ACADÉMIE ROUMAINE

BULLETIN

DE LA

SECTION SCIENTIFIQUE

PUBLIÉ PAR LES SOINS DES SECRÉTAIRES DE LA SECTION

MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

† ST. C. HEPITES DE 1912 À 1919

† GR. ANTIPA DE 1919 À 1939

ET

TRAJAN SAVULESCO

TOME XXX-ÈME

1947—1948

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. BUCUREŞTI, 1949

EXTENSION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DE M. TH. ANGHELUTZA À DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

PAR

D. V. IONESCO

Note présentée par Mr. D. Pompeiu M.A.R. dans la séance du 20 septembre 1947

En partant d'une équation fonctionnelle de M. D. Pompeiu [1]), M. Th. Anghelutza [2]) a étudié l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad \frac{f(y+4x)+f(y+2x)}{f(y+3x)} = \frac{f(y+2x)+f(y)}{f(y+x)}$$

et a démontré que les fonctions continues satisfaisant à cette équation quels que soient x et y, sont données par les formules

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(x) &= a\,x+b \\ f(x) &= a\cos kx + b\sin kx \\ f(x) &= a\,\mathrm{ch}\,kx + b\,\mathrm{sh}\,kx, \end{aligned}$$

où a, b et k sont des constantes arbitraires.

Dans cette note, nous étudierons l'équation fonctionnelle

$$(3) \qquad \boxed{\begin{aligned} &\frac{f(u+4\lambda, v+4\mu)+f(u+4\lambda, v+2\mu)+f(u+2\lambda, v+4\mu)+f(u+2\lambda, v+2\mu)}{f(u+3\lambda, v+3\mu)} \\ &= \frac{f(u+2\lambda, v+2\mu)+f(u+2\lambda, v)+f(u, v+2\mu)+f(u, v)}{f(u+\lambda, v+\mu)} \end{aligned}}$$

qui doit être satisfaite par une fonction continue $f(x,y)$, quels q
soient u, v, λ et μ et que nous regarderons comme l'extension à

[1]) D. Pompeiu. *Sur me équation fonctionnelle qui s'introduit da* *problème de moyenne* (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris t. 190, 1930, p. 11

[2]) Th. Anghelutza. *Sur une équation fonctionnelle* (C. R. de l
Sc. de Paris, t. 194, 1932, p. 420).

EXTENSION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DE M. TH. ANGHELUTZA À DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

PAR

D. V. IONESCO

Note présentée par Mr. D. Pompeiu M.A.R. dans la séance du 20 septembre 1947

En partant d'une équation fonctionnelle de M. D. Pompeiu[1]), M. Th. Anghelutza[2]) a étudié l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad \frac{f(y+4x)+f(y+2x)}{f(y+3x)} = \frac{f(y+2x)+f(y)}{f(y+x)}$$

et a démontré que les fonctions continues satisfaisant à cette équation quels que soient x et y, sont données par les formules

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(x) &= ax+b \\ f(x) &= a\cos kx + b\sin kx \\ f(x) &= a\,\mathrm{ch}\,kx + b\,\mathrm{sh}\,kx, \end{aligned}$$

où a, b et k sont des constantes arbitraires.

Dans cette note, nous étudierons l'équation fonctionnelle

$$(3) \qquad \boxed{\begin{aligned} &\frac{f(u+4\lambda, v+4\mu)+f(u+4\lambda, v+2\mu)+f(u+2\lambda, v+4\mu)+f(u+2\lambda, v+2\mu)}{f(u+3\lambda, v+3\mu)} \\ &= \frac{f(u+2\lambda, v+2\mu)+f(u+2\lambda, v)+f(u, v+2\mu)+f(u, v)}{f(u+\lambda, v+\mu)} \end{aligned}}$$

qui doit être satisfaite par une fonction continue $f(x,y)$, quels que soient u, v, λ et μ et que nous regarderons comme l'extension à des

---

1) D. Pompeiu. *Sur me équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne* (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris t. 190, 1930, p. 1107).

2) Th. Anghelutza. *Sur une équation fonctionnelle* (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris, t. 194, 1932, p. 420).

fonctions de deux variables, de l'équation fonctionnelle de M. Th. Anghelutza.

1. En faisant $\mu = 0$ dans l'équation (3), nons aurons l'équation fonctionnelle

$$\frac{f(u+4\lambda, v)+f(u+2\lambda, v)}{f(u+3\lambda, v)} = \frac{f(u+2\lambda, v)+f(u, v),}{f(u+\lambda, v)}$$

où nous regarderons v comme un paramètre et qui est identique à l'équation fonctionnelle (1). Cette équation aura des solutions de la forme

$$\text{(I)} \qquad f(u,v) = A\, u + B$$

$$\text{(II)} \qquad f(u,v) = A \cos A\, u + B \sin \theta\, u$$

$$\text{(III)} \qquad f(u,v) = A \operatorname{ch} \theta\, u + B \operatorname{sh} \theta\, u$$

où A, B et θ sont des fonctions continues de v.

Pour que l'équation fonctionnelle (3) ait des solutions de la forme (I), il faut que $A(v)$ et $B(v)$ soient des solutions de l'équation fonctionnelle (1), ce qui nous conduit aux solutions suivantes:

$$\text{(I')} \quad \boxed{\begin{aligned} f(u,v) &= (Cv+D)\,u + C'v + D' \\ f(u,v) &= (C\cos kv + D\sin kv)\,u + (C'\cos kv + D'\sin kv) \\ f(u,v) &= (C\operatorname{ch} kv + D\operatorname{sh} kv)\,u + (C'\operatorname{ch} kv + D'\operatorname{sh} kv) \end{aligned}}$$

où C, D, C', D' et K sont des constantes arbitraires.

Pour que l'équation fonctionnelle (3) ait des solutions de la forme (II) ou (III), nous démontrerons d'abord que $\theta(v)$ doit être une constante.

2. En posant

$$a_i = A(v+i\mu),\ b_i = B(v+i\mu),\ \theta_i = \theta(v+i\mu),\ (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

et en introduisant la fonction (II) dans l'équation fonctionnelle (3), nous aurons l'équation

$$\text{(4)} \quad [a_4\cos\theta_4(u+4\lambda)+\ldots]\,[a_1\cos\theta_1(u+\lambda)+b_1\sin\theta_1(u+\lambda)]$$
$$= [a_2\cos\theta_2(u+2\lambda)+\ldots]\,[a_3\cos\theta_3(u+3\lambda)+b_3\sin\theta_3(u+3\lambda)]$$

Posons maintenant

$$(b_4\cos\theta_4\, u - a_4\sin\theta_4\, u)\,\theta_4 + (b_2\cos\theta_2\, u - a_2\sin\theta_2\, u)\,\theta_2 = U_3$$

$$(b_2\cos\theta_2\, u - a_2\sin\theta_2\, u)\,\theta_2 + (b_0\cos\theta_0\, u - a_0\sin\theta_0\, u)\,\theta_0 = U_1$$

$$a_4 \cos \theta_4 u + b_4 \sin \theta_4 u + a_2 \cos \theta_2 u + b_2 \sin \theta_2 u = V_3$$
$$a_2 \cos \theta_2 u + b_2 \sin \theta_2 u + a_0 \cos \theta_0 u + b_0 \sin \theta_0 u = V_1$$
$$(b_3 \cos \theta_3 u - a_3 \sin \theta_3 u)\, \theta_3 = W_3$$
$$(b_1 \cos \theta_1 u - a_1 \sin \theta_1 u)\, \theta_1 = W_1$$
$$a_3 \cos \theta_3 u + b_3 \sin \theta_3 u = Z_3$$
$$a_1 \cos \theta_1 u + b_1 \sin \theta_1 u = Z_1$$

En faisant $\lambda = 0$, dans l'équation (4), nous aurons.

$$\frac{V_3}{Z_3} = \frac{V_1}{Z_1} \tag{5}$$

Si nous dérivons l'équation (4) par rapport à λ et à u et si nous faisons ensuite $\lambda = 0$, nous aurons les équations

$$U_3 Z_1 + V_3 W_1 = U_1 Z_3 + V_1 W_3$$
$$3\, U_3 Z_1 + V_3 W_1 = U_1 Z_3 + 3\, V_1 W_3,$$

qui nous donnerons

$$\frac{V_3}{Z_3} = \frac{U_1}{W_1} \tag{6}$$

Les équations (5) et (6) montrent que

$$\frac{U_1}{W_1} = \frac{V_1}{Z_1}$$

c'est à dire

$$\frac{(b_2 \cos\theta_2 u - a_2 \sin\theta_2 u)\, \theta_2 + (b_0 \cos\theta_0 u - a_0 \sin\theta_0 u)\, \theta_0}{a_2 \cos \theta_2 u + b_2 \sin \theta_2 u + a_0 \cos \theta_0 u + b_0 \sin \theta_0 u} = \frac{(b_1 \cos \theta_1 u - a_1 \sin \theta_1 u)\, \theta_1}{a_1 \cos \theta_1 u + b_1 \sin \theta_1 u}$$

On déduit de cette équation que

$$a_2 \cos \theta_2 u + b_2 \sin \theta_2 u + a_0 \cos \theta_0 u + b_0 \sin \theta_0 u = C\,(a_1 \cos \theta_1 u + b_1 \sin \theta_1 u), \tag{7}$$

C étant indépendant de u.

L'équation (7) devant être satisfaite quel que soit u, nous aurons les équations en nombre infini

$$\begin{array}{ll} a_0 - C\, a_1 + a_2 = 0 & b_0\, \theta_0 - C\, b_1\, \theta_1 + b_2\, \theta_2 = 0 \\ a_0\, \theta \;\; - C\, a_1\, \theta_1^2 + a_2\, \theta_2^2 = 0 & b_0\, \theta_0^3 - C\, b_1\, \theta_1^3 + b_2\, \theta_2^3 = 0 \\ a_0\, \theta_0^4 - C\, a_1\, \theta_1^4 + a_2\, \theta_2^4 = 0 & b_0\, \theta_0^5 - C\, b_1\, \theta_1^5 + b_2\, \theta_2^5 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{8}$$

qui doivent avoir lieu quels que soient φ et μ.

Si le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta_0^2 & \theta_1^2 & \theta_2^2 \\ \theta_0^4 & \theta_1^4 & \theta_2^4 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, les équations (8), nous conduisent à

$$A(v) = 0, \qquad B(v) = 0.$$

Mais $A(v) = B(v) = 0$, ne donnent pas des solutions de l'équation fonctionnelle (3) de la forme (II), de sorte que la fonction $\theta(v)$ doit annuler le déterminant Δ. Nous aurons ainsi

$$\theta(v + \mu) = \pm\, \theta(v),$$

ce qui montre que la fonction $\theta(v)$ doit être nulle ou constante.

3. En remplaçant dans l'équation (4), θi par la constante θ, nous aurons l'équation

$$\frac{(a_2 + a_4)\cos\theta(u + 3\lambda) + (b_2 + b_4)\sin\theta(u + 3\lambda)}{a_3\cos\theta(u + 3\lambda) + b_3\sin\theta(u + 3\lambda)} =$$

$$= \frac{a_0 + a_2)\cos\theta(u + \lambda) + (b_0 + b_2)\sin\theta(u + \lambda)}{a_1\cos\theta(u + \lambda) + b_1\sin\theta(u + \lambda)}$$

que nous écrirons sous la forme

$$\frac{[(b_2 + b_4 - (a_2 + a_4)\, tg\, 3\,\theta\,\lambda]\, tg\, \theta u + [(b_2 + b_4)\, tg\, 3\,\theta\,\lambda + (a_2 + a_4)]}{(b_3 - a_3\, tg\, 3\,\theta\,\lambda)\, tg\, \theta\, u + (b_3\, tg\, 3\,\theta\,\lambda + a_3)}$$

$$= \frac{[(b_0 + b_2) - (a_0 + a_2)\, tg\, \theta\,\lambda)\, tg\, \theta\, u + [(b_0 + b_2)\, tg\, \theta\,\lambda + (a_0 + a_2)]}{(b_1 - a_1\, tg\, \theta\,\lambda)\, tg\, \theta\, u + (b_1\, tg\, \theta\,\lambda + a_1)}$$

Cette équation devant être satisfaite quel que soit $tg\, \theta\, u$, nous conduit à certaines équations que nous ordonnerons suivent les puissances de $tg\, \theta\,\lambda$. Nous sommes ainsi conduit aux équations

$$\frac{a_2 + a_4}{a_3} = \frac{a_0 + a_2}{a_1}$$

$$\frac{b_2 + b_4}{b_3} = \frac{b_0 + b_2}{b_1}$$

$$\frac{a_0 + a_2}{a_1} = \frac{b_0 + b_2}{b_1}$$

qui montrent que $A(v)$ et $B(v)$ sont des solutions de l'équation fonctionnelle (1).

Nous aurons ainsi les solutions

$$
\text{(II}') \quad \boxed{\begin{aligned}
&f\,(u,v) = (Cv + D) \cos\,\theta u + (C'v + D') \sin\,\theta u \\
&f\,(u,v) = (C \cos k v + D \sin kv) \cos \theta u + (C' \cos kv + D' \sin kv) \sin \theta u \\
&f\,(u,v) = (C \operatorname{ch} kv + D \operatorname{sh} kv) \cos \theta u + (C' \operatorname{ch} kv + D' \operatorname{sh} kv) \sin \theta u
\end{aligned}}
$$

de l'équation fonctionnelle (3), où C, D, C', D', θ et k sont des constantes arbitraires.

4. On démontre comme dans les n-os 2 et 3 que si nous considerons des solutions de l'équation fonctionnelle (3), de la forme (III), $\theta\,(v)$ doit être une constante, et que les solutions de cette forme sont

$$
\text{(III}') \quad \boxed{\begin{aligned}
&f\,(u,v) = (Cv + D) \operatorname{ch}\,\theta u + (C'v + D') \operatorname{sh}\,\theta\,u \\
&f\,(u,v) = (C \cos kv + D \sin\,kv) \operatorname{ch} \theta u + (C' \cos kv + D' \sin kv) \operatorname{sh}\,\theta\,u \\
&f\,(u,v) = (C \operatorname{ch} kv + D \operatorname{sh} kv) \operatorname{ch} \theta u + (C' \operatorname{ch} kv + D' \operatorname{sh} kv) \operatorname{sh}\,\theta\,u,
\end{aligned}}
$$

où C, D, C', D', k et θ sont des constantes arbitraires.

Nous avons ainsi intégré l'equation fonctionnelle (3) et nous avons donné ses solutions par les formules (I'), (II') et (III').