

MATHEMATICA

VOLUMUL XXIII

1947—1948

PAGINILE 123—126

TIBERIU POPOVICIU :

SUR LA FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS

TIMIȘOARA

TIPOGRAFIA ROMANEASCA

SUR LA FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Reçu le 27 Avril 1948

1. — Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle borné et fermé $[a, b]$. Nous désignerons par X le point d'abscisse x de l'axe réelle et par X' le point de coordonnées $(x, f(x))$. En particulier A, A', B, B' sont les points $(a, 0), (a, f(a)), (b, 0), (b, f(b))$. Nous désignerons aussi par

$$[x_1, x_2; f] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

la différence divisée de la fonction $f(x)$ sur les points x_1, x_2 et par

$$[x_1, x_2, x_3; f] = \frac{[x_2, x_3; f] - [x_1, x_2; f]}{x_3 - x_1}$$

la différence divisée de cette même fonction sur les points x_1, x_2, x_3 .

L'aire du trapèze $XX'Y'Y$ ($x \leq y$) est alors, par définition, égale à

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} [f(x) + f(y)](y - x).$$

La formule des accroissements finis résulte de la remarque que l'un au moins des extrema (maximum ou minimum) absolus de la somme des aires des trapèzes $AA'X'X, XX'B'B$ est nécessairement atteint en au moins un point de l'intervalle ouvert (a, b) . En effet, cette somme est égale à

$$F_1(x) = \frac{1}{2} [f(a) + f(x)](x - a) + \frac{1}{2} [f(x) + f(b)](b - x)$$

et $F_1(x)$ est une fonction continue de x dans $[a, b]$, prenant la même valeur

$$(1) \quad F_0 = \varphi(a, b)$$

aux extrémités a, b de cet intervalle. Si la dérivée $f'(x)$ existe dans l'intervalle ouvert (a, b) , on en conclut l'existence d'au moins un $x \in (a, b)$ tel que l'on ait $F_1'(x) = 0$, donc

$$f'(x) = [a, b; f] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2. — Considérons n points $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans l'intervalle $[a, b]$ et supposons toujours que $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$. La somme des aires des trapèzes $AA'_1X_1, X_1X'_1X_2X_2, \dots, X_{n-1}X'_{n-1}X_nX_n, X_nX'_nB'B$ est égale à

$$(2) \quad F_n(M) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n [f(x_i) + f(x_{i+1})] (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^n \varphi(x_i, x_{i+1})$$

en posant $x_0 = a, x_{n+1} = b$ et en désignant par M le point de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans l'espace ordinaire à n dimensions. $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est alors une fonction continue de $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans un domaine borné et fermé D . Ce domaine D est formé par un simplexe $M_0M_1 \dots M_n$ dont les sommets sont les points

$$M_i(\underbrace{a, a, \dots, a}_i, \underbrace{b, b, \dots, b}_{n-i}), \quad i=0, 1, \dots, n \\ (M_0(b, b, \dots, b), \quad M_n(a, a, \dots, a)).$$

Les points intérieurs $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de D sont alors caractérisés par les inégalités $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$. Le point M appartient à la face D_i opposée au sommet M_i de D si $x_i = x_{i+1}$ et ce point M est un point intérieur de cette face si $a < x_1 < \dots < x_i = x_{i+1} < x_{i+2} < \dots < x_n < b$.

De la formule (2) il résulte immédiatement que si $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est sur la face D_i on a

$$F_n(M) = F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x_n).$$

En particulier nous avons

$$(3) \quad F_n(a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = F_n(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \\ = F_n(x_1, x_2, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}) = \dots = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) = \\ = F_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b) = F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

ce qui nous montre que $F_n(M)$ prend les mêmes valeurs sur les faces D_i , $i=0, 1, \dots, n$. L'interprétation géométrique de ce fait est d'ailleurs très simple.

Enfin nous pouvons remarquer aussi que

$$(4) \quad F_n(M_i) = F_0, \quad i=0, 1, \dots, n,$$

F_0 étant défini par (1).

3. — Ceci étant nous pouvons démontrer le

Théorème 1. — Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle fermé $[a, b]$ et est dérivable dans l'intervalle ouvert (a, b) , la fonction

$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ atteint au moins un de ses extrema absolus en au moins un point intérieur du domaine D .

La fonction $F_n(M)$ prend la valeur F_0 . Si cette fonction se réduit à une constante le théorème est démontré. Dans le cas contraire, et pour fixer les idées, supposons que $F_n(M)$ prenne des valeurs $> F_0$. Il suffit alors de démontrer que le maximum de $F_n(M)$ est atteint en un point intérieur de D .

Nous pouvons démontrer maintenant le théorème par induction complète sur n . Supposons que le théorème soit vrai pour la fonction $F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Nous allons démontrer que le maximum de $F_n(M)$ ne peut être atteint seulement sur les faces D_i du domaine D . Dans le cas contraire ce maximum serait atteint en un point intérieur de la face D_i , par suite des égalités (3), (4) et par suite de l'hypothèse que le théorème est vérifié pour la fonction F_{n-1} . Soit $(x_1, x_2, \dots, x_i, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$ un point intérieur de D_i où le maximum est atteint. Nous avons $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ et du fait qu'à l'intérieur de D $F_n(M)$ prend des valeurs plus petites il résulte que

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_i, t, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) < F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad x_i < t < x_{i+1}, \\ i=0, 1, \dots, n-1$$

ou

$$(5) \quad \varphi(x_i, t) + \varphi(t, x_{i+1}) < \varphi(x_i, x_{i+1}), \quad x_i < t < x_{i+1}, \quad i=0, 1, \dots, n-1.$$

Un calcul simple nous donne

$$(6) \quad \varphi(x_i, x_{i+1}) - \varphi(x_i, t) - \varphi(t, x_{i+1}) = \\ = \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) (t - x_i) (x_{i+1} - t) [x_i, t, x_{i+1}; f] = \\ = \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) (t - x_i) \{ [x_i, x_{i+1}; f] - [x_i, t; f] \} = \\ = \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) (t - x_{i+1}) \{ [x_i, x_{i+1}; f] - [x_{i+1}, t; f] \}$$

et l'inégalité (5) permet d'écrire

$$[x_i, t; f] < [x_i, x_{i+1}; f] < [x_{i+1}, t; f], \quad x_i < t < x_{i+1}, \quad i=0, 1, \dots, n-1.$$

Faisant tendre t vers x_i puis vers x_{i+1} , nous en déduisons

$$f'(x_i) \leq [x_i, x_{i+1}; f], \quad i=1, 2, \dots, n-1, \\ [x_i, x_{i+1}; f] \leq f'(x_{i+1}), \quad i=0, 1, \dots, n-2,$$

d'où

$$[a, x_1; f] \leq [x_1, x_2; f] \leq [x_2, x_3; f] \leq \dots \leq [x_{n-1}, b; f]$$

ou bien

$$(7) \quad [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f] \geq 0, \quad i=0, 1, \dots, n-2.$$

La fonction $f(x)$ est donc non-concave (d'ordre 1) sur les points $a, x_1, \dots, x_{n-1}, b$. On sait alors qu'on a aussi

$$(8) \quad [a, x_i, b; f] \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Mais, je dis que ces inégalités sont en contradiction avec

$$(9) \quad F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) > F_0,$$

qui résulte de l'hypothèse faite sur les points $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. En effet, un calcul simple nous donne

$$\sum_{i=1}^{n-1} [\varphi(a, x_i) + \varphi(x_i, b) - \varphi(a, b)] = (b-a) [F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - F_0]$$

et, compte tenant de (6),

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - a)(b - x_i) [a, x_i, b; f] = F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - F_0$$

ce qui prouve notre affirmation.

Cette contradiction démontre le théorème 1 puisque pour $n=1$ la propriété résulte facilement.

L'exemple de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \\ (x-b)^2, & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right] \end{cases}$$

nous montre que la propriété exprimée par le théorème 1 n'est plus vraie en générale si la fonction f n'est pas dérivable en tout point de l'intervalle (a, b) .

4. — Nous avons

$$\frac{\partial F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{1}{2} [f'(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1}) + f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})]$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

et nous déduisons le

Théorème 2. — Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle fermé $[a, b]$ et est dérivable dans l'intervalle ouvert (a, b) on peut trouver n points distincts $x_1, x_2, \dots, x_n$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ de (a, b) tel que l'on ait

$$f'(x_i) = [x_{i-1}, x_{i+1}; f] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (x_0 = a, x_{n+1} = b).$$

L'interprétation géométrique est simple.