

ACADEMIA
REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

LUCRĂRILE
SESIUNII GENERALE
ȘTIINȚIFICE

DIN 2—12 IUNIE 1950

E X T R A S

ASUPRA DEMONSTRAȚIEI TEOREMEI LUI
WEIERSTRASS CU AJUTORUL POLINOA-
MELOR DE INTERPOLARE

DE

PROF. TIBERIU POPOVICIU
MEMBRU CORRESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ASUPRA DEMONSTRAȚIEI TEOREMEI LUI WEIER- STRASS CU AJUTORUL POLINOAMELOR DE INTER- POLARE

DE

PROF. TIBERIU POPOVICIU,

MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

Comunicare prezentată în ședința din 7 Iunie 1950.

1. Fie $[a, b]$ un interval finit și închis, care, după caz, poate fi considerat redus la $[0, 1]$ sau $[-1, 1]$, fapt care nu restrânge generalitatea chestiunilor tratate.

Să considerăm un tablou triunghiular de noduri în $[a, b]$

$$x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

și un tablou triunghiular de polinoame în x ,

$$P_{n,0}, P_{n,1}, \dots, P_{n,n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (P_{n,m} = P_{n,m}(x)) \quad (2)$$

Unei funcții $f(x)$ uniforme în $[a, b]$ se atașează șirul de polinoame de interpolare (într'un sens mai general)

$$Q_n[f; x] = \sum_{i=0}^n P_{n,i}(x) f(x_{n,i}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Problema determinării tablourilor (1) și (2) astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n[f; x] = f(x)$$

uniform în $[a, b]$ pentru orice funcție $f(x)$ continuă în $[a, b]$, pusă de E. Borel [1], a fost elegant rezolvată de S. Bernstein [2] prin polinoamele (scrise pentru intervalul $[0, 1]$).

$$B_n[f; x] = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

2. Dacă în particular avem

$$\alpha) \quad P_{n,i}(x) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad x \in [a, b]$$

$$\beta) \quad \sum_{i=0}^n P_{n,i}(x) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

diferența $Q_n[f; x] - f(x)$ se delimitează imediat prin formula

$$|Q_n[f; x] - f(x)| \leq 2 \omega(A_n)$$

unde

$$A_n = \sup_{[a, b]} \sum_{i=0}^n |x_{n,i} - x| P_{n,i}(x)$$

și $\omega(\delta)$ este modulul de oscilație al funcției $f(x)$.

Dacă $A_n \rightarrow 0$, pentru $n \rightarrow \infty$, problema lui E. Borel este rezolvată. Acest lucru are loc în particular în cazul polinoamelor lui S. Bernstein, cum am arătat altă dată [3].

Pentru demonstrarea teoremei lui Weierstrass, pe lângă condițiile α , β , este suficient să avem

$$(A_n \leq) B_n = \sqrt{\sup_{[a, b]} \sum_{i=0}^n (x_{n,i} - x)^2 P_{n,i}(x)} \rightarrow 0, \text{ pentru } n \rightarrow \infty$$

Acest lucru este realizat în cazul polinoamelor lui S. Bernstein, căci atunci $B_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

3. Teorema lui Weierstrass se mai poate demonstra și cu ajutorul polinoamelor introduse de L. Fejér [4] și care derivă din polinoamele de interpolare ale lui Hermite.

Dacă

$$l_n(x) = c(x - x_{n,0})(x - x_{n,1}) \dots (x - x_{n,n}),$$

unde c este o constantă convenabilă.

Să considerăm polinomul lui Hermite

$$\sum_{i=0}^n h_{n,i}(x) f_{n,i} + \sum_{i=0}^n k_{n,i}(x) f'_{n,i} \quad (3)$$

de gradul $2n + 1$, care se reduce la $f_{n,i}$ pentru $x = x_{n,i}$ și a cărei derivată se reduce la $f'_{n,i}$ pentru $x = x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Atunci condiția β se realizează prin $\sum_{i=0}^n h_{n,i}(x) = 1$.

Avem apoi

$$\sum_{i=0}^n h_{n,i}(x) (x - x_{n,i})^2 = 2 \sum_{i=0}^n k_{n,i}(x) (x - x_{n,i}) = 2 l_n^2(x) \sum_{i=0}^n \frac{1}{[l'_n(x_{n,i})]^2}$$

Condiția α este realizată dacă luăm $h_{n,i}(x) = P_{n,i}(x)$ după cum a arătat L. Fejér, în cazul particular pentru polinomul lui Cebâșev (scris pentru intervalul $[-1, 1]$),

$$l_n(x) = T_{n+1}(x) = \cos(n+1) \arccos x.$$

În acest caz

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{[l'_n(x_{n,i})]^2} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{[T'_{n+1}(x_{n,i})]^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=0}^n (1 - x_{n,i}^2) = \frac{1}{2(n+1)}$$

Rezultă că în acest caz

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Așa dar, pentru polinoamele lui L. Fejér,

$$F_n[f; x] = \sum_{i=0}^n h_{n,i}(x) f(x_{n,i})$$

unde $h_{n,i}(x)$ sunt polinoamele fundamentale de prima specie corespunzătoare polinoamelor lui Hermite (3) și nodurilor lui Cebâșev $x_{n,i}$, verifică inegalitatea

$$|F_n[f; x] - f(x)| \leq 2 \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \quad x \in [-1, 1].$$

Rezultă de aici că *aproximația dată de polinoamele lui L. Fejér, este cel puțin de același ordin cu aproximația dată de polinoamele lui S. Bernstein.*

Observațiile de mai sus sugerează diverse noi probleme asupra polinoamelor de interpolare, pe care le vom trata într-o lucrare mai detaliată.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Делаются несколько замечаний касательно полиномов приближенности формы $\sum_{i=0}^n P_{n,i}(x) f(x_{n,i})$, обобщающих полиномы С. Н. Бернштейна (2). Наряду с условиями α , β можно легко ограничить условие при помощи модуля колебаний функции $f(x)$. Показывается что полиномы Л. Фейера (4) приводят к теореме Вейерштрасса с приближенностью, достигающей приближенности многочленов С. Н. Бернштейна.

RÉSUMÉ

Quelques remarques sur les polynômes d'approximation de la forme $\sum_{i=0}^n P_{n,i}(x) f(x_{n,i})$, généralisant les polynômes de S. Bernstein [2]. Sous les conditions α , β on peut facilement délimiter l'erreur à l'aide du module d'oscillation de la fonction $f(x)$. Comme application on montre que les polynômes de L. Fejér [4] conduisent au théorème de Weierstrass, avec une approximation qui atteint celle des polynômes de S. Bernstein.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*. 1905.
2. S. Bernstein, *Demonstrația teoremei lui Weierstrass bazată pe calculul probabilităților*. Comunicările Soc. Matem. din Harcov, 2, 13, 1—2, 1912.
3. T. Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. *Mathematica*, 10, 49—54, 1934.
4. L. Fejér, *Über Weierstrassche Approximation besonders durch Hermitesche Interpolation*. *Math. Ann.*, 102, 707—725, 1930.