

ASUPRA FUNCȚIILOR DE O VARIABILĂ REALĂ A CĂROR MULTIME DE DEFINIȚIE ESTE REUNIREA A DOUA SUBMULTIMI DE MONOTONIE OPUSĂ

DE

Prof. EMBERCI POPOVICU

MEMBRU A CORRESPONDENȚEI ACADEMIEI REPUBLICII

*Comunicare prezentată la XI Simpozion 1975 în cadrul Filialei 1981
a Academiei R.P.R.*

1. Vom considera funcții $f(x)$, reale, finite, uniforme și definite pe o mulțime legată carecui E . Vom nota cu $M(f; E)$ mulțimea superioră și cu $m(f; E)$ mulțimea inferioară a acestor funcții. În fine vom face uz de notația

$$[x_1, x_2; f] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Condiția necesară și suficientă ca $f(x)$ să fie monoton pe E este ca să avem $[x_1, x_2; f] \geq 0$ (≤ 0), pentru orice grup de 3 puncte x_1, x_2, x_3 ale lui E . Rezultă că dacă funcția noastră este monotonă se pot găsi punctele $x_1 = x_2 < x_3$ ale lui E , astfel ca să avem $[x_1, x_2; f] = 0$ (> 0).

Fie a un număr real și să punem:

$$E_a = E \cap \{x: x < \infty, a\}, E_a^* = E \cap \{x: x < \infty\}$$

Să notăm cu E_a^+, E_a^- mulțimile E_a, E_a^* respectiv, dacă $a \in E$, punctul a fiind oarecare din aceste mulțimi. Vom avea atunci

$$E_a^+ = E_a, E_a^- = E_a^* \text{ dacă } a \text{ nu aparține lui } E, \\ E_a^+ = E_a \cup \{a\}, E_a^- = E_a^* \text{ sau } E_a^- = E_a, E_a^+ = E_a \cup \{a\} \text{ dacă } a \in E.$$

1) Pentru mai multe detalii se vede la: E. Embici Popoviciu, Analele Universității București, Matematică, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984.

2) Integralele $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ și $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ sunt cunoscute. În caz real arhimedean în intervalul $[a, b]$, chiar dacă nu sînt ambele extreme $f(a)$ și $f(b)$, rezultă că $\int_a^b f(x) dx$ și $\int_b^a f(x) dx$ sînt egale.

Avem mulțimea $E = E_0^* \cup E_0^{**}$, $E_0^* \cap E_0^{**} = \emptyset$ și zicem că E este descompus în maniera a două submulțimi consecutive. Punctul a este punctul de separație a acestei descompuneri. Există o singură descompunere de punct de separație a , dacă acest punct nu aparține lui E și două astfel de descompuneri dacă $a \in E$.

Vom zice că $f(x)$ este o funcție (m) (pe E) dacă există o descompunere $E = E_0^* \cup E_0^{**}$ a lui E în două submulțimi consecutive astfel ca funcția să fie monotună pe fiecare din mulțimile E_0^* , E_0^{**} , monotonia fiind de sens opus pe aceste două submulțimi ale lui E . Mai precis vom zice că $f(x)$ este atunci o funcție (m^+) respectiv o funcție (m^-) după cum ea este necrescătoare respectiv nelăscăscătoare pe E_0^* (deri nelăscăscătoare respectiv necrescătoare pe E_0^{**}).

É clar că orice funcție monotună este în același timp o funcție (m^-) și o funcție (m^+) . Ba și mai, orice funcție care este în același timp o funcție (m^+) și o funcție (m^-) este o funcție monotună. Dacă $f(x)$ este o funcție (m^+) respectiv o funcție (m^-) , funcția $-f(x)$ este o funcție (m^-) respectiv o funcție (m^+) . În fine, orice funcție (m^+) pe E este o funcție (m^+) pe orice submulțime a lui E .

2. Pentru a simplifica expunerea vom face câteva convenții. Lămurirea și creșterea (descreșterea) sunt cazuri particulare ale nelăscăscării (necrescării). Convenim de asemenea ca orice funcție definită pe cel mult un punct să fie considerată ca monotună și oricum indiferent crescătoare sau descreșcătoare.

Cu aceste convenții una din submulțimile de descompunere E_0^* , E_0^{**} , corespunzătoare unei funcții (m) , poate să se reducă la mulțimea vidă. Acest lucru are loc de altfel dacă și numai dacă funcția este monotună. Punctul de separație a poate să fie unul din punctele improprii $-\infty$ sau $+\infty$, ceea ce înseamnă are loc dacă și numai dacă funcția este monotună.

Orice funcție definită pe cel mult 3 puncte este monotună și orice funcție definită pe cel mult 3 puncte este o funcție (m) .

Calele de ca numerele proprii și improprii se fac după regulile obișnuite.

3. Pentru ca $f(x)$ să fie o funcție (m^+) pe punctele $x_1 < x_2 < x_3$ este necesar și suficient ca să avem

$$(1) \quad f(x_2) \leq \max \{f(x_1), f(x_3)\}.$$

În cazul unei mulțimi E având cel puțin 3 puncte, avem:
Teorema 1. Pentru ca $f(x)$ să fie o funcție (m^+) pe E este necesar și suficient ca să fie o funcție (m^+) pe fiecare din grupele de câte trei puncte ale lui E .

Această proprietate se poate enunța și sub forma următoare:

Teorema 1'. Pentru ca $f(x)$ să fie o funcție (m^+) pe E este necesar și suficient ca inegalitatea (1) să fie verificată pentru orice grup de 3 puncte $x_1 < x_2 < x_3$ ale lui E .

În cazul funcțiilor (m^-) avem proprietăți analoge, inegalitatea (1) fiind înlocuită prin

$$f(x_2) \geq \min \{f(x_1), f(x_3)\}, \quad x_1 < x_2 < x_3.$$

Rezultă că dacă o funcție $f(x)$ nu este o funcție (m) putem găsi punctele $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1' < x_2' < x_3'$ ale lui E astfel ca

$$f(x_2) > \max \{f(x_1), f(x_3)\}, \quad f(x_2') < \min \{f(x_1'), f(x_3')\}.$$

Un raționament simplu ne arată că putem atunci găsi 4 puncte $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ale lui E astfel ca și cum

$$(2) \quad [x_1, x_2; f], [x_2, x_3; f], [x_3, x_4; f]$$

să aibe 2 variații de semn ¹⁾.

Însă pe punctele $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ proprietatea de a fi o funcție (m) se exprimă înseamnă prin faptul ca șirul (2) să aibă cel mult 1 variație de semn. Pentru funcțiile definite pe cel puțin 4 puncte deducem deci:

Teorema 2. Pentru ca $f(x)$ să fie o funcție (m) pe E este necesar și suficient ca să fie o funcție (m) pe orice grup de 4 puncte ale lui E .

Această proprietate se poate enunța și sub forma:

Teorema 2'. Pentru ca $f(x)$ să fie o funcție (m) pe E este necesar și suficient ca șirul (2) să aibă cel mult 1 variație de semn, oricare ar fi punctele $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ale lui E .

4. Demonstrația teoremei 1 am dat-o în altă parte ²⁾. Inegalitățile (1) sunt evident necesare. Vom da o nouă demonstrație

¹⁾ Termenii șirului sunt deci totuși $\neq 0$ și alternativ pozitiv și negativ.

²⁾ Tiberiu Popoviciu, *Deux remarques sur les fonctions convexes*, Bull. Sc. Acad. Roumaine, 20, 45--49, 1938.

si suficienti acestor inegalități și vom putea apoi puțin structura funcțiilor $f(x)$.

Avem întâi:

Lema 1. Dacă inegalitatea (1) este verificată pentru orice grup de 3 puncte $x_1 < x_2 < x_3$ ale lui E și dacă a este un număr oarecare, funcția $f(x)$ este monotună pe una cel puțin din mulțimile E_a, E_a^* .

Pentru demonstrație să presupunem contrariul. Putem atunci găsi punctele

$$x_1, x_2, x_3 \in E_a; x_4, x_5, x_6 \in E_a^*; x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$$

astfel ca să avem

$$[x_1, x_2; f] [x_2, x_3; f] < 0, [x_4, x_5; f] [x_5, x_6; f] < 0$$

și se verifică ușor că pe unul cel puțin din grupele de 3 puncte $x_1, x_2, x_3; x_4, x_5, x_6; x_1, x_2, x_4; x_2, x_3, x_5$ inegalitatea (1) nu este verificată.

Se poate încă preciza lema 1, însă enunțul de mai sus este suficient pentru ceea ce urmează. De exemplu se vede ușor că în enunț se poate înlocui E_a, E_a^* prin E_a^*, E_a^{**} respectiv.

Deducem de aici:

Lema 2. Dacă inegalitatea (1) este verificată pentru orice grup de 3 puncte $x_1 < x_2 < x_3$ ale lui E , se poate găsi un punct c astfel ca funcția $f(x)$ să fie necrescătoare pe E_c , și nedescrescătoare pe E_c^* .

Este destul să demonstrăm proprietatea în cazul când $f(x)$ nu este monotun pe E^1 .

Există puncte a astfel ca $f(x)$ să fie monotun pe E_a . Într-adevăr, dacă pentru punctele $x_1 < x_2 < x_3$ ale lui E avem $[x_1, x_2; f] [x_2, x_3; f] < 0$ atunci, în virtutea lemei 1, orice $a < x_1$ verifică proprietatea. Dacă apoi $a_1 < a$ și $f(x)$ este monotun pe E_{a_1} , el este de asemenea monotun pe E_a . Fie b marginea superioară a punctelor a . Punctul b este unicul punct care se bucură de proprietatea că $f(x)$ este monotun pe E_a pentru orice $a \leq b$ și nu este monotun pe E_a dacă $a > b$. Avem $b > -\infty$ și de asemenea $b < +\infty$ deoarece este evident că $b \leq x_1$. La fel se vede că există un punct unic și propriu b' care se bucură de proprie-

tatea că $f(x)$ este monotun pe $E_{b'}$ pentru orice $a' > b'$ și nu este monotun pe $E_{b'}$ dacă $a' < b'$. Avem inegalitatea $b' \leq b$ căci, în cazul contrar, funcția nu ar fi monotună pe niciuna din mulțimile $E_{b+b'}, E_{b-b'}$, ceea ce e în contradicție cu lema 1.

Lema 2 va fi satisfăcută dacă luăm $c \in [b, b']$. Funcția este monotună pe fiecare din mulțimile E_c, E_c^* și rămâne să demonstrăm că nu este strict necrescătoare pe E_c și nedescrescătoare pe E_c^* . Pentru fixarea ideilor să arătăm că funcția este necrescătoare pe E_c . În cazul contrar am putea găsi punctele $x_1, x_2 \in E_c$, $x_1 < x_2$ astfel ca să avem $f(x_1) > f(x_2)$. Însă, funcția nu fiind monotună pe E , se pot găsi punctele $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ astfel ca să avem $f(x_1) > f(x_2)$. Ar trebui să avem atunci $x_2 < x_1'$ însă $f(x_1') < f(x_2')$ inegalitatea (1) nu este verificată pe punctele x_1, x_2, x_1' . Dacă $f(x_2) \geq f(x_1)$ ar trebui să avem și $x_1 < x_1'$ și inegalitatea (1) nu ar fi verificată pe punctele x_1, x_1', x_2 . Se demonstrează la fel că $f(x)$ este nedescrescătoare pe E_c^* .

5. Teorema 1 rezultă acum ușor. Fie c un punct care satisfacă lema 2. Dacă c nu aparține lui K descompunerea căutată este $E = E_c^* \cup E_c^*$. Dacă $c \in K$, pe una cel puțin din mulțimile $E_c = \{c\}$, $E_c^* = \{c\}$ funcția este monotună. Într-adevăr, în cazul contrar, am putea găsi punctele $x_1 \in E_c, x_2 \in E_c^*$ astfel ca $f(x_1) > f(c), f(x_2) < f(c)$ și inegalitatea (1) nu ar fi verificată pe punctele x_1, c, x_2 . Teorema 1 rezultă încă, adăugând punctul c la una din mulțimile E_c, E_c^* și descompunerea lui K este încă de forma $E = E_c^* \cup E_c^*$.

Rezultate mai bune subsistă pentru funcțiile (m).

Dacă $f(x)$ este o funcție (m) punctele c de separație ale descompunerilor $E = E_c^* \cup E_c^*$ în două submulțimi consecutive de monotonie opuse formează un interval $[b', b]$, finit sau infinit, putând să se reducă la un singur punct. Acest interval este totdeauna închis cu condiția de a considera și numerele apropiate

$-\infty + \infty$. Dacă $f(x)$ nu este monotun, b', b sunt totmai numerele finite determinate mai sus. În acest caz b', b trebuie să aparțină oricărui interval închis care conține trei puncte $x_1 < x_2 < x_3$ ale lui E astfel ca să avem $[x_1, x_2; f] [x_2, x_3; f] < 0$. Dacă $f(x)$ este monotun, intervalul $[b', b]$ este infinit sau se reduce la unul din punctele improprii, $-\infty, +\infty$. Într-adevăr, dacă primim

*) Vezi mai jos căutăm că $f(x)$ este monotun

funcția ca o funcție (m^+); avem $b' = -\infty$ dacă ea este nedescrescătoare, și $b' = +\infty$ dacă ea este crescătoare.

Dacă mulțimea $E = (b', b)$ nu este vidă, funcția se reduce la o constantă pe această mulțime. Într-adevăr, dacă $f(x)$ este o funcție (m^+) și dacă $x_0 \in E = (b', b)$, el este necrescător pe $E_{x_0} = \{x_0\}$ și nedescrescător pe $E_{x_0} = \{x_0\}$. Se deduce că $f(x_0) = m(f; E)$. La fel se vede că dacă $f(x)$ este o funcție (m^-) avem $f(x_0) = M(f; E)$.

Din cele ce pînă acum rezultă că, pentru o funcție (m), descompunerea lui E în două submulțimi consecutive de monotonică opusă se poate face, în general, în mai multe și chiar într-o infinitate de feluri. Este ușor de văzut care sunt cazurile în care această descompunere este unică. Presupunând că $f(x)$ este o funcție (m^+), pentru unicitate este necesar ca mulțimea $E = (b', b)$ să fie vidă și în plus e necesar și suficient ca să avem: $b', b \in E$ și $f(b') > m(f; E_k)$ sau $f(b') > m(f; E_k)$, dacă $b' = b$; cel mult unul din punctele a', b să aparțină lui E și $f(b') > m(f; E_k)$ respectiv $f(b') > m(f; E_k)$ după cum $b' \in E$ respectiv $b \in E$, dacă $b' < b$.

6. Într-adevăr, de a merge din departe vom face asupra funcțiilor (m) o observație care ne va fi utilă mai jos.

Fie $f(x)$ o funcție (m^+), $[b', b]$ intervalul punctelor de separație corespunzătoare iar I un interval care are (inclus sau nu) care nu are puncte comune cu E (dec. $E \cap I = \emptyset$). În fine fie E_1 o submulțime proprie a lui I . În aceste condiții avem:

Lemma 3. Dacă intervalele $[b', b]$ și I au cel puțin un punct comun și dacă γ este o constantă astfel ca $\gamma \leq m(f; E)$, funcția

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{pentru } x \in E, \\ \gamma, & \text{pentru } x \in E_1, \end{cases}$$

este o funcție (m^+) pe $E \cup E_1$.

Este suficient să demonstrăm proprietatea pentru $E_1 = I$. Fie atunci $c \in [b', b] \cap I$ și să punem $F = E \cup I$. Funcția $f_1(x)$ este necrescătoare pe F , căci, se vede ușor că ea este necrescătoare pe $E \cup I$ iar F este o submulțime a acestei mulțimi. Se vede la fel că $f_1(x)$ este nedescrescătoare pe E . Lemma 3 rezultă.

Se poate încă observa că intervalul punctelor de separație a descompunerilor lui F corespunzătoare funcției $f_1(x)$ conține intervalul I , deci $[b', b]$ conține de asemenea intervalul I .

O proprietate analogă are loc pentru funcțiile (m^-), inegalitatea din ipoteza lemei 3 fiind atunci $\gamma \geq M(f; E)$.

7. Ne propunem să generalizăm Teorema 2 supunând restricția ca submulțimile considerate ale lui E să fie consecutive.

Vom zice că $f(x)$ este o funcție (M) pe E dacă E se poate descompune în reuniunea a două submulțimi (vide sau nu), pe fiecare funcția fiind monotonică și monotonia fiind de sens opus pe cele două submulțimi. E clar că orice funcție (m) este o funcție (M). În particular deci orice funcție definită pe cel mult 3 puncte este o funcție (M). În fine e evident că orice funcție (M) pe E este o funcție (M) pe orice submulțime a lui E .

Să examinăm întâi funcțiile definite pe 4 puncte distincte $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Să considerăm grupul

$$(3) \quad f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4).$$

Dacă funcția $f(x)$ nu este univalentă, ea este evident o funcție (M). În cazul contrari (deci dacă funcția e univalentă) două cazuri trebuie distins:

1°. Șirul (3) nu este strict monotonic.

2°. Șirul (3) este strict monotonic (crescător sau descrescător).

În cazul 1° avem:

$$[x_1, x_2] \cap [x_3, x_4] \neq \emptyset \text{ sau } [x_1, x_4] \cap [x_2, x_3] \neq \emptyset$$

și examinând toate cazurile posibile se vede că $f(x)$ este o funcție (M); descompunerea mulțimii de definiție fiind, de exemplu:

$$\begin{aligned} \{x_1\} \cup \{x_3, x_4, x_1\}, \{x_2\} \cup \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_3\} \cup \{x_1, x_2, x_4\}, \\ \{x_4\} \cup \{x_1, x_2, x_3\} \quad \text{sau} \quad \{x_1, x_4\} \cup \{x_2, x_3\} \end{aligned}$$

În cazul 2° este suficient, a examina toate descompunerile mulțimii de definiție în reuniunea a două submulțimi pentru a vedea ca funcția nu este o funcție (M).

Avem deci:

Teorema 3. Pentru ca funcția $f(x)$, definită pe punctele $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, să fie o funcție (M), este necesar și suficient ca șirul (3) să nu fie strict monotonic.

8. Să considerăm acum o funcție $f(x)$ definită pe 5 puncte distincte $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Pentru ca $f(x)$ să fie o funcție (M) este necesar ca ea să fie o funcție (M) pe orice grup de 4

puncte alese printre punctele x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , însă, această condiție nu este suficientă.

Să căutăm să determinăm funcțiile care se bucură de proprietatea că ele nu sunt funcții (M); dar că ele sunt funcții (M) pe orice grup de 4 puncte alese dintre cele 5 puncte considerate. Vom distinge pentru aceasta două cazuri:

$$1. f(x_1) \neq f(x_5).$$

$$2. f(x_1) = f(x_5).$$

Vom arăta că în cazul 1^o nu există funcții de forma cerută. Pentru demonstrație putem presupune $f(x_1) < f(x_5)$. Atunci funcția nu poate fi necrescătoare pe punctele x_2, x_3, x_4 și trebuie deci să avem $f(x_2) < f(x_3)$ sau $f(x_2) < f(x_4)$.

Să presupunem $f(x_1) < f(x_3)$, $f(x_2) < f(x_4)$. Funcția poate avea una din următoarele 10 forme¹⁾:

$$1^o. f(x_2) < f(x_3) < f(x_4) < f(x_5),$$

$$2^o. f(x_2) < f(x_4) < f(x_3) < f(x_5),$$

$$3^o. f(x_4) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_5),$$

$$4^o. f(x_3) < f(x_4) < f(x_2) < f(x_5),$$

$$5^o. f(x_2) < f(x_4) \leq f(x_3) \leq f(x_5),$$

$$6^o. f(x_3) \leq f(x_2) < f(x_4) < f(x_5),$$

$$7^o. f(x_4) \leq f(x_2) < f(x_3) \leq f(x_5),$$

$$8^o. f(x_2) < f(x_3) \leq f(x_4), f(x_4) \leq f(x_5),$$

$$9^o. f(x_3) \leq f(x_2) \leq f(x_4), f(x_4) \leq f(x_5),$$

$$10^o. f(x_4) \leq f(x_2) < f(x_3), f(x_3) \leq f(x_5).$$

În cazurile 1^o, 2^o, 3^o respectiv 4^o funcția nu este o funcție (M) pe grupele de 4 puncte x_1, x_2, x_3, x_4 ; x_1, x_2, x_3, x_5 ; x_1, x_2, x_4, x_5 ; x_1, x_3, x_4, x_5 respectiv x_2, x_3, x_4, x_5 . În cazurile 5^o, 6^o respectiv 7^o funcția este o funcție (M), fiind monotună pe grupele de 4 puncte x_2, x_3, x_4, x_5 ; x_1, x_2, x_3, x_5 respectiv x_1, x_2, x_4, x_5 . În cazurile 8^o, 9^o respectiv 10^o funcția este o funcție (M), descompunerea în două submulțimi de monotone opuse fiind, de exemplu, $\{x_2, x_4\} \cup \{x_3, x_5\}$, $\{x_2, x_4\} \cup \{x_1, x_3, x_5\}$ respectiv $\{x_3, x_5\} \cup \{x_1, x_2, x_4\}$.

Prin simetrie se vede că aceeași proprietate are loc dacă $f(x_1) < f(x_3)$, $f(x_2) < f(x_4)$. În fine proprietatea rezultă la fel și pentru $f(x_1) = f(x_5)$.

¹⁾ Cele 10 posibilități nu se exclud mutual.

Pir acum cazul 2^o dela începutul acestui număr. Vom arăta că în acest caz există funcții care nu sunt funcții (M) pe cele 5 puncte, dar sunt funcții (M) pe orice grup de 4 puncte alese dintre acestea.

O astfel de funcție nu poate să fie monotună pe punctele x_2, x_3, x_4 și nu poate lua valoarea $f(x_2) = f(x_3)$ în niciunul din aceste puncte. Dacă $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$ sunt toți mai mari sau toți mai mici decât $f(x_5)$ funcția este o funcție (M), descompunerea fiind, de exemplu:

$$\{x_1, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_5\} \text{ sau } \{x_2, x_4\} \cup \{x_1, x_3, x_5\}.$$

Rămâne să examinăm funcțiile pentru care unul din șirurile

$$(4) \quad \begin{cases} \max(f(x_2), f(x_4)), f(x_1) = f(x_3), f(x_5) \\ f(x_2), f(x_1) = f(x_4), \min(f(x_2), f(x_4)) \end{cases}$$

este crescător

Se verifică ușor că o astfel de funcție este o funcție (M) pe orice grup de 4 puncte alese dintre punctele x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , dar că ea nu este o funcție (M) pe toate aceste puncte.

În definitiv avem:

Teorema 4. Pentru ca funcția $f(x)$, definită pe punctele $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, să fie o funcție (M), este necesar și suficient ca să fie o funcție (M) pe orice grup de 4 puncte alese dintre punctele x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , și ca să nu fie de forma $f(x_1) = f(x_5)$, unul din șirurile (4) fiind crescător.

În felul acesta structura funcțiilor (M) definite pe cel mult 5 puncte este prezată.

9. În cele ce urmează ne vom folosi de următoarele:

Lema 4. Fie $E = G \cup H$, $G \cap H = \emptyset$ și $f(x)$ o funcție definită pe E , care verifică următoarele proprietăți:

1^o. $f(x)$ este o funcție (m) pe G și este o funcție (m) pe H .

2^o. $m(f; G) \geq M(f; H)$.

3^o. Intervalele $[a, b]$ și $[b_1, b_2]$, ale punctelor de separație ale descompunerilor corespunzătoare funcției $f(x)$ pe G și H , au cel puțin un punct comun.

Atunci $f(x)$ este o funcție (M) pe E .

Fie $a \in [b', b] \cap [b_1', b_1]$ și $G = G_1 \cup G_2$, $H = H_1 \cup H_2$ descompunerile corespunzătoare ale lui G, H pentru punctul de separație a . Să considerăm mulțimile $E_1 = G_2 \cup H_1$, $E_2 =$

$= G_1' \cup H_1'$. Atunci $E = E_1 \cup E_2$. Dar funcția este necrescătoare pe G_1' și pe H_1' . Dacă $x_1 \in G_1'$, $x_2 \in H_1'$ avem $x_1 < x_2$ și $f(x_1) \leq m(f; G) \leq M(f; H) \leq f(x_2)$, adică $f(x_1) \leq f(x_2)$. Același inegalitate arată că funcția $f(x)$ este necrescătoare pe mulțimea E_1 . La fel se vede că ea este nedescrescătoare pe E_2 . Lemma 4 este demonstrată.

10. Rămâne să examinăm funcțiile definite pe o mulțime E având cel puțin 5 puncte distincte. Pentru aceste funcții avem:

Teorema 5. Pentru ca funcția $f(x)$ să fie o funcție (M) pe E , este necesar și suficient ca ea să fie o funcție (M) pe orice grup de 5 puncte ale lui E .

Condiția este evident necesară. Rămâne să arătăm că ea este și suficientă.

Dacă $f(x)$ este o funcție (M) pe orice grup de 5 puncte ale lui E el este, a fortiori, o funcție (M) pe orice grup de 4 puncte ale lui E .

11. Pentru a ajunge la demonstrația cerută vom stabili întâi câteva proprietăți ajutătoare.

Fie α un număr real și să notăm cu E^{α} mulțimea punctelor $x \in E$ pentru care $f(x) \leq \alpha$ și cu $E^{>\alpha}$ mulțimea punctelor $x \in E$ pentru care $f(x) > \alpha$. Avem evident $E^{\alpha} \cup E^{>\alpha} = E$ și deducem:

Lemma 5. Dacă $f(x)$ este o funcție (M) pe orice grup de 4 puncte ale lui E și dacă α este un număr real oarecare, cel puțin una din proprietățile următoare este satisfăcută:

$f(x)$ este o funcție (m) pe E^{α} .

$f(x)$ este o funcție (m') pe $E^{>\alpha}$.

Într-adevăr, în cazul contrari, nu putea găsi punctele $x_1, x_2, x_3 \in E^{\alpha}$, $x'_1, x'_2, x'_3 \in E^{>\alpha}$, $x_1 < x_2 < x_3$, $x'_1 < x'_2 < x'_3$, astfel ca să avem:

$$f(x'_1) < \min(f(x_1), f(x_2)), f(x'_3) > \max(f(x_1), f(x_3)).$$

Este ușor de văzut atunci că dacă $x_2 < x'_2$, $f(x)$ nu este o funcție (M) pe punctele x_1, x_2, x'_2, x'_3 iar dacă $x_2 > x'_2$, $f(x)$ nu este o funcție (M) pe punctele x'_1, x'_2, x_3, x_4 .

Să presupunem acum că $f(x)$ este o funcție (M) dar că nu se reduce la o funcție (m). Se vede, ca și în demonstrația lemei 2, că există un număr β , unic și bine determinat, care se bucură de

proprietatea că $f(x)$ este o funcție (m') pe E^{α} pentru orice $\alpha \leq \beta$ dar nu este o funcție (m') pe E^{α} dacă $\alpha > \beta$. La fel, există un număr unic și bine determinat β' care se bucură de proprietatea că $f(x)$ este o funcție (m) pe $E^{>\alpha}$ pentru orice $\alpha \geq \beta'$ dar nu este o funcție (m) pe $E^{>\alpha}$ dacă $\alpha < \beta'$. Numerele β, β' sunt cuprinse în intervalul inclus:

$$[\min(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x'_1)), \max(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x'_1))]$$

pentru orice grup de 4 puncte $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ale lui E pentru care sunt (2) prezintă 2 variații de semn. Avem de asemenea $\beta \leq \beta'$.

Deducem de aici:

Lemma 6. Dacă $f(x)$ este o funcție (M) pe orice grup de 4 puncte ale lui E , se poate găsi un număr γ astfel ca $f(x)$ să fie o funcție (m) pe E^{γ} și o funcție (m') pe $E^{>\gamma}$.

Este destul să luăm $\gamma \in [\beta, \beta']$. Pentru ca proprietatea să fie generală trebuie să arătăm că β, β' și tot fel și valori improprii. Numerele γ care satisfac lemma 6 formează un interval închis $[\beta, \beta']$ finit sau nu. Acest interval este finit dacă și numai dacă funcția nu se reduce la o funcție (m). Altmăi β, β' sunt tocmai numerele determinate mai sus. Dacă $f(x)$ este o funcție (m') avem $\beta = -\infty$ iar dacă $f(x)$ este o funcție (m) avem $\beta' = +\infty$.

Se poate încă observa că pe mulțimea punctelor x astfel ca $\beta' < f(x) < \beta$, funcția este monotonă.

Lemma 6 este satisfăcută, a fortiori, de orice funcție care este o funcție (M) pe orice grup de 5 puncte ale lui E .

12. Putem acum deduce:

Lemma 7. Dacă $f(x)$ este o funcție (M) pe orice grup de 4 puncte ale lui E și dacă numărul γ verifică condițiile lemei 6, $f(x)$ este o funcție (M) pe mulțimea $E^{\gamma} \cup E^{>\gamma}$.

Într-adevăr, dacă $G \subset E^{\gamma}$, $H \subset E^{>\gamma}$ toate ipotezele lemei 4 sunt satisfăcute. 1', 2' sunt verificate conform definiției mulțimilor E^{γ} , $E^{>\gamma}$ și conform lemei 6. Ipoteza 3' este de asemenea satisfăcută. În cazul contrari, să presupunem, de exemplu, $b_1 < b'$. Fie atunci $b_1 < a < b'$. Funcția nu este nedescrescătoare pe H_2 și pe G_1 . Putem deci găsi punctele:

$$x_1, x_2 \in H_2, x_3, x_4 \in G_1, x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

astfel ca $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$ și $f(x)$ nu are o funcție (M) pe punctele x_1, x_2, x_3, x_4 .

Lema 7 este satisfăcută în particular de orice funcție care este o funcție (M) pe orice grup de 5 puncte ale lui E .

Fie γ un număr care satisface condițiile lemei 6. Putem presupune că γ este un număr finit. În cazul contrari funcția $f(x)$ este o funcție (m). Am văzut că intervalele $[b', b]$, $[b_1', b_1]$ ale punctelor de separație corespunzătoare funcției pe mulțimile $G = E \setminus H$, $H = E \setminus G$, au cel puțin un punct comun. Avem deci $b_1' \leq b_1$, $b_1 \leq b$.

Vom avea nevoie și de următoarea:

Lema 8. În ipotezele de mai sus, dacă $f(x_0) = \gamma$, avem $x_1 \in [b', b] \cup [b_1', b_1]$.

Într-adevăr, să presupunem contrariul. Fie de exemplu $x_1 < b'$, $x_0 < b_1'$. Atunci $f(x)$ nu este necrescător pe G și nu este nelăscrescător pe H . Putem deci găsi punctele:

$$x_1, x_2 \in G, x_3, x_4 \in H, x_0 < x_1 < x_2, x_0 < x_3 < x_4,$$

astfel ca $f(x_1) < f(x_2) < \gamma = f(x_0) < f(x_3) < f(x_4)$, și se vede că dacă $x_1 < x_3$, $f(x)$ nu este o funcție (M) pe punctele x_0, x_1, x_3, x_4 , iar dacă $x_1 > x_3$, $f(x)$ nu este o funcție (M) pe punctele x_0, x_1, x_3, x_4 .

În fine avem și

Lema 9. În ipotezele de mai sus, dacă $f(x_0) = \gamma$ și dacă $x_0 < b'$, $x_0 < b_1$, $x_0 < b_1'$ respectiv $x_0 > b_1$, avem $H \cap (x_0, b_1) = \emptyset$, $H \cap (b_1, x_0) = \emptyset$, $G \cap (x_0, b_1) = \emptyset$ respectiv $G \cap (b_1, x_0) = \emptyset$.

Îl ducem să demonstrăm proprietatea în cazul $x_0 < b'$. Dacă am avea $H \cap (x_0, b') \neq \emptyset$, ar exista un punct c al lui H astfel ca $x_0 < c < b'$. Am avea atunci $f(x_1) > f(c)$. Într-unul din definițiile lui b' rezultă că putem găsi punctele x_1, x_2 ale lui G astfel ca $c < x_1 < x_2$ și ca $f(x_1) < f(x_2)$. Ar rezulta deci că funcția nu este o funcție (M) pe punctele x_0, c, x_1, x_2 . La fel se face demonstrația în celelalte trei cazuri.

13. Să revenim acum la demonstrarea teoremei 5, mai precis la demonstrarea suficienței condiției exprimate de această teoremă.

Să presupunem că $f(x)$ nu se reduce la o funcție (m) (căci în cazul contrari nu este nimic de demonstrat) și fie γ un număr

(finit) care satisface condițiile lemei 6. Să păstrăm notațiile de la Nr. 12 și să notăm cu K mulțimea punctelor lui E în care $f(x)$ ia valoarea γ . Atunci mulțimile G, H, K sunt două câte două disjuncte și reuniunea lor este egală cu E .

Pentru demonstrație distingem 3 cazuri:

Cazul I. K este vid. Teorema rezultă atunci din lema 7.

Cazul II. K are un singur punct x_0 . Aici vom distinge 2 subcazuri:

Subcazul II₁. $x_0 \in [b', b] \cup [b_1', b_1]$. Atunci funcția (m) $f(x)$ de pe G se poate prelungi pe punctul x_0 în condițiile lemei 8. Adăugând deci pe x_0 la G teorema rezultă din lema 4, toate ipotezele acestei leme fiind satisfăcute.

Subcazul II₂. x_0 nu aparține ambelor intervale $[b', b]$, $[b_1', b_1]$. Pentru fixarea ideilor să presupunem că x_0 nu aparține intervalului $[b_1', b_1]$ și că, de exemplu, $x_0 < b_1'$. Pe baza lemei 8, avem $x_0 \in [b', b]$. Putem prelungi funcția $f(x)$ de pe G pe punctul x_0 și atunci, pe baza lemei 9, intervalul punctelor de separație corespunzătoare funcției $f(x)$ pe mulțimea $G \cup \{x_0\}$ are cel puțin un punct comun cu $[b', b]$. Adăugând deci pe x_0 la G teorema rezultă din lema 4, toate ipotezele acestei leme fiind satisfăcute.

Demonstrarea se face la fel dacă $x_0 > b_1$ sau dacă x_0 nu aparține intervalului $[b', b]$.

Cazul III. K are cel puțin două puncte. Fie atunci $[d', d]$ cel mai mic interval care conține pe K . Avem $d' < d$. Aici distingem încă două subcazuri:

Subcazul III₁. Intervalul deschis (d', d) nu are niciun punct comun cu cel puțin una din mulțimile G, H . Pentru fixarea ideilor fie $G \cap (d', d) = \emptyset$.

Dacă $[d', d] \subset [b', b] \cup [b_1', b_1]$, avem $[d', d] \subset [b_1', b_1]$, pe baza lemei 8. Pe baza lemei 3, $f(x)$ este o funcție (m) pe $H \cup K$ și, pe baza lemei 9, intervalul punctelor de separație corespunzătoare acestei funcții are cel puțin un punct comun cu $[b', b]$. Adăugând deci pe K la H teorema rezultă încă aplicând lema 4.

Dacă $[d', d] \subset [b', b] \not\subset [b_1', b_1]$, $f(x)$ este o funcție (m) pe $G \cup K$, pe baza lemei 3. Pe baza lemei 9, intervalul punctelor de separație corespunzătoare acestei funcții are cel puțin un punct comun cu $[b_1', b_1]$ și teorema rezultă ca mai sus.

La fel se face demonstrația dacă $H \cap (d', d) \neq \emptyset$.

Soluția III. Intervalul (d', d) are puncte comune cu ambele submulțimi G, H . Fie atunci $x_1 \in G \cap (d', d)$, $x_2 \in H \cap (d', d)$ și, pentru fixarea ideilor, fie $x_2 < x_1$. Avem $d' < x_2 < x_1 < d$ și, pe baza teoremei 4, $H \cap (x_1, d) = \emptyset$, $G \cap (d', x_2) = \emptyset$. Fie atunci e extremitatea stângă a celui mai mic interval care conține punctele lui $G \cap (d', d)$ și e' extremitatea dreaptă a celui mai mic interval care conține punctele lui $H \cap (d', d)$. Atunci $a_2 \leq e$, $e' \leq x_1$. Nu putem avea $e' > e$. În cazul contrar, pe baza definiției punctelor d, d', e, e' , am putea găsi punctele:

$$x_0, x_4 \in H, x_2 \in G, x_6 \in H, x_2 < x_0 < x_3 < x_0 < x_4 < x_1$$

și atunci pe fiecare din grupele de 5 puncte x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 suntem în contradicție cu lema 4. Avem deci $e' \leq e$. Dacă $e \in [e', e]$, avem $G \cap (d', e) = \emptyset$, $H \cap (e, d) = \emptyset$. Zic acum că intervalele $[e', e]$ și $[b', b]$ au cel puțin un punct comun. Într-adevăr, nu putem avea $e < b'$ căci atunci, pe baza definiției punctului d' și pe baza lemei 3, am avea $H \cap (d', b') = \emptyset$, în contradicție cu definiția punctului e' . Nu putem avea nici $b < e'$ căci, tot pe baza lemei 3, am avea $H \cap (b, d) = \emptyset$, care iarăși contrazice definiția punctului e' . La fel se demonstrează că intervalele $[e', e]$ și $[b', b_1]$ au cel puțin un punct comun. În cazul contrar am cădea peste o contradicție cu definiția punctului e .

Dar, pe baza unei proprietăți bine cunoscute, dacă mai multe intervale au două câte două cel puțin un punct comun, atunci ele au cel puțin un punct comun. Rezultă că intervalele $[b', b]$, $[b', b_1]$, $[e', e]$ au cel puțin un punct comun.

Fie $c \in [b', b] \cap [b', b_1] \cap [e', e]$. Pe baza lemei 3, $f(x)$ este o funcție (m^+) pe $G \cup K_1^*$ și o funcție (m^-) pe $H \cup K_2^*$, unde, în cazul $c \in K_1$, este indiferent cărei submulțimi K_1, K_2 adăugăm acest punct c . Toate ipotezele lemei 4 sunt atunci satisfăcute, înlocuind pe G, H cu $G \cup K_1^*, H \cup K_2^*$ respectiv. Teorema e înăi demonstrată.

La fel se face demonstrația și în cazul când $a_2 > a_1$.

Teorema 5 este deci complet demonstrată.

Institutul Matematic al Universității
• V. Babeș, Cluj

О ФУНКЦИЯХ РЕАЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ВЕЩНОСТИ, МНОЖЕСТВО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОТОРЫХ ЕСТЬ СОЕДИНЕНИЕ ДВУХ ПОДМНОЖЕСТВ ПРОТИВОПОЛОЖНОЙ МОНОТОННОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Дается вначале новое доказательство следующего свойства: необходимое и достаточное условие возможности разложить ряд определения E реальной, однородной функции $f(x)$ реальной переменной x на два последовательных подмножества с однообразной функцией на каждом из них при однообразности, находящейся в обратном направлении в этих двух подмножествах, есть, чтобы свойство было верным для всякой группы из 3 точек E .

Затем рассматривается та же задача, без ограничения, по которому упомянутые подмножества были бы последовательными. В этом случае, функция, определенная на 4 точках, может не пользоваться изученным свойством. Но доказывается следующее свойство: необходимо и достаточно, для того чтобы множество определения E (имеющее по меньшей мере 5 точек) $f(x)$ было бы объединением двух подмножеств, причем что функции однообразны на каждом и противоположной однообразности на двух подмножествах, чтобы свойство было верным для всякой группы из 5 точек E .

SUR LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE DONT
L'ENSEMBLE DE DÉFINITION EST LA RÉUNION DE DEUX
SOUS-ENSEMBLES DE MONOTONIE OPPOSÉE

RÉSUMÉ

L'auteur donne d'abord une nouvelle démonstration de la propriété suivante: La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse décomposer l'ensemble de définition E de la fonction $f(x)$, réelle, uniforme, de la variable réelle x , en deux sous-ensembles *consécutifs*, sur chacun la fonction étant monotone et la monotonicité étant de sens opposé sur les deux sous-ensembles, est que la propriété soit vraie sur tout groupe de 3 points de E .

Ensuite on examine le même problème en levant la restriction que les sous-ensembles en question soient consécutifs. Dans ce cas, une fonction définie sur 4 points peut ne pas jouir de la propriété étudiée. Mais on démontre la propriété suivante: La condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble de définition E (ayant au moins 5 points) de $f(x)$, soit la réunion de deux sous-ensembles, sur chacun la fonction étant monotone et de monotonicité opposée sur les deux sous-ensembles, est que la propriété soit vraie sur tout groupe de 5 points de E .

ANALELE

ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

SERIA A. MATEMATICĂ, FIZICĂ, CHIMIE, GEOLOGIE, GEOGRAFIE,
BIOLOGIE, ȘTIINȚE TEHNICE ȘI AGRICOLE

TOMUL I (1948)

1. TR. SĂVULESCU, Materiale pentru flora urediaceelor din România. Supliment II.
2. E. A. PORĂ, Modificări fiziologice în timpul ascensiunii montelui Vlădeasa (1836 m).
3. E. J. NYARÁDY, Synopsis specierum variationum, et formarum sectionis odontarrhenae generis alyssum.
4. I. BĂDESCU, V. CIUREA și M. JERCA, Formațiuni particulare în structura arterelor la cordul de câine.
5. I. ATANASIU, Cutremurele de pământ și sensibilitatea seismică în România.
6. E. A. PORĂ și M. PORĂ, Un animal nou pentru cercetări experimentale asupra nevertebratelor *Idothea ballica* (Pall).
7. H. CHIRILEI, Contribution à l'étude cytologique et histochimique des pigments flavoniques contenus dans le vacuome des cellules épidermiques des fleurs et feuilles des végétaux supérieurs; leur relation avec les pigments anthocyaniques.
8. A. ALEXINSCHI, Contribuțiuni noi la cunoașterea faunei macrolepidopterelor din R.P.R.
9. V. POP, Lumbicidtele din România.

TOMUL II (1949)

1. TR. SĂVULESCU, De la practica domesticii plantelor la principiile biologice generale.
TR. САНУЛЕЦКУ, От практического освоения растений к общим принципам биологии.
TR. SĂVULESCU, De la practica de la domestication des plantes aux principes biologiques généraux.
2. GH. NICOLAU, Problema energiei.
Г. НИКОЛАЙ, Проблема энергии.
3. E. A. PORĂ și P. JITARIU, Refluxa coordonată la Autelia surita din Marea Neagră.
4. C. GEORGESCU, Planul statinist de ofensivă contra șerpiilor.
5. RALUCA RIPAN și C. LITEANU, Studiu fizico-chimic asupra constitutiei heteropolisacizilor. Nota VII-a.
6. Z. FEIDER, Un acarian parazit pe acridieni din Republica Populară Română.
7. G. SPACU și DESPINA PIRTEA, Noi contribuțiuni la stabilirea constanței emeticului. Antimonotaxității complexe. Nota IV-a.
8. GH. MIHOC, Legea limită de probabilitate a numărului de stări de la o stare dată.
9. E. A. PORĂ, M. PORĂ și P. JITARIU, Comportarea la variațiuni de salinitate. Anuarele din Marea Neagră. XX—XXIII.
10. E. A. PORĂ, Comportarea la variațiuni de salinitate. XXIV.
11. RALUCA RIPAN și A. DUCA, Studiu asupra preparării și constitutiei azizilor periodici. Nota II-a.
12. G. SPACU și P. SPACU, Asupra unei noi clase de ammine. Poliazotocianurații metalici.
13. M. JITARIU, E. A. PORĂ și C. WITTEMBERGER, Contribuțiuni fiziologice la studiul contracțiunii mușchilor adductori la Lemnibranchiate marine și dulcirole.
14. GR. C. MOISIL, Sisteme de ecuații cu derivate parțiale și numere hipercomplexe.
15. MIRON NICOLESCU, Problema bi-armoniei pentru un antri-plan.
16. I. TÂNĂSESCU și V. FĂRCAȘAN, Despre Accidone (XIII). Constituția monoclauracidonelor.

17. GR. C. MOISIL, Sisteme de ecuații cu derivate parțiale și ideale de poli-normale.
18. R. CIOCARDEL și M. TOCORJESCU, Contribuțiuni la cunoașterea micro-funei Tortonianului din Jud. Putna.
19. NICOLAE CIORĂNESCU, Integrarea unor ecuații lineare cu derivate parțiale și coeficienți constanți de ordin n-arbitrar.
20. GR. C. MOISIL, Ecuațiile electrodinamice în dielectricele și în conductorii izotropi și omogenei.
21. D. BARKHILIAN, Teorema Remak-Schmidt pentru descompunerile directe infinite.
22. G. SPACU și SANDA LUPAN, Contribuțiuni la studiul hexahidroxan-antiionizant-sărurilor.
23. MIRCEA HEROVANU, Teoria eficienței biologice a radiațiilor ultraviolete.
24. G. SPACU și SANDA LUPAN, Contribuțiuni la studiul hexahidroxomutato-sărurilor.
25. GR. C. MOISIL, Asupra teoriei caracterizărilor sistemelor de ecuații cu derivate parțiale.
26. Z. FRIDER, Un acarian parazit pe mușca de căsă.
27. TR. I. ȘTEFUREAC, Cercetări bryologice asupra unor specii noi de Splachnaceae din Carpați.
28. G. SPACU și SANDA LUPAN, Contribuțiuni la studiul hexahidroxoplatinato-sărurilor.
29. MIHAI RĂVĂRUȚ, Contribuțiuni la flora și vegetația nisipurilor dela Matea-Ivești-Hanul Conachi, jud. Tecuci.
30. MIRCEA SAVUL și CORNELIA BOTEZ-POSTELNICU, Geochimia vanadiului în Republica Populară Română.
31. C. BOGOESCU, Noi studii sistematice și biologice asupra ephemeropterelor din Republica Populară Română.
32. CONSTANTIN POPOVICI, Prelungirea funcțiilor nemanalitice. Integrarea prin condiții la limită.
33. CONST. G. MACAROVICI și D. CEAUȘESCU, Studiul sulfamidurilor prin metoda conductometrică.
 - I. Titrarea sulfamidurilor în soluție acetonică cu NaOH.
 - II. Titrarea sulfamidurilor în soluție acetonică cu NaOH apos.
 - III. Titrarea sulfamidurilor cu NO_2 , Ag .

TOMUL III (1960) SERIA: MATEMATICĂ, FIZICĂ, CHIMIE.

- I. TIBERIU POPOVICIU, Asupra funcțiilor de o variabilă reală a căror mulțime de definiție este reuniunea a două submulțimi de monotonie crescătoare.