

BULETIN ȘTIINȚIFIC

SECȚIUNEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE

Tomul V, Nr. 3

Iulie—August—Septembrie 1953

S U M A R

pag.

S. TELEMEN, O proprietate a funcțiilor din dezvoltarea Almansi a unei funcții poliarmonice	385
I. BARBĂLAT, I. Soluții mărginite și soluții periodice pentru anumite ecuații diferențiale neliniare de ordinul al doilea	393
G. DEMETRESCU și G. PETRESCU, Focar seismic superficial lângă Râmnicul Sărat	403
MARCEL N. ROȘCULEȚ, Funcții de o variabilă hipercomplexă în spațiul cu N dimensiuni. Funcții conjugate	445
D. V. IONESCU, Formule de cubatură în care domeniul de integrare este un triunghi oarecare	423
CABIRIA ANDREIAN, Relații de structură în familia transformărilor înteroare	431
VICTOR MERCEA, EMILIA GRECU, JUDITH MERCEA și ELENA FODOR, Scurgerea moleculară a gazelor prin materiale poroase	443
GHEORGHE CHIȘ, Observații vizuale ale stelei variabile de eclipsă BR Cygni	453
G. DEMETRESCU, Despre determinarea adâncimii cutremurelor din Vrancea	461
VASILE TUTOVAN, Sonda magnetică cu fir de fier	467

FORMULE DE CUBATURĂ ÎN CARE DOMENIUL DE INTEGRARE ESTE UN TRIUNGHI OARECARE

DE

D. V. IONESCU

Comunicare prezentată de Academician S. STOILOV în ședința din 10 Iulie 1953

1. Să notăm cu T un triunghi oarecare din planul xoy , ale cărui vârfuri A, B, C , au coordonatele $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2), (\lambda_3, \mu_3)$. Vom nota cu L, M, N , bari-centrele maselor $(\alpha, 1, 1), (1, \alpha, 1), (1, 1, \alpha)$, plasate în vârfurile A, B, C , ale triunghiului ABC . LMN este un triunghi omotetic cu triunghiul ABC , centrul de omoteție fiind centrul de greutate G al acestui triunghi.

Dând lui α valorile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, vom avea nodurile $L_1, L_2, \dots, L_n; M_1, M_2, \dots, M_n; N_1, N_2, \dots, N_n$. În această lucrare vom expune problema for-mulelor de cubatură pentru polinoame oarecare, $\varphi(x, y)$ cu nodurile fixe L_i, M_i, N_i , unde $i = 1, 2, \dots, n$ care să fie de forma

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n P_i [\varphi(L_i) + \varphi(M_i) + \varphi(N_i)] \quad (1)$$

unde $\varphi(L_i), \varphi(M_i), \varphi(N_i)$ sunt valorile polinomului $\varphi(x, y)$ în punctele L_i, M_i, N_i . Problema constă în a determina constantele $P_1, P_2, \dots, P_n$, astfel ca formula (1) să fie verificată de un polinom oarecare de gradul n .

Vom demonstra că problema astfel pusă este în general posibilă dacă $n \leq 5$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ fiind numere diferite între ele. Problema este cu siguranță posi-bilă când $n \leq 5$ și unul din numerele diferite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ este egal cu 1. Pro-blema este imposibilă, dacă $n > 5$.

2. Pentru stabilirea rezultatelor anunțate, un rol important îl au integralele

$$I_{np} = \iint_T x^n y^p dx dy \quad (2)$$

unde n și p sunt numere întregi pozitive sau nule.

Se arată că pentru $p = 0$ avem formula

$$\iint_T x^n dx dy = \frac{2S}{(n+1)(n+2)} [\lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}(\lambda_2 + \lambda_3) + \dots + \lambda_2^n + \lambda_2^{n-1}\lambda_3 + \dots + \lambda_3^n] \quad (3)$$

unde S este aria triunghiului ABC și anume

$$2S = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & 1 \\ \lambda_3 & \mu_3 & 1 \end{vmatrix}$$

iar în paranteză avem un polinom omogen în $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de gradul n , cu coeficienții egali cu 1.

Din formula (3) se deduce, cu ajutorul unei rotații a axelor coordonate de un unghi ω oarecare, formula care dă valoarea integralei (2). Se demonstrează că

$$\iint_T x^n y^p dx dy = \frac{2p! S}{(n+1)(n+2) \dots (n+p+2)} \sum_{i=0}^p \left(\sum_{k=0}^i Q_{i-k,k} \mu_1^{i-k} \mu_3^k \right) \mu_1^{p-i} \quad (4)$$

unde

$$\begin{aligned} Q_{i-k,k} = & C_{n+p-i}^{p-i} \lambda_1^n + C_{n+p-i-1}^{p-i} \lambda_1^{n-1} (C_k^k C_{i-k+1}^{i-k} \lambda_2 + C_{k+1}^k C_{i-k}^{i-k} \lambda_3) \\ & + \dots \\ & + C_{p-i}^{p-i} (C_k^k C_{i-k+n}^{i-k} \lambda_2^n + C_{i-k+n-1}^{i-k} \lambda_2^{n-1} \lambda_3 + \dots + C_{k+n}^k C_{i-k}^{i-k} \lambda_3^n). \end{aligned} \quad (5)$$

3. Se demonstrează că dacă constantele $P_1, P_2, \dots, P_n$ sunt determinate astfel încât să avem identitatea

$$\iint_T x^n dx dy = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n} [(\alpha_i \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^n + (\lambda_1 + \alpha_i \lambda_2 + \lambda_3)^n + (\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_i \lambda_3)^n] \quad (6)$$

atunci avem de asemenea identitățile

$$\iint_T x^n dx dy = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^r} [(\alpha_i \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^r + (\lambda_1 + \alpha_i \lambda_2 + \lambda_3)^r + (\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_i \lambda_3)^r] \quad (7)$$

unde $r = 0, 1, \dots, n-1$, precum și identitățile

$$\begin{aligned} \iint_T x^{n-p} y^p dx dy = & \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n} [(\alpha_i \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{n-p} (\alpha_i \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^p + \\ & + (\lambda_1 + \alpha_i \lambda_2 + \lambda_3)^{n-p} (\mu_1 + \alpha_i \mu_2 + \mu_3)^p + (\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_i \lambda_3)^{n-p} (\mu_1 + \mu_2 + \alpha_i \mu_3)^p] \end{aligned} \quad (8)$$

unde $p = 1, 2, \dots, n$.

Din cauza caracterului liniar și omogen al formulei (6) se deduce, bazându-se pe formulele (7) și (8), că dacă $P_1, P_2, \dots, P_n$ au fost determinate astfel încât să avem identitatea (6), vom avea de asemenea identitatea

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n P_i [\varphi(L_i) + \varphi(M_i) + \varphi(N_i)],$$

oricare ar fi polinomul $\varphi(x, y)$ de variabilele x și y , de gradul n .

De aici rezultă că pentru a avea o formulă de cubatură (1), este suficient să se determine $P_1, P_2, \dots, P_n$, astfel ca identitatea (6) să aibă loc, oricare ar fi triunghiul T , adică oricare ar fi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

4. Identificând membrii ai doilea ai formulelor (3) și (6) se obține un sistem de ecuații liniare în $P_1, P_2, \dots, P_n$, și se demonstrează că acest sistem este incompatibil dacă $n > 5$.

Rămâne să se studieze acest sistem când $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \frac{S}{3} [\varphi(L) + \varphi(M) + \varphi(N)], \quad (9)$$

valabil pentru orice polinom de gradul întâi și oricare ar fi α . În particular, pentru $\alpha = 1$, se obține

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = S\varphi(G) \quad (9')$$

iar pentru $\alpha \rightarrow \infty$, se obține

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \frac{S}{3} [\varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C)]. \quad (9'')$$

Aceste ultime formule sunt bine cunoscute.

5. Cazul $n = 2$. Fiind date nodurile $L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2$, care corespund la valorile α_1 și α_2 diferite, formula de cubatură (1) este posibilă dacă

$$2\alpha_1\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) - 4 \neq 0.$$

În acest caz avem formula de cubatură

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^2 P_i [\varphi(L_i) + \varphi(M_i) + \varphi(N_i)] \quad (10)$$

valabilă pentru orice polinom $\varphi(x, y)$ de gradul al doilea în x și y .

Dacă $\alpha_2 = 1$, avem formula de cubatură

$$\begin{aligned} \iint_T \varphi(x, y) dx dy = \frac{S}{12} \left\{ \frac{(\alpha_1 + 2)^2}{(\alpha_1 - 1)^2} [\varphi(L_1) + \varphi(M_1) + \varphi(N_1)] + \right. \\ \left. + 9 \cdot \frac{\alpha_1^2 - 4\alpha_1}{(\alpha_1 - 1)^2} \varphi(G) \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

valabilă oricare ar fi $\alpha_1 \neq 1$.

Pentru $\alpha_1 \rightarrow +\infty$ se obține formula

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \frac{S}{12} [\varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) + 9\varphi(G)]$$

bine cunoscută în teoria momentelor de inerție.

Pentru $\alpha_1 = 0$, avem

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \frac{S}{3} [\varphi(A') + \varphi(B') + \varphi(C')] \quad (11')$$

unde A', B', C' , sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC , iar pentru $\alpha_1 = 4$, avem

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \frac{S}{3} [\varphi(L) + \varphi(M) + \varphi(N)] \quad (11'')$$

unde L, M, N , sunt mijloacele segmentelor GA, GB, GC .

6. Cazul $n = 3$. Se demonstrează că dacă L, M, N , sunt nodurile care corespund la α_i , unde $i = 1, 2, 3$, avem formula de cubatură:

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^3 P_i [\varphi(L_i) + \varphi(M_i) + \varphi(N_i)] \quad (12)$$

valabilă pentru orice polinom $\varphi(x, y)$ de gradul al treilea, numai dacă

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 2 \neq 0.$$

Dacă $\alpha_3 = 1$, atunci formula (12) devine

$$\begin{aligned} \iint_T \varphi(x, y) dx dy = \frac{S}{60} \left\{ \sum \frac{(\alpha_1 + 2)^3 (\alpha_2 - 3)}{(\alpha_1 - 1)^2 (\alpha_2 - \alpha_1)} [\varphi(L_1) + \varphi(M_1) + \varphi(N_1)] \right. \\ \left. + 27 \left[1 - 3 \sum \frac{\alpha_1 (\alpha_2 - 3)}{(\alpha_1 - 1)^2 (\alpha_2 - \alpha_1)} \right] \varphi(G) \right\}; \end{aligned} \quad (13)$$

ea este valabilă oricare ar fi $\alpha_1, \alpha_2, 1$ diferite între ele.

În particular, pentru $\alpha_2 = 3$, formula precedentă devine

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \frac{S}{48} \{ 25 [\varphi(L) + \varphi(M) + \varphi(N)] - 27 \varphi(G) \} \quad (14)$$

unde L este baricentrul maselor $(3, 1, 1)$ plasate în vârfurile triunghiului ABC .

7. Cazul $n = 4$. Se demonstrează că dacă L_i, M_i, N_i , sunt nodurile care corespund la α_i unde $i = 1, 2, 3, 4$, avem formula de cubatură

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^4 P_i [\varphi(L_i) + \varphi(M_i) + \varphi(N_i)] \quad (15)$$

valabilă pentru orice polinom $\varphi(x, y)$ de gradul al patrulea, dacă

$$4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 2\sum \alpha_1\alpha_2 + 5\sum \alpha_1 - 8 \neq 0.$$

Dacă $\alpha_4 = 1$, atunci formula devine

$$\begin{aligned} \iint_T \varphi(x, y) dx dy = \frac{S}{180} \left\{ \sum \frac{(\alpha_1 + 2)^4 \alpha_2 \alpha_3 - (\alpha_2 + \alpha_3) + 7}{(\alpha_1 - 1)^2 (\alpha_3 - \alpha_1) (\alpha_2 - \alpha_1)} [\varphi(L_1) + \varphi(M_1) + \varphi(N_1)] \right. \\ \left. + 81 \left[1 - \sum \frac{[\alpha_2 \alpha_3 - (\alpha_2 + \alpha_3) + 7] (\alpha_1^2 + 2\alpha_1)}{(\alpha_1 - 1)^2 (\alpha_3 - \alpha_1) (\alpha_2 - \alpha_1)} \right] \varphi(G) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Ea este valabilă oricare ar fi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 1$ diferite între ele.

Se pot determina α_1 și α_2 astfel ca $P_3 = P_4 = 0$. Se demonstrează că în acest caz se obține formula de cubatură

$$\begin{aligned} \iint_T \varphi(x, y) dx dy = -\frac{S}{30} \left\{ \frac{(\alpha_1 + 2)^4}{(\alpha_1 - 1)^3} [\varphi(L_1) + \varphi(M_1) + \varphi(N_1)] + \right. \\ \left. + \frac{(\alpha_2 + 2)^4}{(\alpha_2 - 1)^2} [\varphi(L_2) + \varphi(M_2) + \varphi(N_2)] \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} [6 + \sqrt{10} + \sqrt{50 + 8\sqrt{10}}] \quad (18)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} [6 + \sqrt{10} - \sqrt{50 + 8\sqrt{10}}]$$

sau

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} [6 - \sqrt{10} + \sqrt{50 - 8\sqrt{10}}] \quad (18')$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} [6 - \sqrt{10} - \sqrt{50 - 8\sqrt{10}}].$$

8. Cazul $n = 5$. Se demonstrează că dacă L_i , M_i , N_i sunt nodurile care corespund la α_i unde $i = 1, 2, 3, 4, 5$, se obține formula de cubatură

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^5 P_i [\varphi(L_i) + \varphi(M_i) + \varphi(N_i)] \quad (19)$$

valabilă pentru orice polinom $\varphi(x, y)$ de gradul al cincilea, dacă

$$5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 - 2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2 - 7\Sigma\alpha_1 + 10 \neq 0.$$

Dacă $\alpha_5 = 1$, atunci formula (19) devine

$$\begin{aligned} \iint_T \varphi(x, y) dx dy = & \frac{S}{1260} \left\{ \sum \frac{(\alpha_1 + 2)^5 3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2) + 5(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 39}{(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)} \right. \\ & \left. [\varphi(L_1) + \varphi(M_1) + \varphi(N_1)] + \right. \\ & \left. + 243 \left[2 - \sum \frac{[3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 5(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 39][2\alpha_1^2 + \alpha_1]}{(\alpha_1 - 1)^2(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] \varphi(G) \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 1$ sunt diferite între ele.

Se poate determina α_1, α_2 astfel ca $P_3 = P_4 = 0$.

Se obține formula de cubatură

$$\begin{aligned} \iint_T \varphi(x, y) dx dy = & \frac{S}{1200} \left\{ (155 - \sqrt{15}) [\varphi(L_1) + \varphi(M_1) + \varphi(N_1)] + \right. \\ & \left. + (155 + \sqrt{15}) [\varphi(L_2) + \varphi(M_2) + \varphi(N_2)] + 270 \varphi(G) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

unde nodurile L_1, M_1, N_1 , și nodurile L_2, M_2, N_2 , corespund la

$$\alpha_1 = 4 + \sqrt{15}, \alpha_2 = 4 - \sqrt{15}.$$

9. Formulele (11'), (11''), (14), (17), (21) sunt formule cu un număr minim de noduri în categoria formulelor de cubatură de tipul (1).

Astfel, dacă se pune problema de a se determina numerele P și α , astfel ca să avem formula de cubatură

$$(81) \quad \iint_T \varphi(x, y) dx dy = P [\varphi(L) + \varphi(M) + \varphi(N)]$$

valabilă pentru un polinom oarecare de gradul al doilea, suntem conduși la formulele (11') și (11'').

Dacă se pune problema de a se determina numerele P , α și P' astfel ca să avem formula de cubatură

$$(81) \quad \iint_T \varphi(x, y) dx dy = P [\varphi(L) + \varphi(M) + \varphi(N)] + P' \varphi(G)$$

valabilă pentru un polinom oarecare de gradul al treilea, suntem conduși la formula (14).

Dacă se pune problema de a se determina numerele P_1 , α_1 , P_2 , α_2 astfel ca să avem formula de cubatură

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = P_1 [\varphi(L_1) + \varphi(M_1) + \varphi(N_1)] + P_2 [\varphi(L_2) + \varphi(M_2) + \varphi(N_2)]$$

valabilă pentru orice polinom de gradul al patrulea, suntem conduși la formula (17).

În sfârșit, dacă se pune problema de a se determina numerele P_1 , α_1 , P_2 , α_2 și P' , astfel ca să avem formula de cubatură

$$\iint_T \varphi(x, y) dx dy = P_1 [\varphi(L_1) + \varphi(M_1) + \varphi(N_1)] + P_2 [\varphi(L_2) + \varphi(M_2) + \varphi(N_2)] + P' \varphi(G)$$

valabilă pentru un polinom oarecare de gradul al cincilea, suntem conduși la formula (21).

10. Să înlocuim în formula de cubatură (1) în care $n = 5$, polinomul $\varphi(x, y)$ cu o funcție $f(x, y)$. Vom obține formula de cubatură

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^5 P_i [f(L_i) + f(M_i) + f(N_i)] + R \quad (22)$$

unde R este restul.

Pentru a evalua restul R , ne vom plasa în ipotezele următoare:

1° Triunghiul ABC este plasat în unghiul xoy , adică coordonatele vârfurilor lui sunt pozitive sau nule.

2° Funcția $f(x, y)$ face parte din clasa funcțiilor care au derivate parțiale în raport cu x și y , până la ordinul al șaselea, acestea din urmă fiind mărginite în domeniul Δ , pe care îl descrie un triunghi $A'B'C'$, omotetic cu triunghiul ABC , centrul de omoteție fiind în O , iar raportul de omoteție variind între 0 și 1.

Vom nota

$$(x, y) \in \Delta \quad \sup \left| \frac{\partial^6 f}{\partial x^6 - i \partial y^6} \right| = K_i \quad (i = 0, 1, \dots, 6) \quad (23)$$

În acest caz se demonstrează că

$$|R| < \frac{1}{6!} \sum_{q=0}^6 C_6^q J_q K_q \quad (24)$$

unde

$$J_q = I_{6-q,q} + \sum_{i=1}^q |P_i| (x_i'^{6-q} y_i'^q + x_i''^{6-q} y_i''^q + x_i'''^{6-q} y_i'''^q). \quad (25)$$

În această formulă, $I_{n,q}$ este integrala fundamentală (2), a. cărei valoare este dată de formula (4), iar $(x_i', y_i'), (x_i'', y_i''), (x_i''', y_i''')$ sunt coordonatele baricentrelor maselor $(\alpha, 1, 1), (1, \alpha, 1), (1, 1, \alpha)$, plasate în vârfurile ABC ale triunghiului ABC .

Formulele de cubatură de tipul (19), (20) fiind exacte pentru polinoame oarecare de gradul al cincilea, pot fi aplicate în practică, neglijând restul R , la funcții $f(x, y)$ care în triunghiul T , luat destul de mic, pot să difere cu puțin de un polinom de gradul al cincilea în x și y . Astfel, dacă în formula de cubatură (22) funcția $f(x, y)$ este astfel încât să putem scrie

$$f(x, y) = \varphi_5(x, y) + \psi(x, y)$$

unde $\varphi_5(x, y)$ este un polinom de gradul al cincilea, iar

$$|\psi(x, y)| < \varepsilon$$

în triunghiul T , avem $|R| < \varepsilon (S + 3 \sum_{i=1}^5 |P_i|)$ ceea ce dovedește că dacă în unele cazuri ε este mic, restul R este neglijabil.

II. Formulele de tipul (19) și (20) în care alegem numerele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ numere raționale, pot să fie foarte utile în calcule practice, deoarece coordonatele nodurilor sunt funcții raționale de coordonatele vârfurilor A, B, C , ale triunghiului, iar coeficienții din formula de cubatură sunt numere raționale.

Formulele de cubatură de tipul (1) pot să servească la calculul integralelor duble

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (26)$$

unde D este un poligon oarecare, deoarece poligonul D se poate descompune în triunghiuri T la care se aplică formulele de cubatură de tipul (1).

Formulele de cubatură de tipul (1) pot să servească și la calculul integralelor duble (26) unde D este un domeniu mărginit de un contur C . Fie D_1 , un domeniu polygonal cuprins în domeniul D și D_2 un domeniu polygonal care cuprinde domeniul D . Dacă $f(x, y) > 0$ în domeniul D , avem

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy < \iint_D f(x, y) dx dy < \iint_{D_2} f(x, y) dx dy,$$

și prin urmare calculând cu formulele de cubatură de tipul (1), integralele duble relative la domeniile D_1 și D_2 , obținem aproximații prin lipsă și prin adaus ale integralei

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

ФОРМУЛЫ КУБАТУРЫ, В КОТОРЫХ ОБЛАСТЬ ИНТЕГРИРОВАНИЯ — ЛЮБОЙ ТРЕУГОЛЬНИК

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Выводятся формулы кубатуры типа (1), точные для полиномов $\varphi(x, y)$ от переменных x и y , где T — любой треугольник, а L_i, M_i, N_i — неподвижные узлы, центры тяжести масс $(L_i, 1, 1), (1, L_i, 1), (1, 1, L_i)$, помещенных в вершинах треугольника ABC ($i=1, 2, \dots, n$).

Доказывается, что формулы типа (1) возможны, если $n > 5$, вообще возможны, если $(\alpha_1 - \alpha_2) \dots (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \neq 0$, когда $n \leq 5$, и наверное возможны, если одно из чисел α_i , равно 1.

FORMULES DE CUBATURE, LE DOMAINE D'INTÉGRATION ÉTANT UN TRIANGLE QUELCONQUE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on établit des formules de cubature du type (1), exactes pour des polynômes $\varphi(x, y)$ en x et y , où T est un triangle quelconque, et L_i, M_i, N_i sont des noeuds fixes, les baricentres des masses $(\alpha_i, 1, 1), (1, \alpha_i, 1), (1, 1, \alpha_i)$ placées aux sommets du triangle ABC ($i = 1, 2, \dots, n$).

On démontre que les formules du type (1) sont impossibles si $n > 5$, elles sont possibles en général si $(\alpha_1 - \alpha_2) \dots (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \neq 0$, lorsque $n \leq 5$, et elles sont certainement possibles si l'un des nombres α_i est égal à 1.