

ACADEMIA
REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

LUCRĂRILE SESIUNII GENERALE ȘTIINȚIFICE

DIN 2—12 Iunie 1950

EXTRAS

ASUPRA FORMEI RESTULUI ÎN UNELE
FORMULE DE APROXIMAȚIE ALE
ANALIZEI

DE

PROF. TIBERIU POPOVICIU
MEMBRU CORRESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ASUPRA FORMEI RESTULUI IN UNELE FORMULE DE APROXIMAȚIE ALE ANALIZEI

DE

PROF. TIBERIU POPOVICIU

MEMBRU CORRESPONDENT AI, ACADEMIEI R.P.R.

Comunicare prezentată în ședința din 3 Iunie 1950.

1. Restul în formulele de derivare și de integrare aproximativă se prezintă de obicei sub forma unei funcționale liniare $R[f]$. Câmpul acestei funcționale, în cazurile cele mai simple și mai importante în practică, este câmpul funcțiilor continue, eventual al funcțiilor derivabile, sau admitând derivate continue până la un anumit ordin dat inclusiv, într'un interval finit și închis $[a, b]$.

Dacă aproximarea are caracterul unei aproximări polinomiale, *gradul de exactitate* n al formulei respective este bine determinat de proprietatea că

$$R[1] = R[x] = \dots = R[x^n] = 0, \quad R[x^{n+1}] \neq 0 \quad (1)$$

Putem, pentru simplificare, să ne mărginim la cazul $R[1] = 0$. Avem deci $n \geq 0$. Formula de aproximare respectivă este deci exactă (fără rest) pentru orice polinom de gradul n .

2. Pentru aplicațiile practice ale formulelor de aproximare este important de a se exprima restul sub o formă convenabilă. Acest lucru se realizează de obicei, în cazul lui $R[f]$ considerat mai sus, cu ajutorul derivatei $f^{(n+1)}(x)$ de ordinul $n+1$ al funcției $f(x)$, presupunând bineînțeles că această derivată există, eventual că este continuă.

Problema restului a fost studiată de un mare număr de autori. Amintim aici în primul rând pe A. A. Marcov (1) și semnalăm cercetările lui G. D. Birkhoff [2], G. Kowalewshi [3] și J. Radon [4]. Problema a fost apoi reluată, în lumina noilor cercetări asupra funcționalelor liniare, de către E. Ya. Remez într'un important memoriu [5].

Cercetările noastre asupra funcțiilor convexe de ordin superior conduc în mod natural la o nouă formă a restului, formă care e susceptibilă să unifice rezultatele de până acum, totdeauna punând unele din aceste rezultate sub

o formă mai generală și explicând, credem, mai adânc structura acestui rest.

3. Proprietățile cunoscute ale diferențelor divizate ne indică ca, în cazul funcționalei liniare $R[f]$, verificând condițiile (1), să căutăm această funcțională sub forma

$$R[f] = K[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] \quad (2)$$

unde K este independent de funcția $f(x)$ iar $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ sunt $n+2$ puncte din intervalul $[a, b]$ (puncte care depind în general de funcția $f(x)$).

Restul $R[f]$ nu totdeauna are această formă. În cazul când acest lucru este posibil cu un K diferit de zero și cu punctele $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ distincte pentru orice $f(x)$, vom spune că restul $R[f]$ are forma clasică. Denumirea este justificată prin faptul că în cazul important al formulei lui Taylor sau mai general al formulei de interpolare a lui Lagrange, restul are această formă.

Este clar că pentru o funcțională liniară $R[f]$, neidentică nulă, forma clasică nu poate avea loc decât pentru un singur n , egal cu gradul de exactitate, și că atunci $K = R[x^{n+1}]$.

Pentru a recunoaște forma clasică, avem următoarea teoremă:

Pentru ca restul $R[f]$ cu gradul de exactitate n să aibă forma clasică este necesar și suficient ca $R[f] \neq 0$, pentru orice funcție $f(x)$ convexă de ordinul n .

Condiția este evident necesară. Ea este suficientă după cum rezultă dintr'un rezultat anterior al nostru [6].

Din teorema de mai sus, rezultă diverse criterii mai simple care permit în anumite cazuri să recunoaștem forma clasică a restului. Astfel de criterii rezultă direct din cercetările autorilor citați mai sus și direct din teoria funcțiilor convexe de ordin superior [6]. Se vede, imediat, că problema formei clasice a restului revine la problema inegalităților liniare verificate de funcțiile convexe de ordin superior. E de remarcat că problema formei clasice a restului, la cele mai importante formule de derivare și de integrare numerică, revine la problema unor astfel de inegalități pe un număr finit de puncte.

Adăugăm că importante formule de aproximare cum ar fi formulele de derivare aproximativă ale lui A. A. Marcov, formulele de integrare numerică ale lui Cotes și ale lui Gauss, precum și foarte multe formule de această natură descoperite și utilizate de S. E. Mikeldze [7], [8], intră în cazul formei clasice a restului.

4. Dacă restul $R[f]$ nu are forma clasică, expresia lui cu ajutorul diferențelor divizate este mai complicată. Pentru a nu complica aici inutil lucrurile, să presupunem că $R[f]$ este definit în câmpul funcțiilor cu a $(n+1)$, a diferență divizată mărginită (mai precis: câmpul de definiție a lui $R[f]$ conține aceste funcții). Fie (C) clasa funcțiilor $f(x)$ având diferența divizată de ordinul $n+2$ cuprinsă între 0 și 1 exclusiv, deci

$$0 < [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] < 1$$

oricare ar fi punctele distincte $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ din $[a, b]$ și fie

$$A = \sup R[f] \\ f(x) \in (C).$$

A este finit și, fără a restrânge generalitatea, putem presupune $A \geq 0$. Avem atunci

$$\inf R[f] = R[x^{n+1}] - A = -B \leq 0. \\ f(x) \in (C)$$

Se demonstrează atunci că avem

$$R[f] = A[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] - B[x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+2}; f] \quad (3)$$

unde punctele x_i, x'_i sunt în $[a, b]$.

Avem următoarea teoremă:

Dacă marginea superioară A nu este atinsă de niciuna din funcțiile $f(x)$ din clasa (C) , atunci formula (3) e adevărată pentru puncte x_i distincte și pentru puncte x'_i distincte.

Teoria funcțiilor convexe de ordin superior permite de asemenea să recunoaștem, în cazuri importante pentru practică, când are loc acest lucru.

Pentru determinarea efectivă a marginii superioare A , se pot întrebuința rezultatele lui E. Remez [5].

Cazurile $B = 0$, și $A = 0$ corespunzând formei clasice a restului. Teoria de mai sus e valabilă pentru orice n .

5. Restricțiile impuse mai sus exclud din considerațiile noastre anumite funcționale liniare $R[f]$, cum ar fi de exemplu $R[f] = f^{n+1}(0)$. Pentru astfel de cazuri, formula (3) rămâne încă valabilă, însă fără restricția ca punctele x_i , respectiv punctele x'_i , să fie neapărat distincte.

Se mai poate observa că, fără restricție impusă marginii superioare A și dacă ε este un număr pozitiv, formula

$$R[f] = (A + \varepsilon)[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] - (B + \varepsilon)[x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+2}; f]$$

este valabilă cu puncte x_i , respectiv cu puncte x'_i distincte. Se deduce, în particular, că dacă $f(x)$ are o diferență divizată de ordinul $n+1$ mărginită în valoare absolută de numărul M , avem

$$|R[f]| \leq (A + B)M.$$

Demonstrațiile și aplicațiile rezultatelor precedente vor fi expuse într'un memoriu detaliat care este în curs de elaborare.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Остаток в формулах деривации и численного интегрирования представляется в наиболее простых случаях под формой линейной функциональной $R[f]$. Теория конвексных функций высшего порядка позволяет выразить этот остаток под формой (3), при A, B , независимых от функции $f(x)$. Случаи $A = 0$ или $B = 0$ особенно интересны, и мы имеем тогда классическую форму остатка. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы в гипотезе (1) имелось бы $R[f] = 0$ для всякой конвексной функции порядка n $f(x)$. В (2) точки x_i предполагаются отличными.

RÉSUMÉ

Le reste dans les formules de dérivation et d'intégration numérique se présente, dans les cas les plus simples, sous la forme d'une fonctionnelle linéaire $R[f]$. La théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur nous permet d'exprimer ce reste sous la forme (3), A, B étant indépendants de la fonction $f(x)$. Le cas $A = 0$, ou $B = 0$, est particulièrement intéressant; nous avons alors la forme classique du reste. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que, dans l'hypothèse (1), on ait $R[f] \neq 0$ pour toute fonction convexe d'ordre n $f(x)$. (Dans (2) on suppose les points x_i distincts).

BIBLIOGRAPHIE

1. A. A. Markoff, *Differenzenrechnung*, 1896.
2. G. D. Birkhoff, *General mean value and remainder theorems*, Transact. Amer. Math. Soc., 7, 107—136, 1906.
3. G. Kowalewski, *Interpolation und genäherte Quadratur*, 1932.
4. J. Radon, *Restausdrücke bei Interpolations- und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale*, Monatshefte für Math. u. Phys., 42, 389—396, 1935.
5. E. Ya. Remez, *Despre anumite clase de funcționale liniare în spațiile C și termenii-rest ai formulelor de aproximație ale analizei*, Lucrările Inst. Mat. al Acad. de Științe al RSS. Ucraina, Nr. 3, 21—61, 1939, Nr. 4, 47—81, 1940.
6. T. Popoviciu, *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX)*, Bull. Math. Soc. Roumaine de Sc., 43, 85—144, 1942.
7. Ș. E. Micheladze, *Issledovanie formul mehaniceskih cvadratur*, Trudî zvilis-scovo mat. inst., 2, 43—104, 1937.
8. Ș. E. Micheladze, *Cislennoe integrirvanie*, U. M. N., Tom. III, 6 (28) 3—88, 1948.