + a'v_{m-1,n,p-1} + b'v_{m,n-1,p-1} + c'v_{m-1,n-1,p-1} + kv_{m,n,p-1} \end{aligned}
$$

nous faisons $m = n = p = 1$, nous obtiendrons

$$
(57)\qquad v_{1,1,1} = c'.
$$

Lorsqu'on fait dans l'équation (56) $p = 1$ en donnant aux indices m et n des valeurs qui ne sont pas toutes les deux égales à 1, on obtient

$$
v_{m,n,1} = av_{m-1,n,1} + bv_{m,n-1,1} + cv_{m-1,n-1,1}\,.
$$

En posant

$$
v_{m,n,1} = z_{m,n}
$$

nous voyons que $z_{m,n}$ satisfait à l'équation à deux indices

$$z_{m,n} = az_{m-1,n} + bz_{m,n-1} + cz_{m-1,n-1} \tag{58}$$

et que

$$z_{m,o} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$
$$z_{o,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Pour que l'équation (58) soit en accord avec la formule (57), lorsqu'on fait $m = n = 1$, nous prendrons pour $z_{o,o}$ la valeur

$$z_{o,o} = \frac{c'}{c}.$$

La détermination de $z_{m,n}$ satisfaisant à ces conditions a été étudiée dans la première partie et la solution a été donnée par la formule (25). Nous aurons donc

$$z_{m,n} = \frac{c'}{(n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial a^{n-1}} [a^{m-1} (ab + c)^{n-1}]$$

et par suite

$$\boxed{v_{m,n,1} = c' D_{n-1} [a^{m-1} (ab + c)^{n-1}]} \tag{59}$$

Nous démontrerons qu'en général, nous aurons

$$\boxed{\begin{aligned} v_{m,n,p} = {} & c' C_{n+p-2}^{p-1} D_{n+p-2} [a^{m-1} (ab + c)^{n-1} (ak + a')^{p-1}] \\ & + c' C_{n+p-3}^{p-1} C_{p-1}^{1} D_{n+p-3} [a^{m-1} (ab+c)^{n-2} (ak+a')^{p-2} (ab'+c')] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + c' C_{n-1}^{n-1} C_{p-1}^{p-1} D_{n-1} [a^{m-1} (ab + c)^{n-p} (ab' + c')^{p-1}]. \end{aligned}} \tag{60}$$

Cette formule a été démontrée pour $p = 1$, car elle coïncide avec la formule (59).

63. Pour démontrer cette formule nous suivons la même méthode que précédemment.

Nous partons de l'équation

$$\begin{aligned} v_{m,n,p+1} = {} & bv_{m,n-1,p+1} + (ab+c) [v_{m-1,n-1,p+1} + av_{m-2,n-1,p+1} + \ldots \\ & + a^{m-2} v_{1,n-1,p+1}] + b' v_{m,n-1,p} + (ab' + c') [v_{m-1,n-1,p} \\ & + av_{m-2,n-1,p} + \ldots + a^{m-2} v_{1,n-1,p}] + kv_{m,n,p} \\ & + (ak+a') [v_{m-1,n,p} + av_{m-2,n,p} + \ldots + a^{m-2} v_{1,n,p}] \end{aligned} \tag{61}$$

analogue à la formule (16).

1°. Faisons $p = 1$ dans l'équation (61); nous aurons

$$r_{m,n,2} = br_{m,n-1,2} + (ab + c)\,[r_{m-1,n-1,2} + ar_{m-2,n-1,2} + \dots$$
$$+ a^{m-2} r_{1,n-1,2}] + b' r_{m,n-1,1} + (ab' + c')\,[r_{m-1,n-1,1}$$
$$+ ar_{m-2,n-1,1} + \dots + a^{m-2} r_{1,n-1,1}] + kr_{m,n,1}$$
$$+ (ak + a')\,[r_{m-1,n,1} + ar_{m-2,n,1} + \dots + a^{m-2} r_{1,n,1}]. \tag{62}$$

Faisons dans cette formule $n = 1$ et appliquons la formule (12) de la première partie; nous obtenons à l'aide de la formule (59)

$$r_{m,1,2} = C' D_1\,[a^{m-1}(ak + a')]. \tag{63}$$

Faisons ensuite dans la formule (62), $n = 2$ et utilisons les formules (59), (63) ainsi que la formule (12) de la première partie; nous aurons

$$r_{m,2,2} = c' C_2^1 D_2\,[a^{m-1}(ab + c)(ak + a')]$$
$$+ c' C_1^1 D_1\,[a^{m-1}(ab' + c')],$$

et continuant à faire $n = 3, 4, \dots, n$ on arrive à la formule

$$r_{m,n,2} = c' C_n^1 D_n\,[a^{m-1}(ab + c)^{n-1}(ak + a')]$$
$$+ c' C_{n-1}^1 D_{n-1}\,[a^{m-1}(ab + c)^{n-2}(ab' + c')]. \tag{64}$$

Ainsi la formule (60) est démontrée pour $p = 2$.

2° Faisons $p = 2$, dans la formule (61), nous aurons

$$r_{m,n,3} = br_{m,n-1,3} + (ab + c)\,[r_{m-1,n-1,3} + ar_{m-2,n-1,3} + \dots$$
$$+ a^{m-2} r_{1,n-1,3}] + b' r_{m,n-1,2} + (ab' + c')\,[r_{m-1,n-1,2}$$
$$+ ar_{m-2,n-1,2} + \dots + a^{m-2} r_{1,n-1,2}] + kr_{m,n,2}$$
$$+ (ak + a')\,[r_{m-1,n,2} + ar_{m-2,n,2} + \dots + a^{m-2} r_{1,n,2}]. \tag{65}$$

En faisant $n = 1, 2, 3$, on trouve

$$r_{m,1,3} = c' D_2\,[a^{m-1}(ak + a')^2]$$
$$r_{m,2,3} = c' C_3^2 D_3\,[a^{m-1}(ab + c)(ak + a')^2]$$
$$+ c' C_2^2 C_2^1 D_2\,[a^{m-1}(ak + a')(ab' + c')]$$
$$r_{m,3,3} = c' C_4^2 D_4\,[a^{m-1}(ab + c)^2 (ak + a')^2]$$
$$+ c' C_3^2 C_2^1 D_3\,[a^{m-1}(ab + c)(ak + a')(ab' + c')]$$
$$+ c' C_2^2 C_2^2 D_2\,[a^{m-1}(ab' + c')^2]$$

et en général

$$r_{m,n,3} = c' C_{n+1}^2 D_{n+1}\,[a^{m-1}(ab + c)^{n-1}(ak + a')^2]$$
$$+ c' C_n^2 C_2^1 D_n\,[a^{m-1}(ab + c)^{n-2}(ak + a')(ab' + c')]$$
$$+ c' C_{n-1}^2 C_2^2 D_{n-1}\,[a^{m-1}(ab + c)^{n-3}(ab' + c')^2].$$

3° En faisant ensuite, $p = 3, 4, \ldots$, on arrive à démontrer de proche en proche la formule (60).

VI. L'ÉQUATION: $u_{m,n,p} = u_{m-1,n,p} + u_{m-1,n-1,p} + u_{m-1,n,p-1}$.

64. Pour faire une application des formules précédentes, considérons le développement de $(1 + x + y)^m$ suivant les puissances de x et de y. Nous aurons

$$(66) \qquad (1 + x + y)^m = \Sigma u_{m,n,p}\, x^n y^p .$$

Entre les coefficients $u_{m,n,p}$ il y a une relation simple, qu'on trouve en multipliant les deux membres de l'égalité

$$(1 + x + y)^{m-1} = \Sigma u_{m-1,n,p}\, x^n y^p$$

par $1 + x + y$, et en identifiant avec le développement précédent. On trouve

$$(67) \qquad \boxed{u_{m,n,p} = u_{m-1,n,p} + u_{m-1,n-1,p} + u_{m-1,n,p-1}}$$

Cette relation est une extension de l'équation à deux indices

$$u_{m,n} = u_{m-1,n} + u_{m-1,n-1}$$

qui relie les coefficients de la formule du binôme de Newton.

Nous allons résoudre l'équation (67), dans le cas général, les données

$$u_{m,n,o}\ ,\quad u_{m,o,p}\ ,\quad u_{o,n,m,p}\ ,\quad u_{m,o,o}\ ,\quad u_{o,n,o}\ ,\quad u_{o,o,p}\ ,\quad u_{o,o,o}$$

étant quelconques.

Mais lorque les $u_{m,n,p}$ sont les coefficients du développement (66), nous avons

$$(68) \qquad \begin{aligned} & u_{o,o,o} = 1 \\ & u_{o,n,p} = 0 \qquad \text{pour toutes les valeurs de } n \text{ et } p \text{ non nulles à la fois.} \\ & u_{m,o,p} = C_m^p \\ & u_{m,n,o} = C_m^n . \end{aligned}$$

Nous allons d'abord donner les solutions élémentaires

$$u_{m,n,p}^{m',n',o}\ ,\quad u_{m,n,p}^{m',o,p'}\ ,\quad u_{m,n,p}^{o,n',p'}\ ,\quad u_{m,n,p}^{m',o,o}\ ,\quad u_{m,n,p}^{o,n',o}\ ,\quad u_{m,n,p}^{o,o,p'}\ ,\quad u_{m,n,p}^{o,o,o}$$

pour l'équation (67).

65. Calculons $u_{m,n,p}^{m',n',o}$. D'après la formule (33) nous avons

$$u_{m,n,p}^{m',n',o} = \sum_{r=0}^{p} C_{n-n'+r-1}^{p-1} \frac{C_p^r}{(n-n'+r-1)\,!}$$

$$\frac{\partial^{n-n'+r-1}}{\partial a^{n-n'+r-1}} \left[a^{m-m'-1}\,(ab + c)^{m-n'+r-p}\,(ab' + c')^{p-r}\,(ak + a')^r\right].$$

Dans le cas de l'équation (67), les coefficients sont

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1$$

$$a' = 1, \quad b' = 0, \quad c' = 0, \quad k = 0.$$

Comme $(ab' + c')^{p-r} = 0$ pour toutes les valeurs de r sauf pour $r = p$, nous avons

$$u_{m,\,n,\,p}^{m',\,n',\,o} = \frac{C_{n-n'+p-1}^{p-1}}{(n-n'+p-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-n'+p-1}}{\partial a^{n-n'+p-1}}\left[a^{m-m'-1}\,(ab+c)^{n-n'}\,(ck+a')^{p}\right].$$

Les dérivées successives de $(ab + c)^{n-n'}$ étant aussi nulles à cause du facteur $b = 0$, nous avons

$$u_{m,\,n,\,p}^{m',\,n',\,o} = \frac{C_{n-n'+p-1}^{p-1}}{(n-n'+p-1)\,!}\,\frac{\partial^{n-n'+p-1}}{\partial x^{n-n'+p-1}}\left[a^{m-m'-1}\right]$$

c'est-à-dire

(69) $$\boxed{u_{m,\,n,\,p}^{m',\,n',\,o} = C_{n-n'+p-1}^{p-1}\,C_{m-m'-1}^{n-n'+p-1}}$$

On trouve de la même manière

(69′) $$\boxed{u_{m,\,n,\,p}^{m',\,o,\,p'} = C_{p-p'+n-1}^{n-1}\,C_{m-m'-1}^{p-p'+n-1}}$$

et

(69′) $$\boxed{u_{m,\,m.\,p}^{o,\,n',\,p'} = C_{m}^{p-p'}\,C_{m-p+p'}^{n-n'}}$$

Les formules (69) et (69′) sont valables pour $m \geqslant m' + 1$. Pour $m = m'$, nous avons

$$u_{m',\,n,\,p}^{m',\,n',\,o} = u_{m',\,n,\,p}^{m',\,o,\,p'} = 0.$$

La formule (69″) convient aussi pour $n' = n$.

Les formules (54) et (55) donnent

(70) $$u_{m,\,n,\,p}^{m',\,o,\,o} = 0 \qquad\qquad m \geqslant m'$$

et nous avons aussi

(70′) $$u_{m,\,n,\,p}^{o,\,n',\,o} = C_{m-1}^{p-1}\,C_{m-p}^{n-n'} \quad , \quad u_{m,\,n,\,p}^{o,\,o,\,p'} = C_{m-1}^{n-1}\,C_{m-n}^{p-p'};$$

ces formules étant aussi valables pour $n = n'$ et $p = p'$.

Enfin, la formule (60) nous donne à cause du facteur c'

(71) $$u_{m,\,n,\,p}^{o,\,o,\,o} = 0.$$

66. Il résulte que la solution générale de l'équation (67) qui correspond aux données (2), sera donnée par la formule (3).

Tenant compte des formules (69), (69′), (69″), (70), (70′), (71) nous aurons

$$\boxed{\begin{aligned} u_{m,n,p} &= C_{m-1}^{p-1}\sum_{j=1}^{n} u_{o,j,o}\, C_{m-p}^{n-j} + C_{m-1}^{n-1}\sum_{k=1}^{p} u_{o,o,k}\, C_{m-n}^{p-k} \\ &+ \sum_{i,j=1}^{m,n} u_{i,j,o}\, C_{n+p-j-1}^{p-1}\, C_{m-i-1}^{n+p-j-1} \sum_{i,k=1}^{m,p} u_{i,o,k}\, C_{p+n-k-1}^{n-1}\, C_{m-i-1}^{p+n-k-1} \\ &+ \sum_{j,k=1}^{m,p} u_{o,j,k}\, C_{m-p+k}^{n-j}\, C_{m}^{p-k} \end{aligned}} \tag{72}$$

Nous avons ainsi la solution générale de l'équation (67).

Dans le cas où les données $u_{m,n,o}$, $u_{m,o,p}$, $u_{o,n,p}$ ont les valeurs (68), nous aurons

$$u_{o,j,o} = 0 \quad , \quad u_{o,o,k} = 0 \quad , \quad u_{o,j,k} = 0$$

et

$$V_{m,n,p} = \sum_{i,j=1}^{m,n} u_{i,j,o}\, C_{n+p-j-1}^{p-1}\, C_{m-i-1}^{n+p-j-1} = \sum_{i,j=1}^{m,n} C_i^j\, C_{n+p-j-1}^{p-1}\, C_{m-i-1}^{n+p-j-1}$$

$$W_{m,n,p} = \sum_{i,k=1}^{m,p} u_{i,o,k}\, C_{n+p-k-1}^{n-1}\, C_{m-i-1}^{n+p-k-1} = \sum_{i,k=1}^{m,p} C_i^k\, C_{n+p-k-1}^{n-1}\, C_{m-i-1}^{n+p-k-1}.$$

Mais

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^j\, C_{m-i-1}^{n+p-j-1} = C_j^j\, C_{m-j-1}^{n+p-j-1} + C_{j+1}^j\, C_{m-j-2}^{n+p-j-1} + \ldots + C_{m+j-n-p}^j\, C_{n+p-j-1}^{n+p-j-1}.$$

D'une façon générale on a l'identité

$$C_j^j C_{r-j}^q + C_{j+1}^j C_{r-j-1}^q + \ldots + C_{r-q}^j C_q^q = C_{r+1}^{q+j+1}$$

de sorte que

$$\sum_{i=1}^{m} C_j^j\, C_{m-i-1}^{n+p-j-1} = C_m^{n+p}$$

et

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^k\, C_{m-i-1}^{m+p-j-1} = C_m^{n+p}$$

et par suite

$$V_{m,n,p} = C_m^{n+p} \sum_{j=1}^{n} C_{n+p-j-1}^{p-1} = C_m^{n+p}\, C_{n+p-1}^{p}$$

$$W_{m,n,p} = C_m^{n+p} \sum_{k=1}^{p} C_{n+p-k-1}^{n-1} = C_m^{n+p}\, C_{n+p-1}^{n}.$$

La solution de l'équation (67) sera donc dans ce cas

$$\begin{aligned} u_{m,n,p} &= V_{m,n,p} + W_{m,n,p} \\ &= C_m^{n+p}\,(C_{n+p-1}^p + C_{n+p-1}^n) \\ &= C_m^{n+p}\,C_{n+p}^n \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(73) \qquad \boxed{u_{m,n,p} = \frac{m!}{n!\,p!\,(m-n-p)!}}$$

Nous retrouvons ainsi la formule habituelle pour les coefficients du développement de

$$(1 + x + y)^m$$

suivant les puissances de x et y.

VII. DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION $\dfrac{1}{1 - ax - by - kz - a'xz - b'yz - cxy - c'xyz}$ SUIVANT LES PUISSANCES DE x, y ET z.

67. Si nous développons la fonction

$$(74) \quad F(x, y, z) = \frac{1}{1 - ax - by - kz - a'xz - b'yz - cxy - c'xyz}$$

suivant les puissances de x, y et z, nous trouvons

$$F(x, y, z) = \Sigma u_{m,n,p}\, x^m\, y^n\, z^p\,.$$

Il s'agit de donner les expressions des cœfficients $u_{m,n,p}$ en fonction de $a, b, c,\ a', b', c'$ et k.

De la formule

$$1 = (1 - ax - by - kz - a'xz - b'yz - cxy - c'xyz)\ \Sigma u_{m,n,p}\, x^m\, y^n\, z^p$$

il résulte par identification des cœfficients, les relations suivantes

$$(75) \qquad 1 = u_{0,0,0}$$

$$(76) \qquad \begin{aligned} 0 &= u_{m,0,p} - au_{0,0,0} \\ 0 &= u_{0,n,0} - bu_{0,n-1,0} \\ 0 &= u_{0,0,p} - ku_{0,0,p-1}. \end{aligned}$$

$$(77) \qquad \begin{aligned} 0 &= u_{m,n,0} - au_{m-1,n,0} - bu_{m,n-1,0} - cu_{m-1,n-1,0} \\ 0 &= u_{m,0,p} - au_{m-1,0,p} - ku_{m,0,p-1} - a'u_{m-1,0,p-1} \\ 0 &= u_{0,n,p} - bu_{0,n-1,p} - ku_{0,n,p-1} - b'u_{0,n-1,p-1} \end{aligned}$$

$$(78) \quad \begin{aligned} 0 = u_{m,n,p} &- au_{m-1,n,p} - bu_{m,n-1,p} - ku_{m,n,p-1} - a'u_{m-1,n,p-1} \\ &- b'u_{m,n-1,p-1} - cu_{m-1,n-1,p} - c'u_{m-1,n-1,p-1}\,. \end{aligned}$$

Les équations (76) donnent

$$(75) \qquad u_{o,o,o} = 1$$

$$(76') \qquad \begin{aligned} u_{m,o,o} &= a^m \\ u_{o,n,o} &= b^n \\ u_{o,o,p} &= k^p \end{aligned}$$

La première équation (77) montre que $u_{m,n,o}$ sera la solution de l'équation à deux indices

$$u_{m,n,o} = au_{m-1,n,o} + bu_{m,n-1,o} + cu_{m-1,n-1,o}$$

satisfaisant aux conditions (76'). La détermination de $u_{m,n,o}$ a été traité au no. 37 de la première partie, et la formule (99) nous donne

$$(77') \qquad u_{m,n,o} = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}[a^m(ab+c)^n] = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial b^m}[b^n(ab+c)^m].$$

Nous avons aussi

$$(77') \qquad \begin{aligned} u_{m,o,p} &= \frac{1}{p!}\frac{\partial^p}{\partial a^p}[a^m(ak+a')^p] = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial k^m}[k^p(ak+a')^m], \\ u_{o,n,p} &= \frac{1}{p!}\frac{\partial^p}{\partial b^p}[b^n(bk+b')^p] = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial k^n}[k^p(bk+b')^n]. \end{aligned}$$

Pour les valeurs de m, n, p non nulles, nous avons l'équation à trois indices

$$\begin{aligned} u_{m,n,p} = {} & au_{m-1,n,p} + bu_{m,n-1,p} + cu_{m-1,n-1,p} + a'u_{m-1,n,p-1} \\ & + b'u_{m,n-1,p-1} + c'u_{m-1,n-1,p-1} + ku_{m,n,p-1}. \end{aligned}$$

Ainsi $u_{m,n,p}$ est la solution de l'équation (1), satisfaisant aux conditions (75), (76') et (77').

68. Si nous revenons à la solution $r_{m,n,p} = u^{o,o,o}_{m,n,p}$ de l'équation (1), qui est donnée par la formule (60), ainsi que par la formule analogue

$$(60') \qquad r_{m,n,p} = c'C^{m-1}_{p+m-2}\frac{\partial^{p+m-2}}{\partial b^{p+m-2}}[b^{n-1}(kb+b')^{p-1}(ab+c)^{m-1}] + \dots$$

et si nous faisons dans les formules (60) et (60') $p = 1$, $n - 1$, $m = 1$, on obtiendra les formules

$$r_{m,n,1} = \frac{c'}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[a^{m-1}(ab+c)^{n-1}],$$

$$r_{m,1,p} = \frac{c'}{(p-1)!}\frac{\partial^{p-1}}{\partial a^{p-1}}[a^{m-1}(ak+a')^{p-1}],$$

$$r_{1,n,p} = \frac{c'}{(p-1)!}\frac{\partial^{p-1}}{\partial b^{p-1}}[b^{n-1}(kb+b')^{p-1}].$$

De ces formules on déduit

$$
\begin{aligned}
v_{m\,1,\,1,} &= c'a^{m-1}\\
v_{1,\,n,\,1} &= c'b^{n-1}\\
v_{1,\,1,\,p} &= c'k^{p-1}\\
v_{1,\,1,\,1} &= c'.
\end{aligned}
$$

En comparant ces formules avec les formules (75), (76′), (77′) on obtient

$$
\begin{aligned}
v_{m+1,\,n+1,\,1} &= c'u_{m,\,n,\,o}\\
v_{m+1,\,1,\,p+1} &= c'u_{m,\,o,\,p}\\
v_{1,\,n+1,\,p+1} &= c'u_{o,\,n,\,p}\\
v_{m+1,\,1,\,1} &= c'u_{m,\,o,\,o}\\
v_{1,\,n+1,\,1} &= c'u_{o,\,n,\,o}\\
v_{1,\,1,\,p+1} &= c'u_{o,\,o,\,p}\\
v_{1,\,1,\,1} &= c'u_{o,\,o,\,o}
\end{aligned}
\tag{78}
$$

$u_{m,\,n,\,p}$ et $v_{m,\,n,\,p}$ satisfaisant à la même équation (1), et ayant les relations (78), il résulte que

$$
\boxed{u_{m,n,\,p} = \frac{1}{c'}\,v_{m+1,\,n+1,\,p+1}}
$$

et par suite, nous aurons d'après la formule (60)

$$
\boxed{
\begin{aligned}
u_{m,\,n,\,p} = {} & C_{n+p}^{p}\,D_{n+p}\,[a^m(ab+c)^n\,(ak+a')^p\,]\\
& + C_{n+p-1}^{p}\,C_p^1\,D_{n+p-1}\,[a^m\,(ab+c)^{n-1}\,(ak+a')^{p-1}\,(ab'+c')]\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + C_n^p\,C_p^p\,D_n\,[a^m\,(ab+c)^{n-p}\,(ab'+c')^p\,].
\end{aligned}
}
\tag{79}
$$

Ainsi le problème dela détermination des cœfficients $u_{m,\,n,\,p}$ du développement de la fonction (74) est résolu par les formules (75), (76′), (77′) et (79).