

DESPRE PRECIZIA CALCULULUI NUMERIC ÎN INTERPOLAREA PRIN POLINOAME

DE

TIBERIU POPOVICIU

MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

Comunicare prezentată în ședința din 30 iunie 1955

1. Pentru a calcula o valoare aproximativă a funcției $f(x)$, reală și de variabila reală x , pe punctul x_0 , cînd se cunosc valorile $f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, ale acestei funcții pe $n+1$ puncte (distincte) date x_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$, se poate folosi formula de interpolare

$$f(x_0) \approx L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x_0), \quad (1)$$

unde $L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x_0)$ este polinomul lui Lagrange de gradul n și care ia valorile $f(x_i)$ pe punctele sau *nodurile de interpolare* x_i .

Vom presupune că nodurile nu sînt neapărat echidistante și ne vom ocupa de calculul membrului al doilea al formulei (1) cu ajutorul formulei lui Newton,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x_0) = \sum_{i=0}^n (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_i) D_i^i, \quad (2)$$

unde coeficienții D_i^i , $i = 0, 1, \dots, n$, se obțin din tabloul nr. 1 al diferențelor divizate în care avem, în general,

$$\begin{aligned} D_i^j &= D_i^j[f] = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}; f], \\ D_i^0 &= f_i = f(x_i) \end{aligned} \quad (3)$$

folosind notațiile obișnuite pentru diferențele divizate ale funcției $f(x)$.

Formarea tabloului nr. 1 al diferențelor divizate se face calculînd succesiv coloanele cu ajutorul formulei de recurență

$$D_i^j[f] = \frac{D_{i+1}^{j-1}[f] - D_i^{j-1}[f]}{x_{i+j} - x_i} \quad (D_i^0[f] = f_i) \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n+1-j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se vede că acest calcul necesită împărțiri (cu diferențe de noduri) din care cauză, în general, diferențele divizate nu se pot calcula, de exemplu, sub forma practică de fracții zecimale limitate, decît cu o anumită aproximație, chiar

*) Pentru $i = 0$ termenul corespunzător al sumei se reduce la D_i^0 . O convenție analogă se aplică și formulelor (6), (22), (24).

Tabloul nr. 1

x	$f(x)$	D^1	D^2	D^3	$\dots$	D^{n-1}	D^n
x_1	f_1	D_1^1					
x_2	f_2	D_2^1	D_1^2	D_1^3			
x_3	f_3	$\vdots$	D_2^2	$\vdots$	D_1^{n-1}		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	D_2^{n-1}	D_1^n	
x_{n-1}	f_{n-1}	D_{n-1}^1	D_{n-2}^2	D_{n-2}^3			
x_n	f_n	D_n^1	D_{n-1}^2				
x_{n+1}	f_{n+1}						

dacă nodurile și valorile funcției pe aceste noduri sînt date sub această formă. Dacă însă elementele tabloului nr. 1 se calculează aproximativ, erorile comise se transpun asupra polinomului de interpolare. În cele ce urmează ne propunem să examinăm efectul acestor erori asupra calculului efectiv al formulei (2). Pentru simplificare, vom presupune că nodurile și punctul x_0 , unde se interpolează, nu sînt afectate de erori.

2. Coloanele tabloului nr. 1 se calculează succesiv cu anumite aproximații.

Fie $\tilde{f}_i$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, niște valori aproximative ale valorilor funcției pe noduri și $c_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, corecțiile respective, deci $f_i = \tilde{f}_i + c_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$. Fie apoi, în general, $\tilde{D}_i^j = \tilde{D}_i^j[f]$, $i = 1, 2, \dots, n+1-j$, valorile aproximative ale elementelor coloanei j , calculate cu ajutorul elementelor deja calculate ale coloanei $j-1$ și $c_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \dots, n+1-j$, corecțiile respective. Vom avea atunci

$$\tilde{D}_i^j + c_i^{(j)} = \frac{\tilde{D}_{i+1}^{j-1} - \tilde{D}_i^{j-1}}{x_{i+j} - x_i} \quad (\tilde{D}_i^0 = \tilde{f}_i) \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n+1-j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Tabloul nr. 1 al diferențelor divizate se înlocuiește atunci cu tabloul nr. 2 al valorilor aproximative calculate al diferențelor divizate.

Tabloul nr. 2

x	$\tilde{f}(x)$	$\tilde{D}^1$	$\tilde{D}^2$	$\tilde{D}^3$	$\dots$	$\tilde{D}^{n-1}$	$\tilde{D}^n$
x_1	$\tilde{f}_1$	$\tilde{D}_1^1$					
x_2	$\tilde{f}_2$	$\tilde{D}_2^1$	$\tilde{D}_1^2$	$\tilde{D}_1^3$			
x_3	$\tilde{f}_3$	$\vdots$	$\tilde{D}_2^2$	$\vdots$	$\tilde{D}_1^{n-1}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\tilde{D}_2^{n-1}$	$\tilde{D}_1^n$	
x_{n-1}	$\tilde{f}_{n-1}$	$\tilde{D}_{n-1}^1$	$\tilde{D}_{n-2}^2$	$\tilde{D}_{n-2}^3$			
x_n	$\tilde{f}_n$	$\tilde{D}_n^1$	$\tilde{D}_{n-1}^2$				
x_{n+1}	$\tilde{f}_{n+1}$						

O valoare aproximativă $\tilde{L}$ a expresiei (2) se obține atunci cu ajutorul tabloului nr. 2 cu formula

$$\tilde{L} = \sum_{i=0}^n (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_i) \tilde{D}_1^i \quad (6)$$

și vom avea

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x_0) = \tilde{L} + \lambda, \quad (7)$$

λ fiind corecția respectivă.

În vederea delimitării corecției λ , vom face câteva observații asupra formulei de recurență a diferențelor divizate și asupra delimitării diferențelor divizate, care vor interveni.

3. Fiind dat șirul de noduri (distincte)

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \quad (8)$$

orice șir de $n+1$ numere

$$f_1, f_2, \dots, f_{n+1} \quad (9)$$

poate fi considerat ca fiind format de valorile $f_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, ale unei funcții $f(x)$ definite pe punctele (8). Această observație simplă clarifică diferite notații, care vor urma.

Fie k un număr întreg nenegativ $< n$ și să considerăm, pentru $j = 0, 1, \dots, n-k$, șirul

$$D_1^{j,k}[f], D_2^{j,k}[f], \dots, D_{n+1-k-j}^{j,k}[f] \quad (10)$$

format cu ajutorul formulei de recurență

$$D_i^{j,k}[f] = \frac{D_{i+1}^{j-1,k}[f] - D_i^{j-1,k}[f]}{x_{i+j+k} - x_i}, \quad (11)$$

unde $D_i^{0,k}[f] = f_i$, $i = 1, 2, \dots, n+1-k$. Astfel, pentru $j = 0$ șirul (10) se reduce la șirul format din primii $n+1-k$ termeni ai șirului (9).

Este clar că termenii șirului (10) se exprimă liniar și omogen în raport cu primii $n+1-k$ termeni ai șirului (9) și, în general, termenii șirului (10), pentru un j dat, se exprimă liniar și omogen cu termenii șirului (10) pentru valoarea imediat inferioară a lui j .

Pentru $k = 0$, avem $D_i^{j,0}[f] = D_i^j$, $i = 1, 2, \dots, n+1-j$, formulele (11) se reduc la formulele (4), iar șirul (10) se reduce la șirul elementelor coloanei de ordinul j din tabloul nr. 1 al diferențelor divizate ale funcției $f(x)$ pe nodurile (8).

Formula (11) care face legătura între șirurile (10) pentru valorile succesive ale lui j , se mai poate scrie

$$D_i^{j,k}[f] = D_i^{j-1,k}[f] + [D_i^{j-1,k}[f]]. \quad (12)$$

Mai general, avem formula

$$D_i^{j,k}[f] = D_i^{j-1,k}[f] + [D_i^{j-1,k}[f]], \quad (13)$$

unde r este un număr întreg, $0 \leq r \leq j$.

Într-adevăr, se observă că pentru $r = 0$ și $r = j$, formula (13) este evidentă, iar pentru $r = 1$ ea se reduce la (12). Pentru a demonstra deci formula (13) este destul a arăta că, dacă ea este adevărată pentru $r = s$ ($s < j$), ea va fi adevărată și pentru $r = s + 1$. Acest lucru se arată astfel. Prin ipoteză avem:

$$D_i^{j-1, k} [f] = D_i^{s, k+j-s-1} [D^{j-s-1, k} [f]],$$

de unde, dacă ținem seama de formula (12), deducem

$$D_i^{j, k} [f] = D_i^{1, k+j-1} [D^{s, k-j-s-1} [D^{j-s-1, k} [f]]] = [L_i^{s+1, k+j-s-1} [D^{j-s-1, k} [f]]].$$

De aici rezultă imediat că formula (13) este adevărată pentru $r = s + 1$.

Simbolic, proprietatea exprimată de formula (13) se poate scrie

$$D^{\alpha+\beta, k} = D^{\alpha, \beta+k} D^{\beta, k}.$$

4. În cele ce urmează vom avea nevoie de o delimitare convenabilă a termenilor șirului (9).

Diferența divizată $D_1^n = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$ se delimitează ușor, ținând seama de formula bine cunoscută

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f_i}{l'(x_i)},$$

unde $l(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1})$. Avem

$$|D_1^n| \leq N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) M,$$

unde

$$N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{|l'(x_i)|} \quad (14)$$

și $M = \max_{i=1,2,\dots,n+1} (|f_i|)$.

O delimitare analogă a lui $D_1^{n-k, k} [f]$ se poate scrie

$$|D_1^{n-k, k} [f]| \leq N_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) M, \quad (15)$$

unde, de altfel, M se poate înlocui cu $\max_{i=1,2,\dots,n+1-k} (|f_i|)$.

În formula (15) avem

$$N_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sup_{\substack{|f_i| \leq 1 \\ i=1,2,\dots,n+1-k}} |D_2^{n-k, k} [f]|$$

și deci

$$N_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = D_1^{n-k, k} [f]$$

cu condiția să alegem toate numerele f_i , $i = 1, 2, \dots, n + 1 - k$ egale cu 1 sau -1, în mod convenabil.

Avem

$$N_0(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}),$$

membrul al doilea fiind dat de (14). Pentru $k > 0$, expresia lui $N_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ este însă mai complicată.

În formarea lui $D_1^{n-k, k} [f]$ intervin efectiv numai nodurile x_i pentru $i = 1, 2, \dots, n - k, k + 2, k + 3, \dots, n + 1$. Dacă deci $2k \leq n - 1$, vor

interveni toate nodurile. Dacă însă $2k > n - 1$ nu vor interveni decât primele $n - k$ și ultimele $n - k$ noduri (8). Deducem de aici următoarea formulă:

$$N_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = N_{n-k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots, x_{n+1}) \quad (16)$$

dacă $2k > n - 1$. Este suficient să presupunem $k < n$, deoarece avem evident

$$N_n(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 1. \quad (17)$$

5. În particular, să presupunem că

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}. \quad (18)$$

Formula de recurență (11) ne arată că dacă termenii șirului (9) sînt alternativ pozitivi și negativi, șirurile (10) se bucură de aceeași proprietate. Avem atunci, pe de o parte,

$$|D_1^{j, k} [f]| = \frac{1}{x_{i+j+k} - x_i} [|D_{i+1}^{j-1, k} [f]| + |D_i^{j-1, k} [f]|].$$

Deoarece, pe de altă parte, avem totdeauna

$$|D_1^{j, k} [f]| \leq \frac{1}{|x_{i+j+k} - x_i|} [|D_{i+1}^{j-1, k} [f]| + |D_i^{j-1, k} [f]|]$$

rezultă că, în cazul (18), numărul $N_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ este dat de formula

$$N_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \alpha_1^{n-k, k} \quad (19)$$

unde numerele $\alpha_i^{j, k}$ se pot calcula cu ajutorul formulelor de recurență

$$\alpha_i^{j, k} = \frac{\alpha_{i+1}^{j-1, k} + \alpha_i^{j-1, k}}{x_{i+j+k} - x_i}, \quad (\alpha_i^{0, k} = 1) \quad (20)$$

$$i = 1, 2, \dots, n + 1 - k - j, \quad j = 1, 2, \dots, n + 1 - k.$$

Formula de recurență (20) ne mai arată că, în cazul (18), avem

$$N_k(x_1, x_2, \dots, x_{j+k+1}) = \frac{N_k(x_1, x_2, \dots, x_{j+k}) + N_k(x_2, x_3, \dots, x_{j+k+1})}{x_{j+k+1} - x_1} \quad (21)$$

Astfel, folosind formulele (16), (17), (21) deducem, în particular,

$$N_0(x_1, x_2) = \frac{2}{x_2 - x_1},$$

$$N_0(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}, \quad N_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{x_3 - x_1},$$

$$N_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{2(x_4 + x_2 - x_1 - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_3)(x_4 - x_1)},$$

$$N_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{2(x_4 + x_3 - x_1 - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)}, \quad N_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{2}{x_4 - x_1},$$

$$N_0(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{2[(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + (x_5 - x_4)(x_4 - x_3) + (x_2 - x_1)(x_5 - x_4)]}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_3)(x_5 - x_4)(x_4 - x_1)(x_5 - x_2)},$$

$$N_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{2[(x_4 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_1) + (x_3 - x_1)(x_4 - x_3)(x_4 - x_1) + (x_5 - x_2)(x_3 - x_2)(x_5 - x_3)]}{(x_2 - x_1)(x_4 - x_2)(x_5 - x_3)(x_4 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_1)},$$

$$N_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{2(x_5 + x_4 - x_1 - x_2)}{(x_4 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_1)},$$

$$N_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{2}{x_5 - x_1}.$$

Se vede acum ușor cum se pot delimita termenii șirului (10) cu ajutorul rezultatelor precedente. Avem

$$|D_i^{j,k}[f]| \leq N_k(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j+k}) M,$$

unde $M = \max_{r=i, i+1, \dots, i+j} (|f_r|)$

6. Să revenim la delimitarea corecției λ din formula (7). Formula (5) se mai poate scrie

$$D_i^{j,j-1}[\tilde{D}^{j-1}] = \tilde{D}_i^j + c_i^{(j)},$$

din care deducem și

$$D_i^{j,j-1}[\tilde{D}^{j-r-1}] = \tilde{D}_i^{j-r} + c_i^{(j-r)}, \quad 0 \leq r \leq j-1.$$

De aici rezultă că

$$\begin{aligned} D_i^{j,j-r}[\tilde{D}^{j-r-1}] &= D_i^{j,j-r}[\tilde{D}^{j-r} + c_i^{(j-r)}] = \\ &= D_i^{j,j-r}[\tilde{D}^{j-r}] + D_i^{j,j-r}[c_i^{(j-r)}]. \end{aligned}$$

Dar, pe baza formulei (13),

$$D_i^{j,j-r}[\tilde{D}^{j-r-1}] = D_i^{r+1,j-r-1}[\tilde{D}^{j-r-1}]$$

și avem, prin urmare,

$$D_i^{r+1,j-r-1}[\tilde{D}^{j-r-1}] = D_i^{r,j-r}[\tilde{D}^{j-r}] + D_i^{r,j-r}[c_i^{(j-r)}], \quad r = 0, 1, \dots, j-1.$$

Adunând membru cu membru aceste egalități, avem

$$D_i^{j,0}[\tilde{D}^0] = D_i^{0,j}[\tilde{D}^j] + \sum_{r=0}^{j-1} D_i^{r,j-r}[c_i^{(j-r)}].$$

Însă avem și

$$D_i^{j,0}[\tilde{D}^0] = D_i^{j,0}[f] - D_i^{j,0}[c^{(0)}] = D_i^j[f] - D_i^{j,0}[c^{(0)}], \quad D_i^{0,j}[\tilde{D}^j] = \tilde{D}_i^j$$

asa că deducem formula

$$D_i^j[f] = D_i^j = \tilde{D}_i^j + \sum_{r=0}^j D_i^{r,j-r}[c_i^{(j-r)}].$$

Ținând seama de această formulă, din (6), (7) deducem

$$\lambda = \sum_{i=0}^n (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_i) \left[\sum_{r=0}^i D_1^{r,i-r}[c^{(i-r)}] \right] \quad (22)$$

În particular, dacă toate corecțiile $c_i^{(j)}$ rămân, în valoare absolută, cel mult egale cu ε , pe baza formulei (15) avem

$$|D_1^{r,i-r}[c^{(i-r)}]| \leq N_{i-r}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) \varepsilon$$

și putem scrie

$$|\lambda| \leq V(x_0) \varepsilon, \quad (23)$$

unde

$$V(x) = \sum_{i=0}^n |(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_i)| \left[\sum_{r=0}^i N_{i-r}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) \right]. \quad (24)$$

Cînd valorile funcției sînt exacte, deci cînd $c_i^{(j)} = 0, i = 1, 2, \dots, n+1$, se poate lua chiar

$$V(x) = \sum_{i=1}^n |(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_i)| \left[\sum_{r=0}^{i-1} N_{i-r}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) \right]. \quad (25)$$

7. Vom încheia aceste considerații cu un exemplu numeric. Fie funcția $f(x)$ pe nodurile $x_1 = 14, x_2 = 17, x_3 = 31, x_4 = 35$, dată cu valorile ei exacte:

x	14	17	31	35
$f(x)$	68,7	64,0	44,0	39,1

Avem aici $n = 3$ și sîntem în cazul (18) prin alegerea convenabilă a notațiilor.

Formulele precedente ne dau, în acest caz,

$$N_1(x_1, x_2) = 1,$$

$$N_2(x_1, x_2, x_3) + N_1(x_1, x_2, x_3) = 1 + \frac{2}{x_3 - x_2} = 1 + \frac{2}{17} < 1,12,$$

$$\begin{aligned} N_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + N_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + N_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ = 1 + \frac{2}{x_4 - x_1} + \frac{2(x_4 + x_3 - x_1 - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)} = 1 + \frac{2}{21} + \frac{5}{459} < 1,11. \end{aligned}$$

Avem prin urmare, interpolînd în punctul $x_0 = 27$,

$$V(x_0) < 13 + 13 \times 10 \times 1,12 + 13 \times 10 \times 4 \times 1,11 < 736.$$

Dacă în vederea formării tabloului nr. 2, calculăm diferențele divizate prescurtat la k zecimale, vom avea

$$|\lambda| < \frac{736}{2 \cdot 10^k} = \frac{368}{10^k}.$$

Pentru a putea obține cel puțin o zecimală exactă în valoarea polinomului (2), trebuie să avem cel puțin $368 \cdot 10^{-k} < 0,01$, deci cel puțin $k = 5$. Luând $k = 5$, cu datele din tabloul nr. 2 se obțin datele din tabloul nr. 3.

Tabloul nr. 3

x	$f(x)$	$\tilde{D}^1$	$\tilde{D}^2$	$\tilde{D}^3$
14	68,7			
17	64,0	-1,56667		
31	44,0	-1,42857	0,00812	
35	39,1	-1,22500	0,01431	0,00015

Avem atunci

$$\tilde{L} = 68,7 - 13 \times 1,5667 + 130 \times 0,00812 - 520 \times 0,00015 = 49,31089$$

și $|\lambda| < 0,00368$,

deci

$$49,37021 < L(14, 17, 31, 35; f | 27) < 49,31457.$$

În felul acesta polinomul (2) este obținut cu trei zecimale exacte, ceea ce față de datele problemei este suficient.

Secția de matematică
a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

О ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПОЛИНОМАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Для того чтобы вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке x_0 при помощи формулы (1), в которой второй член является интерполяционным полиномом Ньютона формы (2) для случая узлов $x_i, i = 1, 2, \dots, n+1$, не обязательно равноотстоящих, необходимо предварительно составить таблицу 1 разделенных разностей. При составлении этой таблицы приходится последовательно вычислять элементы столбцов, причем вкрадываются погрешности, влияющие на вычисление значения полинома Ньютона. Обозначим через $\tilde{D}_i^j$ исчисленные приближенные значения элементов D_i^j таблицы разделенных разностей, данные формулой (3), и через $c_i^{(j)}$, соответствующие поправки; поправка λ вычисленного приближенного значения полинома Ньютона (2) дана

формулой (22), в которой выражения $D_i^{j,k} []$, относящиеся к узлам (8) и к последовательности (9) значений этих узлов, даны формулами (11).

Если имеем $|c_i^{(j)}| \leq \varepsilon$ для всех поправок разделенных разностей, то из оценки (15) выводится оценка (23) для λ . При этом $N_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ являются некоторыми выражениями, зависящими только от узлов, а $V(x)$ дано формулой (24) или, если значения функции не содержат погрешностей, формулой (25).

В конце приводится численный пример.

SUR LA PRÉCISION DU CALCUL NUMÉRIQUE DANS L'INTERPOLATION PAR DES POLYNÔMES

(RÉSUMÉ)

Pour calculer une valeur approximative sur le point x , de la fonction $f(x)$, à l'aide de la formule (1), où le second membre est le polynôme d'interpolation sous la forme (2) de Newton, il faut tout d'abord construire le tableau 1 des différences divisées. Les noeuds $x_i, i = 1, 2, \dots, n+1$ ne sont pas nécessairement équidistants. Dans le calcul des éléments des colonnes successives du tableau des différences divisées, on commet des erreurs qui se transmettent au calcul des valeurs du polynôme de Newton. En désignant par $\tilde{D}_i^j$ les valeurs approximatives calculées des éléments D_i^j du tableau des différences divisées, donnés par les formules (3) et par $c_i^{(j)}$ les corrections respectives, la correction λ de la valeur approximative calculée de la valeur du polynôme (2) de Newton est donnée par la formule (22), où les expressions $D_i^{j,k} []$, relatives aux noeuds (8) et à la suite (9) des valeurs sur ces noeuds, sont données par les formules (11).

Si nous avons $|c_i^{(j)}| \leq \varepsilon$, pour toutes les corrections des différences divisées, de la délimitation (15), on déduit la délimitation (23) de λ . Ici $N_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ sont des expressions ne dépendant que des noeuds et $V(x)$ est donné par la formule (24) ou même par (25) lorsque les valeurs de la fonction ne sont pas affectées par des erreurs.

A la fin on donne une application numérique.