BULLETIN SCIENTIFIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

TIMIŞOARA

COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE LA
„SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE TIMIŞOARA"

NUMÉRO DÉDIÉ À NOTRE ÉCOLE POLYTECHNIQUE À L'OCCASION DE SES 25 ANS D'ÉXISTENCE

TOME 12. FASC. 1—2.

1 9 4 5

„TIPOGRAFIA ROMANEASCĂ" TIMIŞOARA
Inreg. la Cam. de Com. sub Nr. 398 din 8/XII/931.

SUR LE CALCUL D'UN DÉTERMINANT

PAR

D. V. JONESCO
Professeur à la Faculté des Sciences de Cluj-Timişoara.

Nous allons donner le calcul du déterminant,

$$(1)\qquad \Delta^{p}_{m,n} = \begin{vmatrix} C^1_{p+1} & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ C^2_{p+2} & C^1_{p+2} & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ C^{n-p}_n & C^{n-p-1}_n & C^{n-p-2}_n & \dots & C^1_n & 1 \\ C^{n-p}_m & C^{n-p-1}_m & C^{n-p-2}_m & \dots & C^1_m & 1 \end{vmatrix}$$

où C^s_r est le symbole des combinaisons, pour faire une application de l'équation de récurrence linéaire

$$(2)\qquad u_{m,n} = u_{m-1,n} + u_{m-1,n-1}\,.$$

En développant ce déterminant suivant les éléments de la dernière ligne, nous avons

$$(3)\qquad \Delta^{p}_{m,n} = \alpha_{n,p} - C^1_m\,\alpha_{n-1,p} + C^2_m\,\alpha_{n-2,p} - C^3_m\,\alpha_{n-3,p} + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-p-1} C^{n-p-1}_m\,\alpha_{p+1,p} + (-1)^{n-p} C^{n-n}_m\,\alpha_{p,p}$$

où

$$(4)\qquad \alpha_{n,p} = \begin{vmatrix} C^1_{p+1} & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ C^2_{p+2} & C^1_{p+2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ C^{n-p-1}_{n-1} & C^{n-p-2}_{n-1} & C^{n-p-3}_{n-1} & \dots & C^1_{n-1} & 1 \\ C^{n-p}_n & C^{n-p-1}_n & C^{n-p-2}_n & \dots & C^2_n & C^1_n \end{vmatrix}$$

si $n \geqq p+2$, et

$$(4)\qquad \alpha_{p+1,p} = C^1_{p+1}\,, \quad \alpha_{p,p} = 1\,,$$

lorsque $n = p+1$, et $n = p$.

Nous allons démontrer que

$$(5)\qquad \alpha_{n,p} = C^p_n\,.$$

Calculons d'abord $\alpha_{n,0}$. Pour $n=0$ et $n=1$, nous avons $\alpha_{0,0}=1$, $\alpha_{1,0}=1$ et pour $n \geqq 2$

$$\alpha_{n,0}=\begin{vmatrix} C_1^1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_2^2 & C_2^1 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ C_{n-1}^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ C_n^n & C_n^{n-1} & C_n^{n-2} & \dots & C_n^2 & C_n^1 \end{vmatrix}.$$

En retranchant chaque ligne de la suivante, on déduit que

$$\alpha_{n,0}=\alpha_{n-1,0},$$

et comme

$$\alpha_{2,0}=\begin{vmatrix} C_1^1 & 1 \\ C_2^2 & C_2^1 \end{vmatrix}=1,$$

il résulte que

$$\alpha_{n,0}=1. \tag{6}$$

Cette formule est valable pour toutes les valeurs de n.

Démontrons maintenant que $\alpha_{n,p}$ satisfait à l'équation (2). En effet si dans le déterminant (4), on retranche chaque ligne de la suivante, nous pouvons écrire d'après la formule

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$$

que

$$\alpha_{n,p}=\begin{vmatrix} 1+C_p^1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_{p+1}^2 & C_{p+1}^1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ C_{p+2}^3 & C_{p+2}^2 & C_{p+2}^1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ C_{n-1}^{n-p-1} & C_{n-1}^{n-p-2} & C_{n-1}^{n-p-3} & \dots & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^1 \end{vmatrix}$$

et par suite

$$\alpha_{n,p}=\alpha_{n-1,p}+\alpha_{n-1,p-1}.$$

Cette formule, démontrée pour $n \geqq p+2$, est valable aussi pour $n=p+1$, comme on le vérifie aisément.

En résumé, les nombres $\alpha_{n,p}$ définis par formules (4), satisfont à l'équation (2), et on a

$$\alpha_{p,0}=\alpha_{p,p}=1, \quad \text{quelque soit } p. \tag{7}$$

Nous connaissons une solution de l'équation (2) avec les conditions (7); c'est le symbole C_n^p des combinaisons de n objets pris p à p.

L'équation (2), n'admettant qu'une seule solution avec les conditions (7), il résulte que

$$\alpha_{n,p} = C_n^p .$$

Les formule (5) est ainsi démontrée.

En revenant à la formule (3), nous avons

$$\Delta_{m,n}^p = C_n^p - C_m^1 C_{n-1}^p + \cdots + (-1)^{n-p} C_m^{n-p} C_p^p ,$$

et il est facile maintenant de prouver que

$$\Delta_{m,n}^p = (-1)^{n-p} C_{m-p-1}^{n-p} .$$