ANNALES SCIENTIFIQUES
DE
L'UNIVERSITÉ DE JASSY

PREMIÈRE SECTION

EXTRAIT DU

TOME XXX, ANNÉES 1944—1947

TIBERIU POPOVICIU

SUR CERTAINES INÉGALITÉS ENTRE LES ZÉROS, SUPPOSÉS TOUS RÉELS, D'UN POLYNOME ET CEUX DE SA DÉRIVÉE

IAȘI – TIPOGRAFIA ALEXANDRU A. ȚEREK – 1948

SUR CERTAINES INÉGALITÉS ENTRE LES ZÉROS, SUPPOSÉS TOUS RÉELS, D'UN POLYNOME ET CEUX DE SA DÉRIVÉE

par

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

§ 1

1. — Considérons un polynome $f(x)$ de degré n ayant tous ses zéros réels et soient

(1) $$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

ces zéros.

On sait que la dérivée $f'(x)$ a aussi tous ses zéros réels. Désignons par

(2) $$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_{n-1}$$

les zéros de $f'(x)$.

Entre les zéros (1) et (2) nous avons d'abord l'égalité fondamentale

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} y_i ,$$

exprimant l'égalité de leurs moyennes arithmétiques respectives. Cette égalité est d'ailleurs vraie sans la restriction de la réalité des zéros.

Il y a aussi entre les zéros (1) et (2) des relations d'inégalité importantes. Nous avons d'abord

$$x_i \leq y_i \leq x_{i+1} , \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

qui sont des conséquences immédiates du théorème de ROLLE. Il est à remarquer que, par suite des notations employées, le signe $=$ est valable dans les deux formules (4) si et seulement si $x_i = x_{i+1}$.

LAGUERRE a précisé les inégalités (4) en démontrant que

$$(5) \qquad \frac{(n-1)x_i + x_{i+1}}{n} \leq y_i \leq \frac{x_i + (n-1)x_{i+1}}{n}$$

mais comme l'a montré M. J. v. SZ. NAGY [1]), nous avons aussi les inégalités plus précises

$$(6) \qquad \frac{(n-i)x_i + x_{i+1}}{n-i+1} \leq y_i \leq \frac{x_i + ix_{i+1}}{i+1}$$

2. — Nous avons déduit la propriété (6) d'une propriété générale des zéros y_i en fonction des zéros x_i [2]). Nous allons rappeler cette propriété. Les zéros x_i peuvent varier n'importe comment sur l'axe réel, mais en respectant toujours la convention (1). On peut se faire une idée de cette variation en imaginant que les zéros x_i soient des points matériels impénétrables (ce qui n'exclut pas la possibilité que deux ou plusieurs de ces points soient dans le même point géométrique de l'axe réel). Alors les zéros y_i sont des fonctions continues des x_i. On peut encore raisonner de la manière suivante. Soit X le point de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans un espace ordinaire à n dimensions. Les x_i étant soumis à la restriction (1), le point X décrit une certaine région de cet espace. Soit aussi Y le point de coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ dans un espace ordinaire à $n-1$ dimensions. Alors le point Y est une fonction continue du point X.

Complétons encore les observations précédentes par une remarque bien simple. La suite (2) des y_i peut s'appeler la *suite dérivée* de la suite (1) des x_i. Alors si les k premiers resp. les k derniers points x_i tendent vers $-\infty$ resp. vers $+\infty$, les k premiers resp. les k derniers points y_i tendent aussi vers $-\infty$ resp. vers $+\infty$. De plus, les points $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{n-1}$

---

1) JULIUS V. SZ. NAGY „*Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln*" Jahresb. d. D. Math. Ver., 27, 37—43, (1918). Voir aussi: R. GODEAU „*Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont réelles*" Mathesis, 45, 245-252, (1931).

2) TIBERIU POPOVICIU. „*Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles*". Mathematica 9, 129-145, (1935).

resp. $y_1, y_2, \ldots, y_{n-k-1}$ tendent vers les points de la suite dérivée de $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ resp. $x_1, x_2, \ldots, x_{n-k}$.

Revenons maintenant à la propriété signalée plus haut. C'est la suivante:

LEMME 1. — *Les zéros y_i sont des fonctions non-décroissantes des zéros x_i.*

Pour être complet et aussi pour préciser l'énoncé du lemme nous allons donner la démonstration. Il suffit évidemment d'examiner les variations des y_i lorsque un des points x_i varie très peu. Prenons le zéro y_i et supposons que x_k prenne un petit accroissement positif h. Ceci exige $x_k < x_{k+1}$ ($x_{n+1} = +\infty$). Si $x_i = x_{i+1}$ et $k \neq i+1$, y_i ne varie évidemment pas. Si $x_i = x_{i+1}$ et $k = i+1$, y_i devient plus grand d'après la remarque faite plus haut sur les inégalités (4). Soit maintenant $x_i < x_{i+1}$ et posons

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = (x - x_k)\varphi(x),$$

$$g(x) = (x - x_k - h)\varphi(x),$$

h étant toujours un nombre positif assez petit. Pour montrer que y_i est devenu plus grand il suffit de démontrer que $g'(x)$ a un zéro dans l'intervalle ouvert (y_i, x_{i+1}). Dans le voisinage gauche de x_{i+1} nous avons [3])

$$(7) \qquad \operatorname{sg} g'(x) = (-1)^{n-i-1}.$$

Nous avons ensuite

$$g'(y_i) = \varphi(y_i) + (y_i - x_k - h)\varphi'(y_i).$$

Mais

$$\varphi(y_i) + (y_i - x_k)\varphi'(y_i) = 0, \quad f(y_i) = (y_i - x_k)\varphi(y_i),$$

donc

$$g'(y_i) = \frac{hf(y_i)}{(y_i - x_k)^2}$$

d'où

---

3) Nous posons, comme d'habitude

$$\operatorname{sg} z = \begin{cases} 1, & \text{si } z > 0, \\ 0, & \text{si } z = 0, \\ -1, & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{sg} g'(y_i) = \operatorname{sg} f(y_i) = (-1)^{n-i}.$$

Les égalités (7) et (8) démontrent la propriété.

Finalement donc si un ou plusieurs zéros x_i commencent à croître, tout zéro y_i compris entre deux x_i différents commence aussi à croître.

3. — Le lemme 1 permet immédiatement de délimiter la somme

$$\text{(9)} \qquad y_i + y_{i+1} + \cdots + y_{i+j-1}, \quad 1 \leqq i \leqq i+j-1 \leqq n-1$$

de j termes consécutifs de la suite dérivée.

Pour obtenir une limitation inférieure il suffit de faire décroître indéfiniment les zéros $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ et de faire croître jusqu'à x_{i+j} les zéros $x_{i+j+1}, x_{i+j+2}, \ldots, x_n$. De même pour obtenir une limitation supérieure il suffit de faire croître indéfiniment les zéros $x_{i+j+1}, x_{i+j+2}, \ldots, x_n$ et de faire croître les zéros $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ jusqu'à x_i. Les limitations cherchées sont donc données par les polynomes

$$\text{(10)} \qquad (x-x_i)(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{i+j-1})(x-x_{i+j})^{n-i-j+1}$$

$$\text{(11)} \qquad (x-x_i)^i(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})\ldots(x-x_{i+j})$$

et pour les obtenir il suffit d'écrire l'égalité (3) pour ces polynomes.

Nous obtenons ainsi la propriété suivante exprimée par le

THÉORÈME 1. — *Entre les zéros (1) et (2) nous avons les inégalités suivantes*

$$\text{(12)} \quad y_i + y_{i+1} + \cdots + y_{i+j-1} \geqq \frac{(n-i)(x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+j-1}) + j x_{i+j}}{n-i+1}$$

$$\text{(13)} \quad y_i + y_{i+1} + \cdots + y_{i+j-1} \leqq \frac{j x_i + (i+j-1)(x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_{i+j})}{i+j}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n-i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

La démonstration du lemme 1 nous indique aussi les cas où dans (12) et (13) nous avons l'égalité. D'abord si $x_i = x_{i+j}$

nous avons évidemment le signe $=$ dans (12) et dans (13) puisqu'alors

$$y_i = y_{i+1} = \cdots = y_{i+j-1} = x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+j}.$$

Si $x_i < x_{i+j}$, $i > 1$ l'égalité dans (12) et si $x_i < x_{i+j}$, $i+j < n$ l'égalité dans (13) sont impossibles pour un polynome $f(x)$ de degré effectif n. Si $i = 1$, $x_1 < x_{j+1}$ l'égalité dans (12) n'a lieu que pour le polynome (10) et si $i+j = n$, $x_{n-j} < x_n$ l'égalité dans (13) n'a lieu que pour le polynome (11).

Pour $j = 1$ nous retrouvons les inégalités (6). Pour $i = 1$, $j = n-1$ les deux inégalités se réduisent à l'égalité (3).

En particulier, pour $i = 1$ et pour $i = n-j$, nous obtenons la propriété suivante:

THÉORÈME 2. — *La moyenne arithmétique des j premiers zéros (2) est au plus égale à la moyenne arithmétique des $j+1$ premiers zéros (1),*

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_j}{j} \leqq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{j+1}}{j+1}.$$

La moyenne arithmétique des j derniers (2) est au moins égale à la moyenne arithmétique de $j+1$ derniers zéros (1),

$$\frac{y_{n-j} + y_{n-j+1} + \cdots + y_{n-1}}{j} \geqq \frac{x_{n-j} + x_{n-j+1} + \cdots + x_n}{j+1}.$$

Si nous remarquons que par une transformation linéaire $x = \alpha x' + \beta$ la suite dérivée se transforme dans la suite dérivée de la transformée de la suite primitive, nous voyons que les limitations inférieures des sommes (9) peuvent se déduire de leurs limitations supérieures et vice versa.

4. — En combinant entre elles les inégalités (12) et (13) (parmi lesquelles se trouve aussi l'égalité (3)), on peut en déduire d'autres limitations intéressantes pour les sommes (9).

Ecrivons

$$y_i + y_{i+1} + \cdots + y_{i+j-1} = \sum_{r=1}^{i+j-1} y_r - \sum_{r=1}^{i-1} y_r = \sum_{r=1}^{n-1} y_r - \ldots \sum_{r=i+j}^{n-1} y_r$$

et tenons compte des inégalités (12), (13) et de l'égalité (3).

En faisant les calculs nous trouvons la propriété suivante

THÉORÈME 3. — *Entre les zéros* (1) *et* (2) *nous avons les inégalités suivantes*

$$(14)\qquad \frac{(n-i)\sum_{r=1}^{i} x_r + i(n-1)\sum_{r=i+1}^{i+j-1} x_r + i(i+j-1)x_{i+j}}{ni} \le$$

$$\le y_i + y_{i+1} + \cdots + y_{i+j-1} \le$$

$$(15)\le \frac{(n-i-j+1)(n-i)x_i + (n-i-j+1)(n-1)\sum_{r=i+1}^{i+j-1} x_r + (i+j-1)\sum_{r=i+j}^{n} x_r}{n(n-i-j+1)}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n-i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

L'égalité dans (14) *n'est possible que pour le polynome*

$$\left(x - \frac{1}{i}\sum_{r=1}^{i} x_r\right)^i (x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) \cdots (x - x_{i+j-1})(x - x_{i+j})^{n-i-j+1}$$

et dans (15) *n'est possible que pour le polynome*

$$(x - x_i)^i (x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) \cdots (x - x_{i+j-1}) \left(x - \frac{1}{n-i-j+1}\sum_{r=i+j}^{n} x_r\right)^{n-i-j+1}.$$

On voit facilement que dans ces cas l'égalité a effectivement lieu. Les cas d'égalité résultent facilement de ce que nous avons dit au No. précédent.

Les deux limitations (12) et (14) de la somme (9) sont distinctes, sauf si $i = 1$ lorsqu'elles sont identiques. Il suffit de faire successivement

$$x_1 = -1,\ x_2 = x_3 = \cdots = x_{i+j} = 0,$$

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{i+j-1} = 0,\quad x_{i+j} = 1,$$

pour voir que ces deux limitations ne résultent pas l'une de l'autre.

On voit de la même manière que les limitations supérieures (13) et (15) sont indépendantes dans le même sens, sauf si $i = n - j$ lorsqu'elles sont identiques.

Pour $j = 1$ les inégalités (14) et (15) deviennent

$$\frac{(n-i)\sum_{r=1}^{i} x_r + i^2 x_{i+1}}{ni} \le y_i \le \frac{(n-i)^2 x_i + i\sum_{r=i+1}^{n} x_r}{n(n-i)}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

qui sont aussi dues à M. J. v. Sz. NAGY[4].

Nous n'avons pas l'intention d'étudier plus complètement les conséquences des inégalités (12) et (13). Dans la suite nous indiquerons un autre procédé pour obtenir des inégalités entre les zéros (1) et (2).

§ 2.

5. — Nous allons d'abord compléter le lemme I par une autre propriété générale des zéros (1) et (2). Supposons que l'on remplace les zéros $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ par leur moyenne arithmétique

$$\xi = \frac{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}{n-k}.$$

On a alors $x_{k+1} \le \xi \le x_n$ et les égalités sont impossibles si $x_{k+1} < x_n$.

Posons

$$f(x) = (x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \cdots (x - x_n)\varphi(x),$$

$$g(x) = (x - \xi)^{n-k}\varphi(x).$$

La dérivée $g'(x)$ a un seul zéro dans chacun des intervalles $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{k-1}, x_k), (x_k, \xi)$. Nous allons démontrer que le zéro de $g'(x)$ dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) $(i \le k)$ est plus grand que y_i si $x_i < x_{i+1}$.

En effet, dans le voisinage droit de x_i nous avons

$$(16)\qquad \operatorname{sg} g'(x) = (-1)^{n-i}.$$

En remarquant que $\xi > y_i$, on trouve d'abord

$$\operatorname{sg} g'(y_i) = (-1)^{n-k-1} \operatorname{sg}[(n-k)\varphi(y_i) + (y_i - \xi)\varphi'(y_i)].$$

Mais

4) Loc. cit. 1).

$$\operatorname{sg} \varphi(y_i) = (-1)^{k-i},$$

donc

$$\operatorname{sg} g'(y_i) = (-1)^{n-i} \operatorname{sg}\left[\frac{\varphi'(y_i)}{\varphi(y_i)} - \frac{n-k}{\xi - y_i}\right].$$

Nous avons

$$\frac{\varphi'(y_i)}{\varphi(y_i)} = \frac{1}{x_{k+1} - y_i} + \frac{1}{x_{k+2} - y_i} + \cdots + \frac{1}{x_n - y_i}$$

donc, puisque $x_{k+1} - y_i > 0$,

$$\frac{\varphi'(y_i)}{\varphi(y_i)} - \frac{n-k}{\xi - y_i} > 0$$

par suite de l'inégalité classique entre la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique.

Il en résulte que

(17) $$\operatorname{sg} g'(y_i) = (-1)^{n-i}$$

et les relations (16) et (17) démontrent la propriété.

Remarquons que la propriété reste vraie aussi pour y_k même si $y_k = x_{k+1}$, à condition, bien entendu, que l'on ait $x_{k+1} < x_n$.

Nous avons donc le

LEMME 2. — *Si les zéros $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ sont tous remplacés par leur moyenne arithmétique et si $x_{k+1} < x_n$, le zéro y_k et tous les zéros $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}$ qui ne coïncident pas avec un x_i deviennent plus grands.*

Par la transformation de x en $-x$ il résulte aussi la propriété suivante

LEMME 3. — *Si les zéros $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont remplacés par leur moyenne arithmétique et $x_1 < x_k$, le zéro y_k et tous les zéros $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{n-1}$ qui ne coïncident pas avec un x_i deviennent plus petits.*

Comme application on peut retrouver le théorème 3 en appliquant simultanément les lemmes 1, 2 et 3.

6. — Avant d'aller plus loin nous allons établir quelques limitations relatives au polynome

(18) $$f(x) = (x-a)^{\lambda_1}(x-b)^{\lambda_2}(x-c)^{\lambda_3}, \quad a \leq b \leq c.$$

Dans ce cas une inégalité linéaire et homogène entre les zéros (1) et (2) est de la forme

$$p_1 a + p_2 b + p_3 c + q_1 \alpha + q_2 \beta \geq 0,$$

où α, β sont respectivement les zéros compris entre a et b et entre b et c de $f'(x)$ (les zéros y_{λ_1} et $y_{\lambda_1+\lambda_2}$).

On doit nécessairement avoir $p_1 + p_2 + p_3 + q_1 + q_2 = 0$, comme il est facile de le voir. Par suite de l'égalité (3) et de l'homogénéité de la formule on peut prendre égal à 0 l'un quelconque des coefficients et égal à 1 l'un quelconque des coefficients positifs ou à -1 l'un quelconque des coefficients négatifs[5]. Nous pouvons donc prendre $q_1 = 0$ et $q_2 = +1$ ou -1 suivant qu'alors $q_2 > 0$ ou < 0.

Ceci étant, nous avons d'abord le

THÉORÈME 4. — *Si les nombres p_1, p_2, p_3 vérifient les conditions*

$$p_1 + p_2 + p_3 = -1, \quad p_1 \leq 0, \quad p_3(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_3 \geq 0,$$

on a l'inégalité

(19) $$p_1 a + p_2 b + p_3 c + \beta \geq 0,$$

pour tout polynome (18).

En effet, d'après l'inégalité (6) nous avons

$$\beta \geq \frac{\lambda_2 b + \lambda_3 c}{\lambda_2 + \lambda_3}$$

et nous pouvons écrire

$$p_1 a + p_2 b + p_3 c + \beta = \left(\beta - \frac{\lambda_2 b + \lambda_3 c}{\lambda_2 + \lambda_3}\right) + \left(p_3 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}\right)(c - b) - p_1(b - a)$$

et le théorème 4 en résulte.

On voit d'ailleurs que dans (19), l'égalité n'a lieu que dans l'un des cas suivants

$$a = b = c,$$
$$b = c, \quad p_1 = 0$$

5) Le cas trivial $p_1 = p_2 = p_3 = q_1 = q_2 = 0$ ne présente évidemment pas d'intérêt.

Nous avons aussi le

THÉORÈME 5. — *Si les nombres p_1, p_2, p_3 vérifient les conditions*

$$p_1+p_2+p_3=-1\,,\quad 2p_1(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_3 \le 0,$$
$$p_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_1+\lambda_2 \le 0,$$

on a encore l'inégalité (19) *pour tout polynome* (18).

En effet, d'après le lemme 3, on a

$$\beta \ge \frac{2(\lambda_1+\lambda_2)c+\lambda_3(a+b)}{2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}$$

et nous pouvons écrire

$$p_1a+p_2b+p_3c+\beta=\left[\beta-\frac{2(\lambda_1+\lambda_2)c+\lambda_3(a+b)}{2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\right]+$$
$$+\left(p_3+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)(c-b)-\left(p_1+\frac{\lambda_3}{2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\right)(b-a)$$

ce qui démontre le théorème 5.

Dans ce cas l'égalité dans (19) n'a lieu que dans l'un des cas suivants

$$a=b=c,$$
$$a=b\,,\quad p_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_1+\lambda_2=0.$$

Enfin démontrons aussi le

THÉORÈME 6. — *Pour que l'inégalité*

(20) $$p_1a+p_2b+p_3c-\beta \ge 0$$

soit vérifiée quel que soit le polynome (18), *il faut et il suffit que l'on ait*

$$p_1+p_2+p_3=1\,,\quad p_1\le 0\,,\quad p_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-(\lambda_1+\lambda_2)\ge 0.$$

On voit d'abord que les conditions sont nécessaires en faisant $b=c$ (alors $\beta=c$) et $a=b$ $\left(\text{et alors } \beta=\frac{\lambda_3 b+(\lambda_1+\lambda_2)c}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)$.

Pour voir que les conditions sont aussi suffisantes, remarquons que, d'après l'inégalité (6), nous avons

$$\beta \le \frac{\lambda_3 b+(\lambda_1+\lambda_2)c}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}.$$

Nous pouvons écrire

$$p_1a+p_2b+p_3c-\beta=\left(\frac{\lambda_3 b+(\lambda_1+\lambda_2)c}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}-\beta\right)+\left(p_3-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)(c-b)-$$
$$-p_1(b-a)$$

d'où il résulte que les conditions sont aussi suffisantes.

7. — Le lecteur a certainement remarqué la différence essentielle entre les théorèmes **4**, **5** d'une part et le théorème **6** d'autre part. Tandis que les deux premiers expriment seulement des conditions suffisantes, le troisième donne des conditions à la fois nécessaires et suffisantes.

Revenons donc à l'inégalité (19). On trouve, comme pour l'inégalité (20), les conditions nécessaires

(21) $$p_1\le 0,\quad p_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_1+\lambda_2\ge 0.$$

Pour résoudre complètement le problème remarquons que nous pouvons prendre

$$a=-1,\quad b=0,\quad c=h\ge 0.$$

Désignons par $E(h)$ le premier membre de (19) multiplié par le nombre positif $\frac{2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda_1+\lambda_2}$. Si nous remarquons que β est la racine non-négative de l'équation

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2-[(\lambda_1-\lambda_2)h-\lambda_2-\lambda_3]x-\lambda_2 h=0$$

et si nous faisons les calculs nous trouvons

$$E(h)=\sqrt{(h+A)^2+B^2}-Ch-D$$

où

(22) $$\begin{cases} A=\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)-2\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}, & B=\dfrac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}}{(\lambda_1+\lambda_2)^2} \\[2ex] C=-\dfrac{2p_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda_1+\lambda_2}-1, & D=\dfrac{2p_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda_1+\lambda_2}+\dfrac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}. \end{cases}$$

Il faut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait

(23) $$E(h)\ge 0,$$

quel que soit $h\ge 0$.

Avec les notations (22) les conditions nécessaires (21) deviennent

$$\sqrt{A^2+B^2} - D \geq 0, \quad 1 \geq C$$

et expriment que l'inégalité (23) est bien vérifiée pour $h = 0$ et pour h infiniment grand. Si

$$C \leq \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

nous sommes dans les conditions du théorème 4.

Il reste à examiner le cas

$$(24) \qquad 1 \geq C \geq \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \left(\text{ou} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3} > p_3 \geq - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right).$$

Nous avons

$$\frac{d^2E(h)}{dh^2} = \frac{B^2}{\left(\sqrt{(h+A)^2+B^2}\right)^3} > 0$$

ce qui nous montre que la dérivée $\frac{dE(h)}{dh}$ est toujours croissante. De

$$\frac{dE(h)}{dh} = \frac{h+A}{\sqrt{(h+A)^2+B^2}} - C$$

il résulte que cette dérivée ne devient nulle que pour

$$h = h_1 = -A + \frac{CB}{\sqrt{1-C^2}}.$$

Par suite des inégalités (24), h est bien un nombre positif.

Pour que l'inégalité (23) soit satisfaite il faut et il suffit que $E(h_1) \geq 0$. Nous avons

$$E(h_1) = AC + B\sqrt{1-C^2} - D$$

donc la condition cherchée est

$$AC + B\sqrt{1-C^2} - D \geq 0.$$

Il est facile de voir que le résultat subsiste aussi pour $C = 1$, lorsque h_1 n'existe pas.

Finalement nous pouvons énoncer la propriété suivante.

THÉORÈME. 7. — *Pour que l'inégalité* (19) *ait lieu pour tout*

polynome (18) *il faut et il suffit que l'on ait* $p_1 + p_2 + p_3 = -1$ *et, ou bien*

$$p_1 \leq 0, \quad p_3(\lambda_2+\lambda_3) + \lambda_2 \geq 0,$$

ou bien

$$(25) \qquad AC + B\sqrt{1-C^2} - D \geq 0, \quad p_3(\lambda_2+\lambda_3) + \lambda_2 < 0,$$
$$p_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0,$$

A, B, C, D étant définis par les formules (22).

Dans le second cas l'égalité n'a lieu que si

$$AC + B\sqrt{1-C^2} - D = 0, \quad \sqrt{1-C^2}\,(c-b) = (b-a)\left(CB - A\sqrt{1-C^2}\right).$$

8. — On voit que les théorèmes 4 et 5 ne nous donnent pas des propriétés plus complètes que celles exprimées par les théorèmes 1 et 3. Le théorème 6 précise un peu la propriété correspondante exprimée par le théorème 1.

En ce qui concerne la valeur du théorème 7, elle est toute autre. Ce théorème nous donne effectivement des inégalités qui ne sont pas toujours comprises dans les théorèmes 1 et 3. Soit, en effet, l'inégalité (19) où p_1, p_3 vérifient les conditions (25). Par suite de l'inégalité

$$p_3 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3} < 0,$$

l'inégalité (19) considérée n'est pas une conséquence du théorème 1. Pour voir que notre inégalité peut ne pas être une conséquence du théorème 3, il suffit de montrer que les inégalités (25) sont compatibles avec l'inégalité

$$p_1 + \frac{\lambda_3}{2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} > 0.$$

Pour cela il faut et il suffit de montrer que les inégalités

$$-\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} < AC + B\sqrt{1-C^2}, \quad 1 \geq C > \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

sont compatibles. Cette condition de compatibilité est

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} > \sqrt{A^2+B^2} = \frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}$$

et elle est bien vérifiée

9. — Nous n'avons pas l'intention d'étudier toutes les conséquences des résultats précédents dans le cas d'un polynome quelconque $f(x)$. Nous allons seulement signaler quelques inégalités qui nous seront utiles dans le § suivant.

Soit donc $f(x)$ un polynome quelconque à zéros tous réels et considérons une inégalité de la forme

$$(26) \qquad r_1 \sum_{\nu=1}^{j} x_\nu + r_2 \sum_{\nu=j+1}^{n} x_\nu - s(y_1 + y_2 + \cdots + y_{j-1}) - s' y_j \geq 0,$$

où

$$(27) \qquad jr_1 + (n-j) r_2 = (j-1) s + s', \quad s > s' > 0.$$

En vertu du lemme 2, si l'inégalité (26) est vérifiée lorsqu'on remplace $x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n$ par leur moyenne arithmétique, elle sera vérifiée pour tout polynome $f(x)$. Il en résulte qu'il suffit de démontrer l'inégalité (26) pour $x_{j+1} = x_{j+2} = \cdots = x_n$.

Dans ce dernier cas elle s'écrit :

$$r_1 \sum_{\nu=1}^{j} x_\nu + (n-j) r_2 x_{j+1} - s(y_1 + y_2 + \cdots + y_{j-1}) - s' y_j \geq 0.$$

Mais, l'égalité (3) nous donne

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{j-1} = \frac{n-1}{n} \sum_{\nu=1}^{j} x_\nu + \frac{j}{n} x_{j+1} - y_j$$

et notre inégalité devient

$$(28) \qquad [nr_1 - s(n-1)] \sum_{\nu=1}^{j} x_\nu + [n(n-j) r_2 - sj] x_{j+1} + n(s-s') y_j \geq 0.$$

En vertu du lemme 3, si l'inégalité (28) est vérifiée lorsque, de plus, on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_j$ par leur moyenne arithmétique, elle sera toujours vérifiée. Il suffit donc de démontrer l'inégalité (28) si de plus, $x_1 = x_2 = \cdots = x_j$. L'inégalité devient alors

$$(29) \qquad [nr_1 - s(n-1)] j x_j + [n(n-j) r_2 - sj] x_{j+1} + n(s-s') y_j \geq 0.$$

Mais, nous avons maintenant,

$$y_j = \frac{(n-j) x_j + j x_{j+1}}{n}.$$

et l'inégalité (29) devient

$$[n(n-j) r_2 - js'](x_{j+1} - x_j) \geq 0.$$

Nous en déduisons donc le

THÉORÈME 8. — *Pour que l'inégalité (26), sous les conditions (27), ait lieu pour tout polynome $f(x)$, à zéros tous réels, il faut et il suffit que l'on ait*

$$n(n-j) r_2 - js' \geq 0.$$

Dans le cas $j = 1$, il faut prendre $s = 0$ dans les formules (26) et (27) et $s' > 0$. Sous les conditions données, l'égalité dans (26) n'a lieu que pour $x_1 = x_2 = \cdots = x_j$, $x_{j+1} = x_{j+2} = \cdots = x_n$ lorsque $n(n-j) r_2 - js' = 0$ et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ lorsque $n(n-j) r_2 - js' > 0$.

10. — Nous allons étudier maintenant des inégalités un peu plus générales. Considérons l'inégalité

$$(30) \qquad r_1 \sum_{\nu=1}^{j-1} x_\nu + r_2 x_j + r_3 \sum_{\nu=j+1}^{n} x_\nu - s(y_1 + y_2 + \cdots + y_{j-2}) - s' y_{j-1} - s'' y_j \geq 0,$$

où

$$(31) \qquad (j-1) r_1 + r_2 + (n-j) r_3 = js - s' - s'', \quad s \geq s'' > s' \geq 0,$$
$$1 < j \leq n-1.$$

Comme plus haut, nous voyons que, en vertu du lemme 2, il suffit de démontrer l'inégalité si $x_{j+1} = x_{j+2} = \cdots = x_n$. L'inégalité devient alors

$$\left(r_1 - s\frac{n-1}{n}\right) \sum_{\nu=1}^{j-1} x_\nu + \left(r_2 - s\frac{n-1}{n}\right) x_j + \left[(n-j) r_3 - s\frac{j}{n}\right] x_{j+1} + s' y_{j-1} + s'' y_j \geq 0.$$

De même, en vertu du lemme 3, il suffit de démontrer cette inégalité si, de plus, on a $x_1 = x_2 = \cdots = x_{j-1}$. Dans ce dernier cas l'égalité (3) nous donne encore

$$y_{j-1} = \frac{n-j+1}{n} x_{j-1} + \frac{n-1}{n} x_j + \frac{j}{n} x_{j+1} - y_j$$

et notre inégalité devient

$$p_1 x_{j-1} + p_2 x_j + p_3 x_{j+1} + y_j \geq 0, \tag{32}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{n(s''-s')}\left[n(j-1)r_1 - (n-1)(j-1)s - (n-j+1)s''\right] \\ p_2 &= \frac{1}{n(s''-s')}\left[nr_2 + (n-1)(s''-s)\right] \\ p_3 &= \frac{1}{n(s''-s')}\left[n(n-j)r_3 + j(s''-s)\right]. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

L'inégalité (32) est de la forme (19) correspondant au polynome (18) où

$\lambda_1 = j-1,\quad \lambda_2 = 1,\quad \lambda_3 = n-j,\quad a = x_{j-1},\quad b = x_j,\quad c = x_{j+1}.$

Finalement nous déduisons donc le

THÉORÈME 9. — *Pour que l'inégalité (30), sous les conditions (31), ait lieu pour tout polynome $f(x)$ à zéros tous réels, il faut et il suffit que l'on ait, ou bien*

$$p_1 = 0,\quad (n-j+1)p_3 + 1 \geq 0, \tag{34}$$

ou bien

$$AC + B\sqrt{-C^2-D} \geq 0,\quad (n-j+1)p_3 + 1 < 0,\quad np_3 + j \geq 0, \tag{35}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{n-(j-1)(n-j)}{j^2}, & B &= \frac{2\sqrt{n(j-1)(n-j)}}{j^2} \\ C &= -\frac{2np_3+1}{j}, & D &= \frac{2np_1+n-j+1}{j} \end{aligned}\right. \tag{36}$$

p_1, p_3 étant donnés par les formules (33).

On peut facilement obtenir les conditions d'égalité dans (30), mais il est inutile d'insister ici sur ce point. Remarquons aussi que le théorème 5 nous montre que les conditions

$$2np_1 + n - j \leq 0,\quad np_3 + j \geq 0,$$

sont suffisantes pour l'inégalité (30).

§ 3.

11. — Considérons deux suites de nombres réels

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \tag{37}$$

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m. \tag{38}$$

Nous dirons que la suite (38) est une *suite moyenne* (en anglais „average") de la suite (37) si on peut trouver m^2 nombres non négatifs $p_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$ tels que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{m} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} p_{i,j} = 1,\quad \alpha'_i = \sum_{j=1}^{m} p_{i,j}\alpha_j,\quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Cette condition ne dépend pas de l'ordre des termes des suites (37), (38). Nous pouvons donc supposer que

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_m,\quad \alpha'_1 \leq \alpha'_2 \leq \cdots \leq \alpha'_m. \tag{39}$$

MM. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYA ont démontré[6] la propriété suivante, exprimée par le

LEMME 4. — *Pour que la suite (38) soit une suite moyenne de la suite (37), il faut et il suffit que l'on ait*

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \tag{40}$$

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_j \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j,\quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{41}$$

en supposant que les deux suites sont ordonnées de la manière (39).

On voit facilement que si, au lieu de (39), on avait

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_m,\quad \alpha'_1 \geq \alpha'_2 \geq \cdots \geq \alpha'_m \tag{39'}$$

on aurait, au lieu de (41), les inégalités

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_j \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j,\quad j = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{41'}$$

12. — Reprenons la suite (1) et sa suite dérivée (2). Définissons les suites (37), (38), en prenant $m = n(n-1)$, de la manière suivante

$$\alpha_{jn-n-j+2} = \alpha_{jn-n-j+3} = \cdots = \alpha_{jn-j} = x_j,\quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\alpha'_{jn-n+1} = \alpha'_{jn-n+2} = \cdots = \alpha'_{jn} = y_j,\quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

---

6) G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. POLYA „Inequalities" Cambridge Univ. Press, 1934, Chap. II.

L'égalité (40) est alors bien vérifiée et revient à (3). Nous avons (39) et les inégalités (41) s'écrivent [7])

$$(42)\quad \begin{cases} n(y_1+y_2+\cdots+y_{j-1})-ry_j \geq (n-1)(x_1+x_2+\cdots+x_{j-1})+(r+j-1)x_j, \\ \qquad r=1,2,\ldots,n-j,\ j=1,2,\ldots,n-1, \\ n(y_1+y_2+\cdots+y_{j-1})+ry_j \geq (n-1)(x_1+x_2+\cdots+x_j)+(r-j-n)x_{j+1}, \\ \qquad r=n-j+1,\ n-j+2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n-1, \end{cases}$$

$$(\text{sauf } r=n,\ j=n-1).$$

Considérons, en particulier, les inégalités

$$(43)\qquad n(y_1+y_2+\cdots+y_j)\geq(n-1)(x_1+x_2+\cdots+x_j)+jx_{j+1},$$

$$j=1,2,\ldots,n-2.$$

Toutes les autres inégalités (42) sont des conséquences de ces dernières et des inégalités (4).

Mais, les inégalités (43) ne sont autres que les inégalités (12) pour $i=1$. Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante:

THÉORÈME 10. — *La suite dérivée (2), où chaque terme est répété n fois, est une suite moyenne de la suite principale (1) dans laquelle chaque terme est répété n−1 fois.*

De cette propriété il résulte qu'on peut trouver $n(n-1)$ nombres non-négatifs $q_{r,s}$, $r=1,2,\ldots,n-1$, $s=1,2,\ldots,n$ de manière que l'on ait

$$y_j=\sum_{r=1}^{n}q_{r,j}x_r,\quad \sum_{r=1}^{n}q_{r,j}=1,\quad \sum_{s=1}^{n-1}q_{r,s}=\frac{n-1}{n},$$

$$r=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n-1.$$

Dans un travail antérieur [8]) nous avons établi cette propriété en remarquant que

7) Lorsque $j=1$ les sommes telles que $x_1+x_2+\cdots+x_{j-1}$, $y_1+y_2+\cdots+y_{j-1}$ sont remplacées par zéro.

8) TIBERIU POPOVICIU, „*Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (III)*", Mathematica, 16, 74–86 (1940).

$$y_j=\frac{\sum_{r=1}^{n}\frac{x_r}{(y_j-x_r)^2}}{\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(y_j-x_r)^2}},\quad j=1,2,\ldots,n-1$$

et en démontrant que

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\frac{1}{(y_j-x_i)^2}}{\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(y_j-x_r)^2}}=\frac{n-1}{n},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

C'est de cette manière que nous avons d'abord obtenu les inégalités (43) [9]).

13. — Considérons encore la suite (1) et sa suite dérivée (2). Posons maintenant

$$(44)\quad \begin{cases} x'_i=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n}{n-1}, & i=1,2,\ldots,n, \\ y'_j=\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_{j-1}+y_{j+1}+\cdots+y_{n-1}}{n-2}, & j=1,2,\ldots,n-1, \end{cases}$$

en supposant, bien entendu, $n>2$.

De cette façon nous obtenons les suites

$$(45)\qquad x'_1\geq x'_2\geq\cdots\geq x'_n$$

$$(46)\qquad y'_1\geq y'_2\geq\cdots\geq y'_{n-1}$$

et l'égalité

$$(47)\qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x'_i=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}y'_i$$

Le théorème 2 nous montre que

$$(48)\qquad y'_1\geq x'_1,\quad x'_n\geq y'_{n-1}.$$

Définissons maintenant les suites (37), (38) de la manière suivante, en prenant encore $m=n(n-1)$,

9) Voir loc. cit. 8).

$$\alpha_{j(n-j)+1} = \alpha_{j(n-j)+2} = \cdots = \alpha_{jn} = y'_j \, , \quad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\alpha'_{(i-1)n-i+2} = \alpha'_{(i-1)n-i+3} = \cdots = \alpha'_{in-i} = x'_i \, , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

et cherchons si les conditions de lemme 4 sont vérifiées.

L'égalité (40) est satisfaite par suite de (47).

Cette fois nous avons (39') et nous devons donc examiner les inégalités (41'). Ces inégalités deviennent [10].

$$(49)\quad \begin{cases} n(y'_1+y'_2+\cdots+y'_{j-1})+ry'_j \geq (n-1)(x'_1+x'_2+\cdots+x'_{j-1})+(r-j-1)x'_j \\ \qquad r=1,2,\ldots,n-j, \quad j=1,2,\ldots,n-1, \\ n(y'_1+y'_2+\cdots+y'_{j-1})+ry'_j \geq (n-1)(x'_1+x'_2+\cdots+x'_j)+(r+j-n)x'_{j+1}, \\ \qquad r=n-j+1,\ n-j+2,\ldots,n, \quad j=1,2,\ldots,n-1 \\ \qquad (\text{sauf } r=n,\ j=n-1). \end{cases}$$

De ces inégalités choisissons les suivantes

$$(50)\quad n(y'_1+y'_2+\cdots+y'_{j-1})+y'_j \geq (n-1)(x'_1+x'_2+\cdots+x'_{j-1})+jx'_j$$
$$j=2,3,\ldots,n-2,$$

$$(51)\quad n(y'_1+y'_2+\cdots+y'_{j-1})+(n-j)y'_j \geq (n-1)(x'_1+x'_2+\cdots+x'_j)$$
$$j=2,3,\ldots,n-2,$$

$$(52)\quad n(y'_1+y'_2+\cdots+y'_{j-1})+(n-j+1)y'_j \geq (n-1)(x'_1+x'_2+\cdots+x'_j)+x'_{j+1}$$
$$j=2,3,\ldots,n-2,$$

$$(53)\quad n(y'_1+y'_2+\cdots+y'_j) \geq (n-1)(x'_1+x'_2+\cdots+x'_j)-jx'_{j+1}$$
$$j=2,3,\ldots,n-2.$$

Toutes les autres inégalités (49) sont des conséquences de ces inégalités, des inégalités (45), (46), (48) et de l'égalité (47). Remarquons, en passant, que pour $n=3$ les inégalités (49) sont démontrées. Il reste à démontrer les inégalités (50), (51), (52), et (53) pour $n>3$. Tout d'abord nous allons exprimer ces inégalités à l'aide des zéros (1) et (2), en tenant compte de (44). Faisant les calculs nous trouvons

10) Pour $j=1$ les mêmes conventions que plus haut. Voir 7).

$$(54)\quad \begin{aligned} &[n(j-1)+1]\sum_{i=1}^{n} x_i - n(n-1)(n-2)(x_1+x_2+\cdots+x_{j-1})+n(n-2)jx_j - \\ &\quad - n^2(n-1)(y_1+y_2+\cdots+y_j)+n(n-1)^2 y_j \geq 0 \\ &\qquad j=2,3,\ldots,n-2, \end{aligned}$$

$$(55)\quad j\sum_{i=1}^{n} x_i + n(n-2)(x_1+x_2+\cdots+x_j) - n^2(y_1+y_2+\cdots+y_j)+jny_j \geq 0$$
$$j=2,3,\ldots,n-2,$$

$$(56)\quad \begin{aligned} &[(j-1)(n-1)+1]\sum_{i=1}^{n} x_i + n(n-1)(n-2)(x_1+x_2+\cdots+x_{j-1}) + \\ &\quad + n(n-2)x_j - n^2(n-1)(y_1+y_2+\cdots+y_j)+n(n-1)(j-2)y_{j-1} + \\ &\quad + n^2(n-1)y_j \geq 0, \\ &\qquad j=3,4,\ldots,n-1, \end{aligned}$$

$$(57)\quad \begin{aligned} &(j-1)\sum_{i=1}^{n} x_i + (n-1)(n-2)(x_1+x_2+\cdots+x_{j-1}) + \\ &\quad + (j-1+1)(n-2)x_j - n(n-1)(y_1+y_2+\cdots+y_j)+n(n-1)y_j \geq 0, \\ &\qquad j=3,4,\ldots,n-1. \end{aligned}$$

Avant de faire les calculs dans (52) et (53) nous avons changé j en $j-1$.

Il nous reste à démontrer les inégalités (54), (55), (56), (57).

14. — Occupons-nous d'abord de l'inégalité (55), qui est la plus simple.

L'inégalité (55) est de la forme (26), où nous avons

$$r_1 = j+n(n-2)\, , \quad r_2 = j\, , \quad s = n^2\, , \quad s' = n(n-j)$$

et les conditions (27) sont bien vérifiées.

Nous avons

$$n(n-j)r_2 - js' = 0$$

et on peut donc appliquer le théorème 8.

L'inégalité (55) est donc démontrée.

15. — Les inégalités (54), (56), (57) sont de la forme (30).

I. L'inégalité (54). Nous avons

$$r_1=n(j-1)+1+n(n-1)(n-2)\ ,\ r_2=n(j-1)+1+n(n-2)j=(n-1)(nj-1),$$

$$r_3=n(j-1)+1\ ,\ s=n^2(n-1)\ ,\ s'=0\ ,\ s''=n(n-1)^2.$$

Les conditions (31) sont bien vérifiées.
Pour les nombres (33) nous avons

$$p_1=-\frac{(j-1)(n^2-nj-1)}{n(n-1)^2}\ ,\ p_2=-\frac{n(n-1)+1-nj}{n(n-1)},$$

$$p_3=-\frac{nj^2-(2n-1)j+n(n-1)}{n(n-1)^2}.$$

Nous avons

$$(n-j+1)p_3+1=\frac{(j-1)[nj^2-(n^2+2n-1)j+2n(n-1)]}{n(n-1)^2}$$

et il est facile de vérifier que pour $2\leq j\leq n-1$ ce nombre est négatif. La seconde condition (34) n'est donc pas vérifiée.

Nous avons

$$np_3+j=\frac{n(j-1)(n-j-1)}{(n-1)}>0\ ,\ 2\leq j\leq n-2$$

et il nous reste à examiner la première inégalité (35).

Compte tenant de (30), nous trouvons

$$AC-D=-\frac{4n(j-1)(n-j)(n-j-1)}{(n-1)^2j^2},$$

$$\sqrt{1-C^2}=\frac{2}{j}\sqrt{-np_3(np_3+j)}=\frac{2}{(n-1)^2j}\sqrt{n(j-1)(n-j-1)[nj^2-(2n-1)j+n(n-1)]}$$

et la première inégalité (35) devient, après simplifications,

$$\sqrt{nj^2-(2n-1)j+n(n-1)}\geq\sqrt{(n-j)(n-j-1)}$$

ou

$$(n-1)j^2\geq 0,$$

qui est évidemment vérifiée.

On peut donc appliquer le théorème 9 et l'inégalité (54) est démontrée.

II. L'inégalité (56). Nous procédons exactement comme pour (54). Nous avons

$$r_1=(j-1)(n-1)+1+n(n-1)(n-2),\ r_2=(j-1)(n-1)+1+n(n-2)=(n-1)(n+j-2),$$

$$r_3=(j-1)(n-1)+1\ ,\ s=n^2(n-1)\ ,\ s'=n(n-1)(j-2)\ ,\ s''=n^2(n-1).$$

Nous déduisons

$$p_1=-\frac{n-j}{(n-1)(n-j+2)}\ ,\ p_2=-\frac{n-j}{n-j+2}\ ,\ p_3=-\frac{n+j-2}{(n-1)(n-j+2)},$$

$$(n-j+1)p_1+1=-\frac{(n-j)(j-2)}{(n-1)(n-j+2)}<0\ ,\ 3\leq j\leq n-1$$

et la seconde inégalité (34) n'est pas vérifiée.

Nous avons aussi

$$np_3+j=\frac{(n-j)[(n-1)j-(n-2)]}{(n-1)(n-j+2)}>0\ ,\ 3\leq j\leq n-1,$$

$$AC-D=-\frac{4n(n-2)(j-1)(n-j)}{(n-1)(n-j+2)j},$$

$$\sqrt{1-C^2}=\frac{2}{(n-1)(n-j+2)j}\sqrt{n(n-j)(n+j-2)[(n-1)j-(n-2)]}$$

et la première inégalité (35) devient, après simplifications,

$$\sqrt{(n+j-2)[(n-1)j-(n-2)]}\geq(n-2)\sqrt{j-1}$$

ou

$$(n-1)j^2\geq 0.$$

En vertu du théorème 9, l'inégalité (56) est donc démontrée.

III. L'inégalité (57). Nous avons

$$r_1=(j-1)+(n-1)(n-2)\ ,\ r_2=(j-1)+(j-1)(n-2)=(n-1)(j-1)$$

$$r_3=j-1\ ,\ s=n(n-1)\ ,\ s'=0\ ,\ s''=n(n-1)$$

et nous déduisons

$$p_1=-\frac{(j-1)(n-j)}{n(n-1)}\ ,\ p_2=-\frac{n-j}{n}\ ,\ p_3=-\frac{j^2-2j+n}{n(n-1)},$$

$$(n-j+1)p_3+1=-\frac{(j-1)(j-2)(n-j)}{n(n-1)}<0\ ,\ 3\leq j\leq n-1.$$

La seconde inégalité (34) n'est donc pas vérifiée.

Nous avons aussi

$$np_{3,j} = \frac{(j-1)(n-j)}{n-1} > 0 \ , \ 3 \le j \le n-1 ,$$

$$AC - D = -\frac{4(j-1)(n-j)^2}{(n-1)j^2} ,$$

$$\sqrt{1-C^2} = \frac{2}{(n-1)j}\sqrt{(j-1)(n-j)(j^2-2j+n)}$$

et la première inégalité (35) devient

$$\sqrt{n(j^2-2j+n)} \ge n-j$$

ou

$$(n-1)j^2 \ge 0,$$

qui est évidemment vérifiée.

L'inégalité (57) est donc aussi démontrée.

16. — Finalement nous avons obtenu la propriété suivante, analogue à celle exprimée par le théorème **10**.

THÉORÈME **11.** — *La suite (45) où chaque terme est répété $n-1$ fois est une suite moyenne de la suite (46) dans laquelle chaque terme est répété n fois ($n > 2$).*

Il en résulte qu'on peut trouver $n(n-1)$ nombres non-négatifs $q'_{r,s}$, $r = 1,2,\ldots,n$, $s = 1,2,\ldots,n-1$, de manière que l'on ait

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n-1} q'_{i,j}\, y'_j , \quad \sum_{j=1}^{n-1} q'_{i,j} = 1 \ , \quad \sum_{i=1}^{n} q'_{i,j} = \frac{n}{n-1} ,$$

$$i = 1,2,\ldots,n \ , \ j = 1,2,\ldots,n-1 .$$

§ 4.

17. — MM. G. H. HARDY, J. L. LITTLEWOOD et G. POLYA ont introduit la notion de suite moyenne en étudiant certaines inégalités vérifiées par les fonctions convexes [11]. Cette propriété, sous une forme un peu plus générale [12], s'énonce de la manière suivante.

11) G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. POLYA „*Some simple inequalities satisfied by convex functions*" Messenger of Math., **58**, 145—152 (1929).

12) Voir loc. cit. 8).

LEMME **5.** — *Pour que l'inégalité*

$$\text{(58)} \qquad \sum_{i=1}^{r} A_i \varphi(x_i) \ge \sum_{i=1}^{s} B_i \varphi(y_i) \quad , \ (r+s \ge 3),$$

où

$A_i > 0$, $B_i > 0$, $A_1 + A_2 + \cdots + A_r = B_1 + B_2 + \cdots + B_s = 1$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$, $y_1 < y_2 < \cdots < y_s$, *soit vérifiée pour toute fonction $\varphi(x)$ non-concave (d'ordre 1) dans un intervalle contenant les points x_i, y_i, il faut et il suffit que l'on puisse trouver rs nombres non-négatifs $p_{i,j}$ de manière que l'on ait*

$$\sum_{\nu=1}^{r} p_{i,\nu} = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{s} B_\nu p_{\nu,j} = A_j , \quad y_i = \sum_{\nu=1}^{r} p_{i,\nu} x_\nu ,$$

$$i = 1,2,\ldots,s \ , \ j = 1,2,\ldots,r.$$

Si $\varphi(x)$ est convexe, dans (58) le signe $>$ est valable.

De cette propriété nous déduisons le

THÉORÈME **12.** — *Si $\varphi(x)$ est une fonction non-concave dans un intervalle contenant les (1) et si (2) est la suite dérivée de (1), on a l'inégalité*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \ge \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \varphi(y_j).$$

Si la fonction $\varphi(x)$ est convexe, l'égalité n'a lieu que si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Cette propriété est due à M. K. TODA [13].

Nous avons signalé, il y a déjà quelque temps, cette inégalité, et elle a été effectivement démontrée par M. H. E. BRAY [14], pour $\varphi(x) = x^p$, p entier positif. Pour p quelconque l'inégalité a été étudiée par M. S. KAKEYA [15].

18. — Le lemme 5 peut aussi être appliqué aux suites (45) et (46). De cette façon nous obtenons une nouvelle propriété qui est donnée par le

13) KIYOSHI TODA „*On certain functional inequalities*" Journal of the Hiroshima Univ., (A), **4**, 27—40 (1934).

14) HUBERT E. BRAY „*On the zeros of a polynomial and of its derivative*" Amer. Journal of Math., **53**, 864—872 (1931).

15) SOICHI KAKEYA, „*On an inequality between the roots of an equation and its derivative*" Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, (3), **15**, 149—154 (1933).

THÉORÈME 13. — *Si les suites* (45) *et* (46) *s'obtiennent de* (1) *et* (2) *par les formules* (44) *et si* $\varphi(x)$ *est une fonction non-concave dans un intervalle contenant les points* (45) *et* (46), *on a l'inégalité*

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\varphi(y'_i) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x'_i), \qquad (n > 2). \tag{59}$$

Si la fonction est convexe l'égalité n'a lieu que si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

En effet, de l'étude du lemme 5 il résulte que l'égalité ne peut avoir lieu, si $\varphi(x)$ est convexe, que si $y'_1 = y'_2 = \cdots = y'_{n-1}$, ce qui exige $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

En particulier, nous avons l'inégalité

$$\frac{y'^p_1 + y'^p_2 + \cdots + y'^p_{n-1}}{n-1} \geq \frac{x'^p_1 + x'^p_2 + \cdots + x'^p_n}{n} \tag{60}$$

si $p > 1$, l'égalité ayant lieu seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, en supposant, bien entendu, que tous les zéros (1), donc aussi les nombres (45), (46) soient non-négatifs. Ceci résulte du fait que la fonction x^p est convexe si $p > 1$, $x \geq 0$. La fonction x^p étant concave si $0 < p < 1$, $x \geq 0$, l'inégalité contraire est valable dans ce cas. On voit aussi, de la même manière, que l'inégalité (60) subsiste aussi lorsque $p < 0$, à condition que les zéros (1), donc aussi les nombres (45), (46), soient tous positifs.

19. — Faisons encore une dernière application de l'inégalité (59). La fonction $\log x$ est concave pour $x > 0$. Il en résulte que si les zéros (1) sont positifs nous avons l'inégalité

$$\sqrt[n]{x'_1 x'_2 \ldots x'_n} \geq \sqrt[n-1]{y'_1 y'_2 \ldots y'_{n-1}} \qquad (n > 2). \tag{61}$$

Cette inégalité est valable aussi lorsque (1) sont seulement non-négatifs. L'hypothèse $x'_n = 0$ exige $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ donc $y_1 = y_2 = \ldots y_{n-2} = 0$ et par suite $y'_{n-1} = 0$. Il en résulte que dans (61) l'égalité n'a lieu que si ou bien tous les zéros (1) sont égaux ou bien les $n-1$ premiers sont nuls.

Soit $f(x)$ un polynome de degré $n > 2$ à zéros tous réels et $x_{s,1}, x_{s,2}, \ldots, x_{s,n-s}$ les zéros de la s-ème dérivée $f^{(s)}(x)$. Désignons par $x'_{s,1}, x'_{s,2}, \ldots, x'_{s,n-s}$ les moyennes arithmétiques des zéros $x_{s,i}$ pris $n-s-1$ à $n-s-1$. L'inégalité (61) nous donne la suite d'inégalités

$$\sqrt[n]{x'_{0,1} x'_{0,2} \ldots x'_{0,n}} \geq \sqrt[n-1]{x'_{1,1} x'_{1,2} \ldots x'_{1,n-1}} \geq$$
$$\geq \sqrt[n-2]{x'_{2,1} x'_{2,2} \ldots x'_{2,n-2}} \geq \cdots \geq \sqrt{x'_{n-2,1} x'_{n-2,2}}$$

en supposant, bien entendu, que les zéros de $f(x)$ soient tous non négatifs.

Il est facile de voir que pour toutes ces inégalités les conditions d'égalité sont les mêmes que pour (61).

20. — Enfin, changeons encore un peu les notations. Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les zéros de $f(x)$. On voit facilement que $x'_{n-2,1}$, $x'_{n-2,2}$ sont les zéros de $f^{(n-2)}(x)$. Mais, le produit de ces zéros est égal à la moyenne arithmétique des produits deux à deux des nombres a_i. Nous obtenons donc la propriété suivante.

THÉORÈME 14. — *Si* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 2)$ *sont des nombres non-négatifs et si* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont les moyennes arithmétiques de ces nombres pris* $n-1$ *à* $n-1$, *nous avons l'inégalité*

$$\sqrt[n]{A_1 A_2 \ldots A_n} \geq \sqrt{\frac{\sum a_i a_j}{\binom{n}{2}}}, \tag{62}$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si ou bien tous les nombres a_i *sont égaux, ou bien* $n-1$ *de ces nombres sont nuls.*

Notre inégalité, pour $n = 3$ et pour $n = 4$, peut s'écrire

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{ab+bc+ca}$$

$$\sqrt[4]{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{ab+ac+ad+bc+bd+cd}$$

a, b, c, d étant des nombres non-négatifs.

L'intérêt de l'inégalité (62) consiste dans le fait que le premier membre est une superposition de moyennes arithmétiques et d'une moyenne géométrique. Si A, G sont les moyennes arithmétique et géométrique des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on a

$$A \geq \sqrt[n]{A_1 A_2 \ldots A_n} \geq G$$

D'autre part on a aussi

$$A \geq \sqrt{\frac{\sum a_i a_j}{\binom{n}{2}}} \geq G$$

et on voit que (61) est une élégante précision de la première de ces inégalités.

Iaşi, le 6 Octobre 1943.