

ACADEMIE ROUMAINE

BULLETIN
DE LA
SECTION SCIENTIFIQUE

PUBLIÉ PAR LES SOINS DES SECRÉTAIRES DE LA SECTION

MEMBRES DE L'ACADEMIE ROUMAINE

† ST. C. HEPITES † GR. ANTIPA

DE 1912 À 1919 DE 1919 À 1939

ET

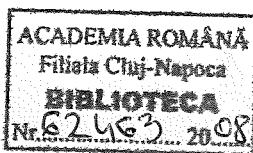
TRAJAN SAVULESCO

TOME XXX-ÈME

1947 — 1948



MONITORUL OFICIAL SI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ BUCUREȘTI, 1949



Ciocâlteu (V.), I. Irimescu et Mariana Ionescu, Sur les sels complexes de cuivre avec les nitrodiphénols. Deuxième note	281
Ciucă (M.) et Eugénie Soru, Activité diastasique du colibacille et du <i>S. typhi</i> murium au cours des phénomènes de variation causés par le bactériophage spécifique	204
— L. Mesrobeanu, P. Constantinesco, Les deshydrases du colibacille et du bacille d'aertrycke ainsi que de leurs variantes provoquées par l'action du bactériophage spécifique	421
Constantinesco (P.), v. Ciucă (M.),	
Copelman (Louis), v. Parhon (C. I.),	
Cosmovici (Nicolas L.), L'augmentation de l'azote total du foie de grenouilles gardées à l'inanition et injectées avec du glycose	475
Cosnita (Cesar), Sur la transformation quadratique	391
— Sur les sections circulaires des cyclides	459
Costescu-Toly (G.), v. Ciocâlteu (V.),	
Crăciun (E.), v. Angelescu (E.),	
Derevici (Mme A.), v. Portocală (R.),	
Dobreanu (E.), v. Motas (C.),	
Dornesco (G. Th.) et Hélène Roman, Etudes sur les Cirrhipèdes. Les glandes annexes de l'intestin moyen du <i>Pollicipes cornucopia</i>	469
Feider (Z.), Sur quelques Acariens de Roumanie appartenant à la famille des Thrombidiidae	578
Grintzesco (J.), Sur l'épanouissement et l'occlusion des fleurs de <i>Calystegia sepium</i> (L.) R. Br.	344
Homeiu (V. D.), Instructions pratiques pour aiguiser les rasoirs de microtome	444
Hulea (A.), v. Săvulescu (Tr.),	
Ilieff (Ljubomir), Beitrag zum Problem von D. Pompeiu . .	613
Ioan (M-Ile Ana), Les ondes S de Mohorovicic calculées par la méthode de Wiechert	270
Ionesco (D. V.), Extension d'une équation fonctionnelle de M. Th. Anghelutza à des fonctions de deux variables	65
— Quelques problèmes de géométrie finie	264
Ionesco (M. A.) et A. Murgoci, Recherches sur la faune intestinale des termites de Roumanie	618
Ionescu (Mariana), v. Ciocâlteu (V.),	
Irimescu (I.), v. Ciocâlteu (V.),	
Iuga (Victoria G.), Bibliographie des travaux scientifiques parus en 1947: Biologie animale	715
Jivănescu (Ana), v. Macovski (Eugène),	
Jivănescu-Idiceanu (Ana), v. Vlădescu (Radu),	
Kaplan (Ileana), v. Parhon (C. I.),	
Knechtel (W.Ihelm K.), Ökologisch-faunistische Forschungen an Thysanopteren Rumäniens. (Vierter Beitrag)	377
— Zur Systematik einiger Thysanopteren-Arten	480
Lepșii (I.), Über subfossile marine Mollusken am Kiliastromboden bei Peiprava in Donaudelta	244
Lepșii (Jos.), Über Protozoen-Sukzessionen in Kulturen von Walderde und Waldstreu	430
Liteanu (Candin), v. Ripan (Raluca),	
Lupan (S.), v. Spacu (G.),	
Măcelaru (A.), v. Ciocâlteu (V.),	

EXTENSION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DE M. TH. ANGHELUTZA À DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

PAR

D. V. IONESCO

Note présentée par Mr. D. Pompeiu M.A.R. dans la séance du 20 septembre 1947

En partant d'une équation fonctionnelle de M. D. Pompeiu¹⁾, M. Th. Anghelutz a²⁾ a étudié l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \frac{f(y + 4x) + f(y + 2x)}{f(y + 3x)} = \frac{f(y + 2x) + f(y)}{f(y + x)}$$

et a démontré que les fonctions continues satisfaisant à cette équation quels que soient x et y , sont données par les formules

$$(2) \quad \begin{aligned} f(x) &= a x + b \\ f(x) &= a \cos kx + b \sin kx \\ f(x) &= a \operatorname{ch} kx + b \operatorname{sh} kx, \end{aligned}$$

où a , b et k sont des constantes arbitraires.

Dans cette note, nous étudierons l'équation fonctionnelle

$$(3) \quad \begin{aligned} & \frac{f(u + 4\lambda, v + 4\mu) + f(u + 4\lambda, v + 2\mu) + f(u + 2\lambda, v + 4\mu) + f(u + 2\lambda, v + 2\mu)}{f(u + 3\lambda, v + 3\mu)} \\ &= \frac{f(u + 2\lambda, v + 2\mu) + f(u + 2\lambda, v) + f(u, v + 2\mu) + f(u, v)}{f(u + \lambda, v + \mu)} \end{aligned}$$

qui doit être satisfaite par une fonction continue $f(x, y)$, quels que soient u , v , λ et μ et que nous regarderons comme l'extension à

¹⁾ D. Pompeiu. *Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans le problème de moyenne* (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris t. 190, 1930, p. 11).

²⁾ Th. Anghelutz. *Sur une équation fonctionnelle* (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris, t. 194, 1932, p. 420).

EXTENSION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DE M. TH. ANGHELUTZA À DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

PAR

D. V. IONESCO

Note présentée par Mr. D. Pompeiu M.A.R. dans la séance du 20 septembre 1947

En partant d'une équation fonctionnelle de M. D. Pompeiu¹⁾, M. Th. Anghelutză²⁾ a étudié l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \frac{f(y + 4x) + f(y + 2x)}{f(y + 3x)} = \frac{f(y + 2x) + f(y)}{f(y + x)}$$

et a démontré que les fonctions continues satisfaisant à cette équation quels que soient x et y , sont données par les formules

$$(2) \quad \begin{aligned} f(x) &= a x + b \\ f(x) &= a \cos kx + b \sin kx \\ f(x) &= a \operatorname{ch} kx + b \operatorname{sh} kx, \end{aligned}$$

où a , b et k sont des constantes arbitraires.

Dans cette note, nous étudierons l'équation fonctionnelle

$$(3) \quad \begin{aligned} &f(u + 4\lambda, v + 4\mu) + f(u + 4\lambda, v + 2\mu) + f(u + 2\lambda, v + 4\mu) + f(u + 2\lambda, v + 2\mu) \\ &\quad f(u + 3\lambda, v + 3\mu) \\ &= \frac{f(u + 2\lambda, v + 2\mu) + f(u + 2\lambda, v) + f(u, v + 2\mu) + f(u, v)}{f(u + \lambda, v + \mu)} \end{aligned}$$

qui doit être satisfaite par une fonction continue $f(x, y)$, quels que soient u , v , λ et μ et que nous regarderons comme l'extension à des

¹⁾ D. Pompeiu. *Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne* (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris t. 190, 1930, p. 1107).

²⁾ Th. Anghelutză. *Sur une équation fonctionnelle* (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris, t. 194, 1932, p. 420).

fonctions de deux variables, de l'équation fonctionnelle de M. T. h. A n g h e l u t z a.

1. En faisant $\mu = 0$ dans l'équation (3), nous aurons l'équation fonctionnelle

$$\frac{f(u + 4\lambda, \varphi) + f(u + 2\lambda, \varphi)}{f(u + 3\lambda, \varphi)} = \frac{f(u + 2\lambda, \varphi) + f(u, \varphi)}{f(u + \lambda, \varphi)}$$

où nous regarderons φ comme un paramètre et qui est identique à l'équation fonctionnelle (1). Cette équation aura des solutions de la forme

$$(I) \quad f(u, \varphi) = A u + B$$

$$(II) \quad f(u, \varphi) = A \cos \theta u + B \sin \theta u$$

$$(III) \quad f(u, \varphi) = A \operatorname{ch} \theta u + B \operatorname{sh} \theta u$$

où A , B et θ sont des fonctions continues de φ .

Pour que l'équation fonctionnelle (3) ait des solutions de la forme (I), il faut que $A(\varphi)$ et $B(\varphi)$ soient des solutions de l'équation fonctionnelle (1), ce qui nous conduit aux solutions suivantes:

$$(I') \quad \boxed{\begin{aligned} f(u, \varphi) &= (C\varphi + D) u + C'\varphi + D' \\ f(u, \varphi) &= (C \cos k\varphi + D \sin k\varphi) u + (C' \cos k\varphi + D' \sin k\varphi) \\ f(u, \varphi) &= (C \operatorname{ch} k\varphi + D \operatorname{sh} k\varphi) u + (C' \operatorname{ch} k\varphi + D' \operatorname{sh} k\varphi) \end{aligned}}$$

où C , D , C' , D' et K sont des constantes arbitraires.

Pour que l'équation fonctionnelle (3) ait des solutions de la forme (II) ou (III), nous démontrerons d'abord que $\theta(\varphi)$ doit être une constante.

2. En posant

$$a_i = A(\varphi + i\mu), \quad b_i = B(\varphi + i\mu), \quad \theta_i = \theta(\varphi + i\mu), \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

et en introduisant la fonction (II) dans l'équation fonctionnelle (3), nous aurons l'équation

$$(4) \quad [a_4 \cos \theta_4 (u + 4\lambda) + \dots] [a_1 \cos \theta_1 (u + \lambda) + b_1 \sin \theta_1 (u + \lambda)] \\ = [a_2 \cos \theta_2 (u + 2\lambda) + \dots] [a_3 \cos \theta_3 (u + 3\lambda) + b_3 \sin \theta_3 (u + 3\lambda)]$$

Posons maintenant

$$(b_4 \cos \theta_4 u - a_4 \sin \theta_4 u) \theta_4 + (b_2 \cos \theta_2 u - a_2 \sin \theta_2 u) \theta_2 = U_3$$

$$(b_2 \cos \theta_2 u - a_2 \sin \theta_2 u) \theta_2 + (b_0 \cos \theta_0 u - a_0 \sin \theta_0 u) \theta_0 = U_1$$

$$\begin{aligned}
 a_4 \cos \theta_4 u + b_4 \sin \theta_4 u + a_2 \cos \theta_2 u + b_2 \sin \theta_2 u &= V_3 \\
 a_2 \cos \theta_2 u + b_2 \sin \theta_2 u + a_0 \cos \theta_0 u + b_0 \sin \theta_0 u &= V_1 \\
 (b_3 \cos \theta_3 u - a_3 \sin \theta_3 u) \theta_3 &= W_3 \\
 (b_1 \cos \theta_1 u - a_1 \sin \theta_1 u) \theta_1 &= W_1 \\
 a_3 \cos \theta_3 u + b_3 \sin \theta_3 u &= Z_3 \\
 a_1 \cos \theta_1 u + b_1 \sin \theta_1 u &= Z_1
 \end{aligned}$$

En faisant $\lambda = 0$, dans l'équation (4), nous aurons.

$$(5) \quad \frac{V_3}{Z_3} = \frac{V_1}{Z_1}$$

Si nous dérivons l'équation (4) par rapport à λ et à u et si nous faisons ensuite $\lambda = 0$, nous aurons les équations

$$\begin{aligned}
 U_3 Z_1 + V_3 W_1 &= U_1 Z_3 + V_1 W_3 \\
 3 U_3 Z_1 + V_3 W_1 &= U_1 Z_3 + 3 V_1 W_3,
 \end{aligned}$$

qui nous donnerons

$$(6) \quad \frac{V_3}{Z_3} = \frac{U_1}{W_1}$$

Les équations (5) et (6) montrent que

$$\frac{U_1}{W_1} = \frac{V_1}{Z_1}$$

c'est à dire

$$\frac{(b_2 \cos \theta_2 u - a_2 \sin \theta_2 u) \theta_2 + (b_0 \cos \theta_0 u - a_0 \sin \theta_0 u) \theta_0}{a_2 \cos \theta_2 u + b_2 \sin \theta_2 u + a_0 \cos \theta_0 u + b_0 \sin \theta_0 u} = \frac{(b_1 \cos \theta_1 u - a_1 \sin \theta_1 u) \theta_1}{a_1 \cos \theta_1 u + b_1 \sin \theta_1 u}$$

On déduit de cette équation que

$$(7) \quad a_2 \cos \theta_2 u + b_2 \sin \theta_2 u + a_0 \cos \theta_0 u + b_0 \sin \theta_0 u = C (a_1 \cos \theta_1 u + b_1 \sin \theta_1 u),$$

C étant indépendant de u .

L'équation (7) devant être satisfaite quel que soit u , nous aurons les équations en nombre infini

$$\begin{aligned}
 (8) \quad a_0 - C a_1 + a_2 &= 0 & b_0 \theta_0 - C b_1 \theta_1 + b_2 \theta_2 &= 0 \\
 a_0 \theta_0 - C a_1 \theta_1^2 + a_2 \theta_2^2 &= 0 & b_0 \theta_0^3 - C b_1 \theta_1^3 + b_2 \theta_2^3 &= 0 \\
 a_0 \theta_0^4 - C a_1 \theta_1^4 + a_2 \theta_2^4 &= 0 & b_0 \theta_0^5 - C b_1 \theta_1^5 + b_2 \theta_2^5 &= 0
 \end{aligned}$$

.....

qui doivent avoir lieu quels que soient φ et μ .

Si le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta_0^2 & \theta_1^2 & \theta_2^2 \\ \theta_0^4 & \theta_1^4 & \theta_2^4 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, les équations (8), nous conduisent à

$$A(\varphi) = 0, \quad B(\varphi) = 0.$$

Mais $A(\varphi) = B(\varphi) = 0$, ne donnent pas des solutions de l'équation fonctionnelle (3) de la forme (II), de sorte que la fonction $\theta(\varphi)$ doit annuler le déterminant Δ . Nous aurons ainsi

$$\theta(\varphi + \mu) = \pm \theta(\varphi),$$

ce qui montre que la fonction $\theta(\varphi)$ doit être nulle ou constante.

3. En remplaçant dans l'équation (4), θ_i par la constante θ , nous aurons l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{(a_2 + a_4) \cos \theta (u + 3\lambda) + (b_2 + b_4) \sin \theta (u + 3\lambda)}{a_3 \cos \theta (u + 3\lambda) + b_3 \sin \theta (u + 3\lambda)} \\ &= \frac{a_0 + a_2) \cos \theta (u + \lambda) + (b_0 + b_2) \sin \theta (u + \lambda)}{a_1 \cos \theta (u + \lambda) + b_1 \sin \theta (u + \lambda)} \end{aligned}$$

que nous écrirons sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{[(b_2 + b_4) - (a_2 + a_4) \operatorname{tg} 3\theta \lambda] \operatorname{tg} \theta u + [(b_2 + b_4) \operatorname{tg} 3\theta \lambda + (a_2 + a_4)]}{(b_3 - a_3 \operatorname{tg} 3\theta \lambda) \operatorname{tg} \theta u + (b_3 \operatorname{tg} 3\theta \lambda + a_3)} \\ &= \frac{[(b_0 + b_2) - (a_0 + a_2) \operatorname{tg} \theta \lambda] \operatorname{tg} \theta u + [(b_0 + b_2) \operatorname{tg} \theta \lambda + (a_0 + a_2)]}{(b_1 - a_1 \operatorname{tg} \theta \lambda) \operatorname{tg} \theta u + (b_1 \operatorname{tg} \theta \lambda + a_1)} \end{aligned}$$

Cette équation devant être satisfaite quel que soit $\operatorname{tg} \theta u$, nous conduit à certaines équations que nous ordonnerons suivant les puissances de $\operatorname{tg} \theta \lambda$. Nous sommes ainsi conduit aux équations

$$\begin{aligned} \frac{a_2 + a_4}{a_3} &= \frac{a_0 + a_2}{a_1} \\ \frac{b_2 + b_4}{b_3} &= \frac{b_0 + b_2}{b_1} \\ \frac{a_0 + a_2}{a_1} &= \frac{b_0 + b_2}{b_1} \end{aligned}$$

qui montrent que $A(\varphi)$ et $B(\varphi)$ sont des solutions de l'équation fonctionnelle (1).

Nous aurons ainsi les solutions

$$(II') \quad \begin{aligned} f(u, \varphi) &= (C\varphi + D) \cos \theta u + (C'\varphi + D') \sin \theta u \\ f(u, \varphi) &= (C \cos k\varphi + D \sin k\varphi) \cos \theta u + (C' \cos k\varphi + D' \sin k\varphi) \sin \theta u \\ f(u, \varphi) &= (C \operatorname{ch} k\varphi + D \operatorname{sh} k\varphi) \cos \theta u + (C' \operatorname{ch} k\varphi + D' \operatorname{sh} k\varphi) \sin \theta u \end{aligned}$$

de l'équation fonctionnelle (3), où C, D, C', D', θ et k sont des constantes arbitraires.

4. On démontre comme dans les n°s 2 et 3 que si nous considérons des solutions de l'équation fonctionnelle (3), de la forme (III), $\theta(\varphi)$ doit être une constante, et que les solutions de cette forme sont

$$(III') \quad \begin{aligned} f(u, \varphi) &= (C\varphi + D) \operatorname{ch} \theta u + (C'\varphi + D') \operatorname{sh} \theta u \\ f(u, \varphi) &= (C \cos k\varphi + D \sin k\varphi) \operatorname{ch} \theta u + (C' \cos k\varphi + D' \sin k\varphi) \operatorname{sh} \theta u \\ f(u, \varphi) &= (C \operatorname{ch} k\varphi + D \operatorname{sh} k\varphi) \operatorname{ch} \theta u + (C' \operatorname{ch} k\varphi + D' \operatorname{sh} k\varphi) \operatorname{sh} \theta u, \end{aligned}$$

où C, D, C', D', k et θ sont des constantes arbitraires.

Nous avons ainsi intégré l'équation fonctionnelle (3) et nous avons donné ses solutions par les formules (I'), (II') et (III').