

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
FILIALA CLUJ

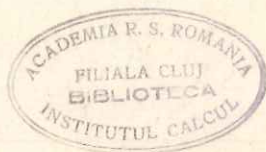
STUDII ȘI CERCETĂRI ȘTIINȚIFICE

3—4

ANUL II

IULIE—DECEMBRIE

1951



EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE



STUDII ȘI CERCETĂRI ȘTIINȚIFICE

TOMUL II, Nr. 3—4

IULIE—DECEMBRIE 1951

SUMAR

	Pag.
TH. ANGHELUȚA, Asupra polinoamelor definite	7
D. V. IONESCU, Câteva formule de cuadratură mecanică	16
G. CALUGĂREANU, Despre unele spații Banach și funcționalele lor lineare..	38
GH.PIC, Despre grupurile quasi-hamiltoniene infinite	43
R. RIPAN și GH. VERICEANU, Dozarea plumbului ca selenit de plumb gravimetric și volumetric	50
I. SOOS și L. KÉKEDY, Dozarea fotocolorimetrică a urmelor de acid boric....	56
V. ALEXA și M. ALEXA, Încercări de cotonizare a câlților și bucilor (deșeuri de câlți de cânepă)	64
M. M. KYRI, Revizuirea Bryozoarelor cheilostomate eocene din materialul adunat de Héjjas	68
A. RADU, Mișcarea protoplasmatică la plantulele de Graminee	84
E. ȚOPA, Specii indigene de Leonurus L. din secția Candiaca (Mnch) D.C.....	95
I. POP, Rolul sărurilor de calciu în procesul de rizogeneză la frunzele de Parthenocissus inserta (Kern.) Fritsch	105
V. GH. RADU, Isopode terestre din fauna R.P.R.: genul <i>Metoponorthus</i>	133
V. V. RADU, Caracteristicile dispozitivelor digestive dela Isopodele terestre..	140
V. GH. RADU și TR. CEUCA, Specii de Gervaisia în fauna Republicii Populare Române	147
V. PREDA și M. CRISTEA, Modificările sistemului reticulo-endotelial al testicolului în urma ligaturii canalului deferent	155
A. MOGA, I. MACAVEI, R. TANĂSESCU, O. MĂRGINEANU, Stările post- anginoase. Contribuțiuni la studiul diagnosticului precoce al reumatismului	159

NOTE

V. BOLOGA, Despre câteva cercetări din Institutul medico-istoric clujan asupra legăturilor medicale ruso-române	174
--	-----

CRONICA

E. RĂDULESCU, Activitatea Colectivului agrotehnic al Filialei Cluj a Aca- demiei R.P.R.	178
---	-----

CATEVA FORMULE DE CUADRATURA MECANICĂ

DE

D. V. IONESCU

Comunicare prezentată de Prof. TIBERIU POPOVICIU, m. coresp. Acad. R. P. R., în şedinţa din 17 Martie 1951 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

1. O formulă de cuadratură analoagă formulei clasice a lui Gauss.

1. Să considerăm integrala

$$(1) \quad I = \int_a^b p(x) f(x) dx$$

în care $p(x)$ este o funcţie dată, finită şi integrabilă în intervalul închis şi finit $[a, b]$. Mai presupunem că funcţia $p(x)$ este nenegativă în inter-

valul $[a, b]$, neidentic nulă şi astfel încât integrala $\int_a^b p(x) dx$ să aibă o valoare pozitivă. Funcţia $f(x)$ este presupusă continuă în intervalul $[a, b]$ şi cu derivate succesive până la ordinul $2n + i + k$.

În această lucrare vom da o formulă de cuadratură pentru integrala (1), în care vor interveni valori ale funcţiei $f(x)$ în interiorul intervalului $[a, b]$ şi valori ale lui $f(x)$ şi ale derivatelor succesive până la ordinul $n + i - 1$ în punctul a şi până la ordinul $n + k - 1$ în punctul b .

În acest scop vom întrebuinţa o metodă dată de J. Radon [4], care ne va conduce în mod natural la formula pe care o avem în vedere.

În intervalul $[a, b]$, luăm punctele $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ arbitrare astfel ca

$$(2) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$

şi la fiecare interval (x_{h-1}, x_h) ataşăm funcţia $\varphi_h(x)$ integrală a ecuaţiei diferenţiale

$$(3) \quad \varphi_h^{(2n+i+k)}(x) = (-1)^{i+k} p(x) \quad (h = 1, 2, \dots, n+1)$$

Funcţiile $\varphi_h(x)$ vor mai satisface şi alte condiţii, pe care le vom preciza mai departe.

Înlocuind integrala I cu suma integralelor relativ la intervalele

(x_{h-1}, x_h) și înlocuind pe $p(x)$ pe rând cu $(-1)^{i+k} \varphi_h^{(2n+i+k)}(x)$ vom putea scrie

$$= (-1)^{i+k} \sum_{h=1}^{n+1} \int_{x_{h-1}}^{x_h} \varphi_h^{(2n+i+k)}(x) f(x) dx.$$

Folosind formula de integrare prin părți generalizată, vom avea

$$(4) \quad I = (-1)^{i+k} \sum_{h=1}^{n+1} \left[\varphi_h^{(2n+i+k-1)}(x) f(x) - \varphi_h^{(2n+i+k-2)}(x) f'(x) + \dots + \right. \\ \left. (-1)^{(2n+i+k-1)} \varphi_h(x) f^{(2n+i+k-1)}(x) \right]_{x_{h-1}}^{x_h} + \sum_{h=1}^{n+1} \int_{x_{h-1}}^{x_h} \varphi_h(x) f^{(2n+i+k)}(x) dx.$$

Să alegem funcțiile $\varphi_h(x)$ astfel, ca în formula (4) să dispară cât mai mulți termeni. În acest scop vom introduce următoarele condiții:

$$(5) \quad \varphi_h^{(l)}(x_h) = \varphi_{h+1}^{(l)}(x_h) \quad \begin{matrix} (h=1, 2, \dots, n) \\ (l=0, 1, \dots, 2n+i+k-2) \end{matrix}$$

precum și condițiile:

$$(6) \quad \varphi_1^{(l)}(a) = 0 \quad (l=0, 1, \dots, n+k-1)$$

și

$$(7) \quad \varphi_{n+1}^{(l)}(b) = 0 \quad (l=0, 1, \dots, 2n+i-1)$$

Vom arăta mai departe că funcțiile $\varphi_h(x)$ sunt bine determinate de condițiile (5), (6), (7).

Cu această determinare a funcțiilor $\varphi_h(x)$, formula (4) se simplifică și se transformă în următoarea *formulă generală de cuadratură mecanică*,

$$(8) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n C_j f(x_j) + \sum_{l=0}^{n+i-1} A_l f^{(l)}(a) + \sum_{l=0}^{k-1} B_l f^{(l)}(b) + R$$

unde

$$(9) \quad C_j = (-1)^{i+k} [\varphi_j^{(2n+i+k-1)}(x_j) - \varphi_{j+1}^{(2n+i+k-1)}(x_j)] \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(10) \quad A_l = (-1)^{i+k} \varphi_1^{(2n+i+k-l-1)}(a) \quad (l=0, 1, \dots, n+i-1)$$

$$(11) \quad B_l = (-1)^{i+k} \varphi_{n+1}^{(2n+i+k-l-1)}(b) \quad (l=0, 1, \dots, k-1)$$

și

$$(12) \quad R = \int_a^b \varphi(x) f^{(2n+i+k)}(x) dx.$$

unde $\varphi(x)$ este funcția care coincide cu $\varphi_h(x)$ în intervalele (x_{h-1}, x_h) .

2. Să determinăm funcțiile $\varphi_h(x)$. Integrala ecuației diferențiale (3) pentru $h = n + 1$, care satisface condițiile (7) se găsește imediat. Notând

$$(13) \quad \psi(x) = \int_a^b \frac{(u-x)^{2n+i+k-1}}{(2n+i+k-1)!} p(u) du - \frac{1}{(2n+i+k-1)!} \sum_{h=0}^{k-1} C_{2n+i+k-1}^h \lambda_h (b-x)^{2n+i+k-1}$$

unde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ sunt k constante arbitrare, avem

$$(14) \quad \varphi_{n+1}(x) = \psi(x)$$

Integrând apoi ecuația (3) pentru $h = n$, cu condițiile (5) în care $h = n$, se găsește

$$(14') \quad \varphi_n(x) = \psi(x) - K_n \frac{(x_n - x)^{2n+i+k-1}}{(2n+i+k-1)!}$$

unde K_n este o constantă arbitrară.

Continuând în același mod se ajunge la

$$(14'') \quad \varphi_1(x) = \psi(x) - \sum_{j=1}^n K_j \frac{(x_j - x)^{2n+i+k-1}}{(2n+i+k-1)!}$$

unde $K_1, K_2, \dots, K_n$ sunt constante arbitrare.

Constantele $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ și $K_1, K_2, \dots, K_n$ se determină scriind că și condițiile (6) sunt satisfăcute. Se ajunge astfel la sistemul de ecuații lineare.

$$(15) \quad \sum_{r=0}^{l-1} C_{2n+i+k-h}^r \lambda_r (b-a)^{2n+i+k-h-r} + \sum_{j=1}^n K_j (x_j - a)^{2n+i+k-h} = \int_a^b p(x) (x-a)^{2n+i+k-h} dx$$

unde $h = 1, 2, \dots, n + k$.

3. Să arătăm cum se rezolvă sistemul de ecuații lineare (15). Se scriu ultimele $k + 1$ ecuații (15), în care $l = 1, 2, \dots, n$ și le înmulțim respectiv cu

$$(b-a)^{k+l-1}, C_{k+l-1}^1 (b-a)^{k+l-2}, \dots, (-1)^{k+l-1} C_{k+l-1}^{k+l-1}$$

primul multiplicator referindu-se la ultima ecuație (15). Se arată că prin această operație termenii în $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ dispar și se ajunge astfel la ecuația în $K_1, K_2, \dots, K_n$

$$(16) \quad \sum_{j=1}^n K_j (x_j - a)^{n+i} (b - x_j)^{k+l-1} = \int_a^b p(x) (x-a)^{n+i} (b-x)^{k+l-1} dx.$$

Făcând $l = 1, 2, \dots, n$ vom avea un sistem de n ecuații în $K_1, K_2, \dots, K_n$. Notând:

$$(17) \quad K_j (x_j - a)^{n+i} (b - x_j)^k = \bar{K}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

și

$$(18) \quad p(x) (x-a)^{n+i} (b-x)^k = p_2(x)$$

se ajunge la sistemul de ecuații lineare

$$(19) \quad \sum_{j=1}^n \bar{K}_j x_j^r = \int_a^b p_2(x) x^r dx \quad (r=0, 1, \dots, n-1)$$

pentru determinarea lui $K_1, K_2, \dots, K_n$. Acest sistem este compatibil, deoarece determinantul lui este determinantul Vandermonde al absciselor distincte $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Odată rezolvat sistemul (19), ecuațiile (17) ne vor da valorile lui $K_1, K_2, \dots, K_n$. Purtând acestea în ultimele k ecuații (15) vom avea sistemul de ecuații în $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$

$$(20) \quad \sum_{r=0}^{k-1} C_{n+i+h}^r \lambda_r (b-a)^{n+i+h-r} = \int_a^b p(x) (x-a)^{n+i+h} dx - \sum_{j=1}^n K_j (x_j-a)^{n+i+h}$$

unde $b = 0, 1, \dots, k-1$.

Determinantul acestui sistem în $\lambda_0, \frac{\lambda_1}{b-a}, \dots, \frac{\lambda_{k-1}}{(b-a)^{k-1}}$, fiind egal cu 1, sistemul este compatibil.

Cu aceasta funcțiile $\varphi^h(x)$ integrale ale ecuațiilor diferențiale (3) și care satisfac condițiile (5), (6) și (7) sunt perfect determinate. Calculul a arătat *unicitatea* lor.

4. Din formulele (14), (14'), (14'') se deduce că

$$(21) \quad \varphi_h(r) - \varphi_{h+1}(x) = -K_h \frac{(x_h - x)^{2n+i+k-1}}{(2n+i+k-1)!} \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

Derivând aceste ecuații de $2n+i+k-1$ ori în raport cu x , și făcând $x = x_h$, se obțin formule care, comparate cu formulele (9), ne conduc să scriem

$$(22) \quad K_1 = C_1, K_2 = C_2, \dots, K_n = C_n.$$

În toate formulele care vor urma vom putea scrie $C_1, C_2, \dots, C_n$ în loc de $K_1, K_2, \dots, K_n$.

5. Să privim acum în ecuațiile de mai sus pe $x_1, x_2, \dots, x_n$ ca necunoscute. Să ne întrebăm dacă nu este posibil să determinăm pe $x_1, x_2, \dots, x_n$ astfel, ca funcția $\varphi_1(x)$ să satisfacă în afară de condițiile (6) în punctul a și condițiile

$$(23) \quad \varphi_l^{(l)}(a) = 0 \quad (l = n+k, n+k+1, \dots, 2n+k-1)$$

Dacă problema aceasta este posibilă, atunci formula (8) se scrie sub forma

$$(24) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n C_j f(x_j) + \sum_{l=0}^{i-1} A_l f^{(l)}(a) + \sum_{l=0}^{k-1} B_l f^{(l)}(b) + R.$$

Ținând seama de condițiile (6) și (23), suntem conduși la sistemul de ecuații

$$(25) \quad \sum_{r=0}^{k-1} C_{i+h}^r \lambda_r (l-l)^{i+h-r} + \sum_{j=1}^n C_j (x_j-a)^{i+h} = \int_a^b p(x) (x-a)^{i+h} dx$$

unde $h = 0, 1, \dots, 2n+k-1$.

Numărul acestor ecuații este $2n+k$, iar necunoscutele sunt $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, C_1, C_2, \dots, C_n$ și $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Eliminând ca la No. 3 pe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ și notând

$$(26) \quad C_j (x_j-a)^i (b-x_j)^k = C'_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

și

$$(27) \quad p(x) (x-a)^i (x-q)^k = p_3(x)$$

vom obține sistemul de ecuații în $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ și $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$(28) \quad \sum_{j=1}^n C'_j x_j^r = \int_a^b p_3(x) x^r dx$$

unde $r = 0, 1, \dots, 2n-1$.

Acest sistem intervine în formula de cuadratură mecanică a lui Stieltjes [5], care constă în determinarea constantelor $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ și a absciselor $x_1, x_2, \dots, x_n$ astfel ca să avem identitatea

$$(29) \quad \int_a^b p_3(x) F(x) dx = C'_1 F(x_1) + C'_2 F(x_2) + \dots + C'_n F(x_n)$$

pentru orice polinom $F(x)$ de gradul $2n-1$.

Este suficient să se scrie că identitatea (29) este satisfăcută pentru $F(x) = 1, x, \dots, x^{2n-1}$, ca să se obțină ecuațiile (28).

Eliminând pe $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ între ecuațiile (28) se arată că $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile ecuației

$$(30) \quad Q_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x \dots & x^n \\ c_0 & c_1 \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}$$

unde

$$c_\alpha = \int_a^b p_3(x) x^\alpha dx \quad (\alpha = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

Sub această formă se vede imediat că avem

$$\int_a^b p_3(x) Q_n(x) x^k dx = 0,$$

pentru $k = 0, 1, \dots, n-1$, sau

$$(31) \quad \int_a^b p_3(x) Q_n(x) Q_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

ceea ce dovedește că *polinoamele* $Q_n(x)$ *formează un șir de polinoame ortogonale față de funcția* $p_3(x)$.

Datorită ipotezei că funcția $p(x)$ și deci $p_3(x)$ dată de formula (27) nu se anulează în intervalul deschis (a, b) se știe, după cum a arătat Stieltjes (5), că *ecuația (30) are rădăcinile reale, distincte și cuprinse între a și b .*

Deci problema pusă la începutul acestui număr este posibilă, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt determinate de ecuația (30) apoi primele n ecuații (28) ne vor da valorile lui $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ iar ecuațiile (26) ne vor da valorile lui $C_1, C_2, \dots, C_n$. Tot Stieltjes [5] a demonstrat că coeficienții $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ sunt pozitivi, de unde rezultă că și *coeficienții* $C_1, C_2, \dots, C_n$ *sunt pozitivi.*

Am stabilit astfel formula (24), care face obiectul principal al acestei lucrări. Ea este analoagă cu formula clasică de cuadratură a lui Gauss și a lui Stieltjes [5] și le cuprinde pe acestea, după cum vom vedea mai departe.

Deosebirea dintre formula generală de cuadratură (8) și formula de cuadratură (24) stă în faptul că în formula (8) $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt arbitrare, pe când în formula (24) $x_1, x_2, \dots, x_n$, sunt rădăcinile reale distincte și cuprinse între a și b ale polinomului $Q_n(x)$ dat de formula (30). Apoi în formula generală (8), funcțiile $\varphi_h(x)$ satisfac ecuațiile diferențiale (3), și condițiile (5), (6), (7), pe când în formula (24) aceste funcții mai satisfac și condițiile (23). Această deosebire face ca în membrul al doilea al formulei (24) să avem n termeni mai puțini ca în formula (8).

Dacă notăm cu $\varphi(x)$ funcția care coincide cu $\varphi_h(x)$ în intervalele $[x_{h-1}, x_h]$, ($h = 1, 2, \dots, n+1$), observăm că în formula (24), atât restul R , cât și toți coeficienții $C_1, C_2, \dots, C_n, A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, B_0, B_1, \dots, B_{k-1}$ se exprimă cu ajutorul lui $\varphi(x)$.

Avem întâi

$$(32) \quad R = \int_a^b \varphi(x) f^{(2n+i+k)}(x) dx$$

Apoi, datorită condițiilor (5), funcția $\varphi(x)$ este continuă în intervalul închis $[a, b]$, împreună cu toate derivatele succesive până la ordinul $2n+i+k-2$, inclusiv. Derivata de ordinul $2n+i+k-1$ este însă discontinuă în punctele $x_1, x_2, \dots, x_n$, care sunt puncte de discontinuitate de speța întâia. Salturile corespunzătoare ale lui $\varphi^{(2n+i+k-1)}(x)$ în valoare absolută sunt tocmai coeficienții $C_1, C_2, \dots, C_n$ din formula (24). În mod precis, avem

$$(33) \quad C_j = (-1)^{i+k} [\varphi^{(2n+i+k-1)}(x_j-0) - \varphi^{(2n+i+k-1)}(x_j+0)]$$

pentru $j = 1, 2, \dots, n$.

În punctul a avem

$$(34) \quad \varphi^{(l)}(a) = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, 2n+i+k-1)$$

și

$$(35) \quad A_l = (-1)^{i+k-l-1} \varphi^{(2n+i+k-l-1)}(a) \quad (l=0, 1, \dots, i-1)$$

În punctul b avem:

$$(36) \quad \varphi^{(l)}(b) = 0 \quad (l=0, 1, \dots, 2n+i-1)$$

și

$$(37) \quad B_l = (-1)^{i+k+l} \varphi^{(2n+i+k-l-1)}(b) \quad (l=0, 1, \dots, k-1)$$

6. Funcția $\varphi(x)$ din formula (24) mai are o proprietate importantă și anume: *curba $y = \varphi(x)$ are un singur extremum în intervalul deschis (a, b) .* Aceasta rezultă din condițiile (5) din punctele $x_1, x_2, \dots, x_n$ și din condițiile (34) și (36) relative la punctele a și b .

Într'adevăr să presupunem că ar exista două puncte ξ_{11}, ξ_{12} din intervalul deschis (a, b) , în care funcția $\varphi(x)$ ar avea câte un extremum. Ar urma ca derivata $\varphi'(x)$ să se anuleze în punctele ξ_{11}, ξ_{12} , la care mai adăugăm și punctele a și b . Derivata $\varphi''(x)$ fiind continuă în $[a, b]$, aplicând teorema lui Rolle, vom deduce că ea se va anula în punctele $\xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}$ din (a, b) , la care adăugăm și punctele a și b . Acest raționament se va continua, până se ajunge la concluzia că derivata $\varphi^{(2n+i+k-2)}(x)$ se va anula în $2n+3$ puncte

$$(38) \quad \xi_{2n+i+k-2,1}; \quad \xi_{2n+i+k-2,2} \dots, \xi_{2n+i+k-2,2n+3}$$

din intervalul deschis (a, b) .

Să observăm că în intervalul închis $[x_{h-1}, x_h]$ nu pot exista trei din punctele ξ ale șirului (38). Într'adevăr derivata $\varphi^{(2n+i+k-1)}(x)$ fiind continuă în intervalul $[x_{h-1}, x_h]$ s'ar anula în două puncte din acest interval, iar derivata

$$\varphi^{(2n+i+k)}(x) = (-1)^{i+k} p(x)$$

s'ar anula într'un punct din intervalul deschis (a, b) , ceea ce este imposibil, deoarece s'a presupus că funcția $p(x)$ nu se anulează între a și b .

Deci în intervalele $(a, x_1], (x_1, x_2], \dots, (x_n, b)$ nu pot exista decât câte cel mult două puncte din șirul (38), astfel încât numărul lor nu poate să fie decât cel mult $2(n+1) = 2n+2$. Dar s'a văzut că numărul punctelor șirului (38) este $2n+3$. S'a ajuns astfel la o contradicție, de unde rezultă că funcția $\varphi(x)$ nu poate să aibă decât un singur extremum în intervalul (a, b) .

7. O consecință a teoremei precedente este că funcția $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul (a, b) .

Dacă notăm

$$(39) \quad S = \int_a^b \varphi(x) dx,$$

expresia (32) a restului R , din formula (24) poate să fie scrisă sub forma

$$(40) \quad R = \mu S$$

unde μ este un număr cuprins între marginea inferioară și marginea superioară a derivatei $f^{(2n+i+k)}(x)$ în intervalul (a, b) .

Dacă derivata $f^{(2n+i+k)}(x)$ este continuă în intervalul (a, b) , putem scrie pe R sub forma:

$$(41) \quad R = S \int^{(2n+i+k)}(\xi)$$

unde ξ este un anumit număr din intervalul (a, b)

8. Formula de cuadratură (8) este importantă din punctul de vedere al calculului practic. Să presupunem că aplicăm formula de cuadratură (24) luând pentru $x_1, x_2, \dots, x_n$ rădăcinile polinomului $Q_n(x)$. Însă aceste rădăcini sunt în general numere iraționale și dacă facem calcule efective, suntem obligați să ne oprim la valori $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ ori cât de apropiate de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Dacă am lua ca valoare apropiată a integralei (1) suma

$$(42) \quad \sum_{j=1}^n C_j f(\bar{x}_j) + \sum_{l=0}^{i-1} A_l f^{(l)}(a) + \sum_{l=0}^{k-1} B_l f^{(l)}(b)$$

și am spune că restul este egal cu

$$(43) \quad R = \int_a^b \varphi(x) f^{(2n+i+k)}(x) dx,$$

am comite o eroare, deoarece formula (24) nu este valabilă decât dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile exacte ale polinomului $Q_n(x)$.

În calculele practice se va recurge atunci la formula generală de cuadratură (8), luând $x_1 = \bar{x}_1, \dots, x_n = \bar{x}_n$. În acest caz, dacă luăm ca valoare apropiată a integralei de mai sus expresia (42), unde $C_1, C_2, \dots, C_n, A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, B_0, B_1, \dots, B_{k-1}$ au valorile care corespund la $x_1 = \bar{x}_1, \dots, x_n = \bar{x}_n$, eroarea este dată de formula (43), la care însă trebuie să mai adăugăm și termenii corectivi din formula (8)

$$(44) \quad \sum_{l=i}^{n+i-1} A_l f^{(l)}(a).$$

9. Să facem o aplicație a formulei de cuadratură a formulei (24) luând $n = 1, i = 1, k = 1$. În acest caz $f(x)$ fiind o funcție continuă cu derivate succesive până la ordinul al patrulea, avem formula

$$(45) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = A_0 f(a) + C_1 f(x_1) + B_0 f(b) + R$$

În această formulă avem

$$x_1 = \frac{\int_a^b p(x)(x-a)(b-x)x dx}{\int_a^b p(x)(x-a)(b-x) dx}$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\left[\int_a^b p(x)(x-a)(b-x) dx \right]^3}{\int_a^b p(x)(x-a)^2(b-x) dx \int_a^b p(x)(x-a)(b-x)^2 dx} \\
 A_0 &= \frac{\int_a^b \int_a^b p(x_1)p(x_2)(b-x_1)(b-x_2)(x_2-x_1)^2 dx_1 dx_2}{2(b-a) \int_a^b p(x)(x-a)^2(b-x) dx} \\
 R_0 &= \frac{\int_a^b \int_a^b p(x_1)p(x_2)(x_1-a)(x_2-a)(x_2-x_1)^2 dx_1 dx_2}{2(b-a) \int_a^b p(x)(x-a)(b-x)^2 dx}
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

Din aceste formule se vede că x_1 este cuprins între a și b , iar coeficienții A_0 , B_0 , C_1 sunt pozitivi.

Restul R din formula (45) este dat de formula

$$R = \int_a^b \varphi(x) f^{(IV)}(x) dx \tag{47}$$

unde funcția $\varphi(x)$ este compusă din funcția $\varphi_1(x)$ în intervalul (a, x_1) și din funcția $\varphi_2(x)$ în intervalul (x_1, b) . Acestea sunt integrale ale ecuației

$$\varphi^{(IV)}(x) = p(x) \tag{48}$$

care satisfac la condițiile

$$\varphi_1(a) = \varphi_1'(a) = \varphi_1''(a) = 0, \quad \varphi_2(b) = \varphi_2'(b) = \varphi_2''(b) = 0$$

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x), \quad \varphi_1'(x_1) = \varphi_2'(x_1), \quad \varphi_1(x_1) = \varphi_2''(x_1)$$

În cazul particular $p(x) = 1$, formula (45) se reduce la formula clasică a lui Simpson; $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ au expresiile:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a)^3}{24} \left(x - \frac{2a+b}{3} \right), \quad \varphi_2(x) = \frac{(b-x)^3}{24} \left(\frac{2a+b}{3} - x \right) \tag{49}$$

care sunt date și în memoriul lui J. Radon [4].

Curba $y = \varphi(x)$ este situată sub axa Ox , ea este tangentă la axa Ox în punctele $x = a$, $x = b$, are două puncte de inflexiune pentru $x = \frac{2a+b}{3}$

$x = \frac{a+2b}{3}$ și cele două ramuri $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ se racordează în punctul $x = \frac{a+b}{2}$ în care avem relațiile (48'').

Dacă funcția $f(x)$ are derivata $f^{(IV)}(x)$ continuă în intervalul (a, b) , atunci putem scrie expresia (47) a restului R , sub forma:

$$(49') \quad R = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(IV)}(\xi)$$

10. Dacă presupunem în toate chestiunile tratate mai sus la n-rele 1—9 că $i = 0$, vom integra ecuațiile diferențiale

$$(50) \quad \varphi_h^{(2n+k)}(x) = (-1)^k p(x) \quad (h = 1, 2, \dots, n+1)$$

cu condițiile următoare:

$$(51) \quad \varphi_h^{(l)}(x_h) = \varphi_{h+1}^{(l)}(x_h) \quad \left(\begin{array}{l} h = 1, 2, \dots, n \\ l = 0, 1, \dots, 2n+k-2 \end{array} \right)$$

și

$$(52) \quad \varphi_1^{(l)}(a) = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$(53) \quad \varphi_{n+1}^{(l)}(b) = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, 2n+k-1)$$

și vom fi conduși la formula de cuadratură

$$(54) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n C_j f(x_j) + \sum_{l=0}^{n+k-1} A_l f^{(l)}(a) + R$$

Notând cu $\varphi(x)$ funcția care coincide pe rând cu $\varphi_h(x)$ în intervalul (x_{h-1}, x_h) unde $h = 1, 2, \dots, n+1$, avem

$$(55) \quad C_j = (-1)^k [\varphi^{(2n+k-1)}(x_j-0) - \varphi^{(2n+k-1)}(x_j+0)] \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(56) \quad A_l = (-1)^{k+l-1} \varphi^{(2n+l-k-1)}() \quad (l = 0, 1, \dots, n+k-1)$$

și

$$(57) \quad R = \int_a^b \varphi(x) f^{(2n+k)}(x) dx$$

Este posibil să alegem pe $x_1, x_2, \dots, x_n$, astfel ca în formula (54) să avem $A_k = A_{k+1} = \dots = A_{n+k-1} = 0$?

Pentru aceasta trebuie ca $\varphi_1(x)$ să mai verifice în punctul a și condițiile

$$(52') \quad \varphi_1^{(l)}(a) = 0, \quad (l = n, n+1, \dots, 2n-1)$$

Se arată că în acest caz $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile ecuației

$$(58) \quad S_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^n \\ c'_0 & c'_1 & \dots & c'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c'_{n-1} & c'_n & \dots & c'_{2n-1} \end{vmatrix}$$

unde

$$c'_\alpha = \int_a^b p_4(x) x^\alpha dx \quad (\alpha = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

și

$$(59) \quad p_4(x) = (x-a)^k p(x)$$

Se arată că:

$$\int_a^b p_4(x) S_n(x) S_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

ceea ce dovedește că polinoamele $S_n(x)$ formează un șir de polinoame ortogonale față de funcția $p_4(x)$. În intervalul deschis (a, b) , $p_4(x)$ ne-anulându-se, ecuația (58) are toate rădăcinile reale distincte și cuprinse între a și b .

Formula (54) devine formula de cuadratură

$$(60) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n C_j f(x_j) + \sum_{l=0}^{k-1} A_l f^{(l)}(a) + R$$

care este analoagă formulei lui Stieltjes.

În formula (60) coeficienții $C_1, C_2, \dots, C_n$ sunt toți pozitivi.

Se arată că la No. 6, că funcția $\varphi(x)$ care intră în formula (60) și care determină toți coeficienții C_j, A_l precum și restul R , este pozitivă, dovedindu-se că curba $y = \varphi(x)$ are un singur extremum în intervalul deschis (a, x_n) .

Se poate face aceeași observație ca la No. 8, cu privire la calculul numeric apropiat al integralei (1), din care rezultă importanța formulei (54).

Ca aplicație să alegem $n = k = 1$; vom avea formula

$$(61) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = A_0 f(a) + C_1 f(x_1) + R,$$

pe care o deducem din formula (60). Avem

$$(62) \quad A_0 = \frac{\int_a^b p(x) (x-a) x dx}{\int_a^b p(x) (x-a) dx}$$

$$A_0 = \frac{\int_a^b \int_a^b p(x_1) p(x_2) (x_2 - x_1)^2 dx_1 dx_2}{\int_a^b p(x) (x-a)^2 dx}$$

$$C_1 = \frac{\left[\int_a^b p(x)(x-a) dx \right]^2}{\int_a^b p(x)(x-a)^2 dx}$$

Se vede bine că x_1 , este cuprins între a și b , și că A_0, C_1 sunt pozitivi, conform teoriei generale. Restul R este dat de formula

$$(63) \quad R = \int_a^b \varphi(x) f'''(x) dx,$$

unde funcția $\varphi(x)$ este compusă din $\varphi_1(x)$ în intervalul (a, x_1) și $\varphi_2(x)$ în intervalul (x_1, b) . Acestea sunt integralele ecuației

$$(64) \quad \varphi'''(x) = -p(x)$$

care satisfac condițiile:

$$(65) \quad \varphi_1(a) = \varphi_1'(a) = 0, \quad \varphi_2(b) = \varphi_2'(b) = 0$$

$$(66) \quad \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1), \quad \varphi_1'(x_1) = \varphi_2'(x_1)$$

Când $p(x) = 1$, formula (61) devine:

$$(67) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{4} \left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right] + R$$

și avem:

$$(68) \quad \varphi_1(x) = \frac{(x-a)^3}{6} \left[\frac{a+3b}{4} - x \right], \quad \varphi_2(x) = \frac{(b-x)^3}{6}$$

Curba $y = \varphi(x)$ este tangentă în a și b la axa Ox , are un maximum pentru $x = \frac{a+b}{2}$ are un punct de inflexiune pentru $x = \frac{3a+b}{4}$ și ramurile $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ se racordează în punctul $x_1 = \frac{a+2b}{3}$, în care avem relațiile (66).

Dacă $f'''(x)$ este o funcție continuă în intervalul (a, b) , avem pentru expresia (63) a lui R ,

$$(69) \quad R = \frac{(b-a)^4}{216} f'''(\xi)$$

unde ξ este un număr cuprins între a și b .

11. Dacă presupunem în toate chestiunile tratate la n-rele 1—9 că $i=k=0$, vom integra ecuațiile diferențiale

$$(70) \quad \varphi_h^{(n)}(x) = p(x) \quad (h = 1, 2, \dots, n+1)$$

cu condițiile următoare

$$(71) \quad \varphi_h^{(l)}(x_h) = \varphi_{h+1}^{(l)}(x_h) \quad \left(\begin{matrix} h=1,2,\dots,n \\ l=0,1,\dots,2n-2 \end{matrix} \right)$$

și

$$(72) \quad \varphi_1^{(l)}(a) = 0 \quad (l=0,1,\dots,n-1)$$

$$(73) \quad \varphi_{n+1}^{(l)}(b) = 0 \quad (l=0,1,\dots,2n-1)$$

suntem conduși la formula de cuadratură

$$(74) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n C_j f(x_j) + \sum_{l=0}^{n-1} A_l f^{(l)}(a) + R.$$

Notând cu $\varphi(x)$ funcția care coincide pe rând cu $\varphi_h(x)$ în intervalul (x_{h-1}, x_h) unde $h=1,2,\dots,n+1$, avem

$$(75) \quad C_j = \varphi^{(2n-1)}(x_j-0) - \varphi^{(2n-1)}(x_j+0) \quad (j=1,2,\dots,n)$$

$$(76) \quad A_l = (-1)^{l+1} \varphi_1^{(2n-l-1)}(a) \quad (l=0,1,\dots,n-1)$$

și

$$(77) \quad R = \int_a^b \varphi(x) f^{(2n)}(x) dx$$

Ca și mai sus ne putem întreba *dacă este posibil să se aleagă* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *astfel ca în formule (74) să avem* $A_0 = A_1 = \dots = A_{n-1} = 0$. În acest caz $\varphi_1(x)$ mai verifică în punctul a și condițiile

$$(78) \quad \varphi_1^{(l)}(a) = 0 \quad (l=n, n+1, \dots, 2n-1)$$

Se arată că $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile reale distincte și cuprinse între a și b ale ecuației

$$(79) \quad T_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^n \\ c_0'' & c_1'' & \dots & c_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1}'' & c_n'' & \dots & c_{2n-1}'' \end{vmatrix} = 0$$

unde

$$c_\alpha'' = \int_a^b p(x) x^\alpha dx \quad (\alpha = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

Se ajunge pe această cale la formula clasică a lui Stieltjes

$$(80) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n C_j f(x_j) + R$$

în care toți coeficienții C_j sunt pozitivi.

Se demonstrează că la No. 6, datorită condițiilor (72), (73) și (78)

că funcția $\varphi(x)$ este pozitivă în intervalul (a, b) arătându-se că curba $y = \varphi(x)$ are un singur maximum în intervalul deschis (x_1, x_n) .

Se poate face aceeași observare ca la no. 8, cu privire la calculul aproximativ al integralei (1), când se întrebuițează formula (80) a lui Stieltjes, din care va rezulta importanța formulei de cuadratură (74).

Ca aplicație a formulei (1) să alegem $n = 1$. Vom avea

$$(81) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = C_1 f(x_1) + R$$

unde

$$(82) \quad x_1 = \frac{\int_a^b p(x) x dx}{\int_a^b p(x) dx}$$

$$C_1 = \int_a^b p(x) dx$$

și

$$(83) \quad R = \int_a^b \varphi(x) f'' dx$$

unde $\varphi(x)$ coincide în intervalele (a, x_1) , (x_1, b) cu integralele ecuației diferențiale

$$(84) \quad \varphi''(x) = p(x)$$

care satisface condițiile

$$(85) \quad \varphi_1(a) = \varphi_1'(a) = 0 \quad \varphi_2(b) = \varphi_2'(b) = 0.$$

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1).$$

Când $p(x) = 1$, formula (81), se reduce la

$$(86) \quad \int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R,$$

și avem

$$(87) \quad \varphi_1(x) = \frac{(x-a)^2}{2}, \quad \varphi_2(x) = \frac{(b-x)^2}{2}$$

Curba $y = \varphi(x)$ este tangentă la axa Ox în punctele a și b și ramurile $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ se racordează în punctul $x = \frac{a+b}{2}$, unde avem relația (85).

Dacă $f''(x)$ este continuă în intervalul (a, b) avem:

$$(88) \quad R = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

unde ξ este un număr cuprins între a și b .

2. Cazul $n = 0$.

12. Să reluăm integrala (1) și să facem asupra lui $p(x)$ aceleași ipoteze ca la no. 1, iar despre $f(x)$ să presupunem că este continuă și are derivate succesive până la ordinul $i+k$. La integrala (1) să atașăm ecuația diferențială

$$(89) \quad \varphi^{(i+k)}(x) = (-1)^{i+k} p(x)$$

pe care s'o integrăm cu condițiile la limită

$$(90) \quad \varphi^{(l)}(a) = 0, \quad (l = 0, 1, \dots, k-1)$$

$$(91) \quad \varphi^{(l)}(b) = 0, \quad (l = 0, 1, \dots, i-1)$$

Procedând ca la No. 1, se ajunge la formula de cuadratură

$$(92) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{l=0}^{i-1} A_l f^{(l)}(a) + \sum_{l=0}^{k-1} B_l f^{(l)}(b) + R,$$

unde

$$(93) \quad A_l = (-1)^{i+k-l-1} \varphi^{(i+k-l-1)}(a) \quad (l = 0, 1, \dots, i-1)$$

$$(94) \quad B_l = (-1)^{i+k-l} \varphi^{(i+k-l)}(b) \quad (l = 0, 1, \dots, k-1)$$

iar

$$(95) \quad R = \int_a^b \varphi(x) f^{(i+k)}(x) dx.$$

13. Se arată că funcția $\varphi(x)$ este bine determinată de ecuația diferențială (89) și de condițiile (90), (91). Ea este dată de formula

$$(96) \quad \varphi(x) = \int_a^b p(u) \frac{(u-x)^{i+k-1}}{(i+k-1)!} du - \frac{1}{(i+k-1)!} \sum_{j=0}^{k-1} C_{i+k-1}^j \lambda_j (b-x)^{i+k-j-1}$$

unde constantele λ_j sunt determinate de sistemul de ecuații

$$(97) \quad \sum_{j=0}^{k-1} C_{i+h}^j \lambda_j (b-a)^{i+h-j} = \int_a^b p(u) (u-a)^{i+h} du \quad (h = 0, 1, \dots, k-1)$$

care se poate transforma în:

$$(98) \quad \sum_{j=0}^h C_{i+h}^j \lambda_{i+h+j-1} (b-a)^{i-j} = (-1)^{k-h-1} \int_a^b p(u) (u-a)^i (b-u)^{k-h-1} du. \quad (h = 0, 1, \dots, k-1)$$

Prima din aceste ecuații determină pe λ_{i-1} , a doua pe λ_{i-2} , ultima pe λ_0 .

14. Se arată ca la no. 6, că funcția $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul (a, b) , demonstrându-se că curba $y = \varphi(x)$ nu poate să aibă două extreme în intervalul deschis (a, b) .

Ca urmare a acestei teoreme rezultă, că dacă derivata $f^{(i+k)}(x)$ este continuă în intervalul (a, b) , putem scrie expresia (95) a restului R sub forma

$$(99) \quad R = S f^{(i+k)}(\xi)$$

unde ξ este un număr cuprins între a și b , iar S este

$$(100) \quad S = \int_a^b \varphi(x) dx$$

15. Deoarece s'a demonstrat că funcția $\varphi(x)$ din formula (95) păstrează un semn constant în intervalul (a, b) , se poate aplica la formula (95) formulele de cuadratură din §. 1, adică formulele (24), (60), sau (80), presupunând, bine înțeles, că funcția $f(x)$ are toate derivatele care figurează în calcule.

Să înlocuim în formula (92) pe i și k cu i' și k' , iar coeficienții A_α și B_β unde $\alpha=1, 2, \dots, i'-1$, $\beta=1, 2, \dots, k'-1$, cu A'_α și B'_β .

Aplicând formula de cuadratură (24) suntem conduși la o formulă de cuadratură de forma

$$(101) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{j=0}^n C_j f^{(i'+k')}(x_j) + \sum_{\alpha=0}^{i'-1} A'_\alpha f^{(\alpha)}(a) + \sum_{\alpha=0}^{i'-1} A_\alpha f^{(i'+k'+\alpha)}(a) \\ + \sum_{\beta=0}^{k'-1} B'_\beta f^{(\beta)}(b) + \sum_{\beta=0}^{k'-1} B_\beta f^{(i'+k'+\beta)}(b) + R$$

unde restul R are expresia

$$(102) \quad R = \int_a^b \psi(x) f^{(2n+i+k+i'+k')}(x) dx.$$

În formula (101) coeficienții A'_α și B'_β sunt dați de formulele (93), (94), în care se înlocuiește i și k cu i' și k' . Coeficienții A_α , B_β , C_j ; abscisele x_j , precum și funcția $\psi(x)$ se determină așa cum s'a explicat la no. 5.

Formula (101) arată în cazul $i=k=0$ că, după cum se pot determina constantele C_j și abscisele x_j astfel ca să avem formula lui Stieltjes

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n C_j f(x_j) + R$$

în care restul R să fie nul pentru polinoame arbitrare de gradul $2n-1$, tot așa se pot determina constantele C_j , A'_α , B'_β și abscisele x_j , astfel ca să avem formula:

$$(103) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n C_j f^{(i'+k')}(x_j) + \sum_{\alpha=0}^{i'-1} A'_\alpha f^{(\alpha)}(a) + \sum_{\beta=0}^{k'-1} B'_\beta f^{(\beta)}(b) + R$$

în care restul R să fie nul pentru polinoame arbitrare de gradul $2n+i'+k'-1$.

In cazul când $i \neq 0$ și $k \neq 0$, formula (101) arată că se mai poate adăuga la termenii din membrul al doilea al formulei (103), termenii

$$\sum_{\alpha=0}^{i-1} A_{\alpha} f^{(i'+k'+\alpha)}(a) + \sum_{\beta=0}^{k-1} B_{\beta} f^{(i'+k'+\beta)}(b)$$

astfel ca restul R să fie nul, pentru polinoame arbitrare de gradul $2n+i+k+i'+k'-1$.

16. Vom examina acum un caz particular al formulei (92), alegând

$$(104) \quad p(x) = (x-a)^{\beta-1} (b-x)^{\alpha-1}$$

unde $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Vom scrie formula (92) sub forma:

$$(105) \quad \int_a^b (x-a)^{\beta-1} (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx = (b-a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) \left[\sum_{\alpha=0}^{i-1} \lambda_{\alpha} \frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha!} f^{(\alpha)}(a) + \sum_{\beta=0}^{k-1} \mu_{\beta} \frac{(b-a)^{\beta}}{\beta!} f^{(\beta)}(b) \right] + R$$

unde $B(\alpha, \beta)$ este funcția euleriană de prima speță

$$(106) \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

și vom arăta că coeficienții $\lambda_{\alpha}, \mu_{\beta}$ sunt independenți de a și b .

Știm că formula (105) este verificată de un polinom arbitrar de gradul $i+k-1$. Pentru a determina coeficienții λ_s înlocuim în ecuația (105) pe $f(x)$ cu $(b-x)^{k+s}$ unde $s=0, 1, \dots, i-1$.

În membrul întâi al ecuației (105) vom avea de calculat integrale de forma

$$(107) \quad J_s = \int_a^b (x-a)^{\beta-1} (b-x)^{\alpha+s-1} dx$$

Introducând notația lui Appell

$$(108) \quad (\lambda, k) = \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+k-1) \quad [\lambda(0) = 1]$$

vom avea:

$$(109) \quad J_s = \frac{(\alpha, s)}{(\alpha+\beta, s)} (b-a)^{s+\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta)$$

Ținând seama de aceste formule, coeficienții λ_s sunt determinați de sistemul de ecuații lineare

$$(110) \quad \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_{k+h}^j \lambda_j = \frac{(\alpha, h+k)}{(\alpha+\beta, h+k)} \quad (h=0, 1, \dots, i-1)$$

De asemenea înlocuind în ecuația (105) pe $f(x)$ cu $(x-a)^{i+r}$ se deduce

sistemul de ecuații lineare

$$(111) \quad \sum_{j=0}^{k-1} C_{i+h}^j \mu_j = \frac{(\beta, i+h)}{(\alpha+\beta, i+h)} \quad (h=0, 1, \dots, k-1)$$

Sistemele (110), (111), fiind independente de a și b , coeficienții λ_j și μ_j din formula de cuadratură (105) sunt independenți de a și b .

17. În cazul particular al formulei (105) când $\alpha=\beta$, și $i=k$, cele două sisteme (110), (111) în $(-1)^j \lambda_j$ și μ_j sunt identice. Se deduce astfel că

$$(-1)^j \lambda_j = \mu_j \quad (j=0, 1, \dots, k-1)$$

și suntem astfel conduși la următoarea formulă de cuadratură

$$(112) \quad \int_a^b [(x-a)(b-x)]^{\alpha-1} f(x) dx \\ = (b-a)^{2\alpha-1} B(\alpha, \alpha) \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \mu_r \frac{(b-a)^r}{r!} [f^{(r)}(b) + (-1)^r f^{(r)}(a)] + R$$

în care coeficienții μ_r sunt dați de ecuațiile lineare

$$(113) \quad \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+h}^j \mu_j = \frac{(\alpha, k+h)}{(\alpha+\beta, k+h)} \quad (h=0, 1, \dots, k-1)$$

18. Din formula generală (92) se deduce un caz particular important când se alege $p(x) = 1$. Formula care se obține este cunoscută sub numele de formula lui N. Obreschkoff [2]. Integrala ecuației diferențiale

$$(114) \quad \varphi^{(i+k)}(x) = (-1)^{i+k}$$

care satisface condițiile (90) și (91) este

$$(115) \quad \varphi(x) = (-1)^{i+k} \frac{(x-a)^k (b-x)^i}{(i+k)!}$$

și formulele (93), (94) ne arată că

$$(116) \quad A_l = \frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} \frac{C_i^{l+1}}{C_{i+k}^{l+1}}, \quad B_l = (-1)^l \frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} \frac{C_k^{l+1}}{C_{i+k}^{l+1}}$$

Suntem astfel conduși la formula lui N. Obreschkoff [2].

$$(117) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} \frac{C_k^{l+1}}{C_{i+k}^{l+1}} f^{(l)}(b) + \sum_{l=0}^{i-1} \frac{C_i^{l+1}}{C_{i+k}^{l+1}} \frac{(l-a)^{l+1}}{(l+1)!} f^{(l)}(a) \\ + \frac{(-1)^k}{(i+k)!} \int_a^b (x-a)^k (b-x)^i f^{(i+k)}(x) dx.$$

Când $i=k$, formula aceasta devine formula lui K. Petr [3].

$$(118) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \frac{C_k^{l+1}}{C_{2k}^{l+1}} \frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} [f^{(l)}(b) + (-1)^l f^{(l)}(a)] \\ + \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_a^b (x-a)^k (b-x)^k f^{(2k)}(x) dx.$$

Formula (105) în care coeficienții λ și $\mu\beta$ au valori numerice independente de a și b , determinate de sistemele de ecuații lineare (110) și (111) este o generalizare a formulei (117) a lui N. Obreschkoff [2]. Formula (105) nu numai că-și păstrează forma din ecuația (92) din care provine și ecuația (117), dar și structura coeficienților este aceeași ca în formula (117).

De asemenea formula (112), în care coeficienții μ_r sunt dați de sistemul de ecuații (113) și care sunt independenți de a și b , este o generalizare a formulei (118) a lui K. Petr [3].

3. Rădăcinile polinoamelor $Q_n(x)$ în cazul $p(x) = 1$.

19. S'a arătat la no. 5, că abscisele $x_1, x_2, \dots, x_n$ din formula de cuadratură (24) sunt rădăcinile polinomului $Q_n(x)$ definit de formula (30) și că șirul polinoamelor $Q_n(x)$ este ortogonal în intervalul (a, b) față de funcția $p_3(x)$ definită de formula (27).

Se știe că polinoamele lui Jacobi

$$(119) \quad J_n(\lambda + \mu - 1, \mu; x) = \frac{(x-a)^{1-\mu} (b-x)^{1-\lambda}}{(\mu, n)(b-a)^n} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^{\mu+n-1} (b-x)^{\lambda+n-1}]$$

unde $\lambda > 0$ și $\mu > 0$, iar simbolul (μ, n) este definit de formula (108), sunt ortogonale în intervalul (a, b) la funcția $(x-a)^{\mu-1}(b-x)^{\lambda-1}$ adică avem

$$(120) \quad \int_a^b (x-a)^{\mu-1} (b-x)^{\lambda-1} J_n(\lambda + \mu - 1, \mu; x) J_m(\lambda + \mu - 1, \mu; x) dx = 0$$

pentru $n \neq m$.

Aceste proprietăți ne permit să precizăm rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_n$ din formulele (24), (101), (103), în câteva cazuri particulare.

10. Să presupunem că în formula (24) avem $p(x) = 1$. În acest caz abscisele $x_1, x_2, \dots, x_n$ din formula (24) sunt rădăcinile polinomului lui Jacobi $J_n(i+k+1, i+1; x)$.

Se știe că în cazul particular al formulei (24) când $i=k=0$, adică în cazul formulei (80) $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului lui Legendre $J_n(1, 1; x)$.

20. Să presupunem că în formula (24) avem

$$(121) \quad p(x) = (x-a)^{\beta-1} (b-x)^{\alpha-1}$$

unde α și β sunt numere reale pozitive.

În acest caz abscisele $x_1, x_2, \dots, x_n$ din formula (24) sunt rădăcinile polinomului lui Jacobi, $J_n(\alpha + \beta + i + k - 1, \beta + i; x)$.

În cazul $i=k=0$, adică în cazul formulei (80), dacă $p(x)$ este dată de formula (121) rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului lui Jacobi $J_n(\alpha+\beta-1, \beta; x)$.

30. În cazul când $p(x) = 1$, formula (92') devine formula (117) a lui N. Obreschkoff. Am văzut că din formula (92) se deduc formulele de cuadratură (101) și (103). Deci din formula (117) a lui N. Obreschkoff, în care înlocuim pe i cu i' și pe k cu k' , vom deduce formula de cuadratură

$$(121) \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^n C_j f^{(i'+k')}(x_j) + \sum_{\alpha=0}^{i-1} A_\alpha f^{(i'+k'+\alpha)}(a) + \sum_{\beta=0}^{k-1} B_\beta f^{(i'+k'+\beta)}(b) \\ + \sum_{l=0}^{k'-1} (-1)^l \frac{C_{k'}^{l+1}}{C_{i'+k'}^{l+1}} \frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} f^{(l)}(b) + \sum_{l=0}^{i'-1} \frac{C_{i'}^{l+1}}{C_{i'+k'}^{l+1}} \frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} f^{(l)}(a) + R$$

în care restul R , este de forma

$$(122) \quad R = \int_a^b \psi(x) f^{(N)}(x) dx \quad (N = 2n + i + k + i' + k')$$

funcția $\psi(x)$ fiind de aceeași semn în tot intervalul (a, b) .

În formula (121) $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului lui Jacobi $J_n(i+k+i'+k'+1, i'+i+1; x)$.

Iată câteva exemple de formule de tipul (121).

Avem formula

$$(123) \quad \int_a^b f(x) dx = (b-a) f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \sum_{j=1}^n C_j f'(x_j) + R$$

care se deduce din formula (121) luând $i=k=0$ și $i'=1, k'=0$. În această formulă restul R este nul pentru orice polinom de gradul $2n$, iar $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului lui Jacobi $J_n(2, 1; x)$.

Avem formula

$$(124) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{a-b}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} \sum_{j=1}^n C_j f''(x_j) + R$$

care se deduce din formula (121) luând $i=k=0$ și $i'=k'=1$.

Restul R este nul dacă $f(x)$ este un polinom oarecare de gradul $2n+1$, iar $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului lui Jacobi $J_n(3, 2; x)$.

Secția de Matematică
a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu D. V., *Despre o formulă de cuadratură mecanică*, Academia R.P.R. Lucrările sesiunii generale științifice din 2—12 Iunie 1950, p. 238—243.
2. Obreschkoff N., *Neue Quadraturformeln*. Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1940, No. 4, p. 6—26.
3. Petz K., *Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale*. Casopsis prepostovani Matematiky a Fysiky, 1915, 44, p. 454—455.
4. Radon J., *Restausdrücke bei Interpolations- und Quadraturformeln durch bestimmte Integralen*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 1935, 42, p. 389—396.
5. Stieltjes Th.-J., *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques*. Annales de l'École Normale Supérieure, 1884, Troisième série, 1, p. 409—426.
6. Valiron G., *Cours d'analyse mathématique. Théorie des fonctions*.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Несколько формул механических квадратур

Д. В. ИОНЕСКУ

В этой работе рассматривается интеграл (1), в котором $p(x)$ данная конечная и интегрируемая функция неотрицательная в конечном и замкнутом

промежутке $[a, b]$ и такая, чтобы интеграл $\int_a^b p(x) dx$ был положительным. Будучи каким либо делением промежутка (a, b) , на частичных промежутках $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, b)$, присоединяются функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$ интегралы дифференциальных уравнений (3) при граничных условиях (5), (6) и (7).

Таким образом мы приходим к квадратурной формуле (8), в которой коэффициенты C_j, A_e, B_e и остаточный член R даны формулами (9), (10), (11), (12). В формуле (12) φ обозначает функцию совпадающую с $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$ в промежутках $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$.

Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ рассматриваются как неизвестные, то возникает вопрос, возможно ли их определить таким образом, чтобы удовлетворить и условиям (23). Таким образом мы приходим к квадратурной формуле (24), в которой $x_1, x_2, \dots, x_n$ — реальные, различные корни и расположенные между a и b многочлена $Q_n(x) = 0$, данного формулой (30).

Функция $\varphi(x)$, входящая в выражение (30) остаточного члена формулы (24), сохраняет постоянный знак в промежутке (a, b) .

В работе под No 10 кратко излагается случай $i = 0$, а под No 11 — случай $i = 0, k = 0$.

Случай $n = 0$ — составляет предмет подробного изучения. Мы приходим к формуле квадратуры (92), в которой функция $\varphi(x)$, входящая в выражение (95) остаточного члена R , сохраняет постоянный знак в промежутке (a, b) .

Это свойство функции $\varphi(x)$ позволяет через применение квадратурной формулы (24) написать квадратурную формулу (101), составляющую распространение классической формулы Stieltjes-a.

В работе под No 16 изучается случай, когда $p(x)$ дан формулой (104). Мы приходим к квадратурным формулам (105) и (112), являющимися обобщениями формул (117) и (118), принадлежащим Н. Обрешкову и К. Петру.

Под No 19 работы доказывается в случае $p(x) = 1$, что $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корни многочлена Якоби $I_n(i + i + 1, i + 1; x)$. Также в формуле (121), $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корни многочлена $I_n(i + k + i' + k' + 1, k' + i + 1, x)$.

RÉSUMÉ

Quelques formules de quadrature mécanique

par

D. V. IONESCU

Dans ce Mémoire on considère l'intégrale (1), où $p(x)$ est une fonction donnée finie et intégrable dans l'intervalle fermé et fini $[a, b]$, non négative dans cet intervalle et telle que l'intégrale $\int_a^b p(x) dx$ soit positive.

$(a, x_1, \dots, x_n, b)$ étant une certaine division de l'intervalle (a, b) , aux intervalles partiels $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$ on attache les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$ intégrales des équations différentielles (3), avec les conditions aux limites (5), (6) et (7).

On est ainsi conduit à la formule de quadrature (8), où les coefficients C_j, A_i et B_e ainsi que le reste R sont données par les formules (9), (10), (11) et (12). Dans la formule (12) $\varphi(x)$ désigne la fonction qui coïncide avec les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$ dans les intervalles $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ étant regardées comme des inconnues, on se demande s'il est possible de les déterminer de façon à satisfaire aussi aux conditions (23). On est ainsi conduit à la formule de quadrature (24), les $x_1, x_2, \dots, x_n$ étant les racines réelles distinctes et comprises entre a et b du polynôme $Q_n(x) = 0$ donné par la formule (30).

La fonction $\varphi(x)$ qui entre dans l'expression (30) du reste de la formule (24), garde un signe constant dans l'intervalle (a, b) . Au No. 10 de ce mémoire on résume le cas $i = 0$, et au No. 11 le cas $i = 0, k = 0$.

Le cas $n = 0$ fait l'objet d'une étude détaillée. On est conduit à la formule de quadrature (92) où la fonction $\varphi(x)$ qui entre dans l'expression (95) du reste R , garde un signe constant dans l'intervalle (a, b) . Cette propriété de la fonction $\varphi(x)$ permet, par l'application de la formule de quadrature (24) d'écrire la formule de quadrature (101) qui constitue une extension de la formule classique de Stieltjes.

Au No. 16 de ce mémoire, on étudie le cas où $p(x)$ est donnée par la formule (104). On est conduit de cette façon aux formules de quadratures (105) et (112) qui sont des généralisations des formules (117) et (118) qui sont dues à N. Obreschkoff et K. Petr.

Au no. 19 de ce mémoire on démontre que dans le cas $p(x) = 1$, les $x_1, x_2, \dots, x_n$ de la formule (24) sont les racines du polynôme de Jacobi $J_n(i+k+1, i+1; x)$. De même dans la formule (121), les $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines du polynôme de Jacobi $J_n(i+k+i'+k'+1, k'+i'+1; x)$.