

48 A L 3651
ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

BULETIN ȘTIINTIFIC

SECȚIA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE

1

TOMUL VIII

IANUARIE — MARTIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

48
A
L 3651

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

BULETIN ȘTIINTIFIC

SECȚIA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE

1

TOMUL VIII

IANUARIE — MARTIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

BULETIN ȘTIINȚIFIC

SECȚIA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE

Tomul VIII, nr. 1

Ianuarie-februarie-martie 1956

S U M A R

	Pag.
MIHAIL BENADO, Asupra descompunerilor unui grup în produs direct. Nota III	5
CONSTANTIN P. POPOVICI, Proprietăți locale ale întregilor lui Gauss....	11
DRAGOȘ VAIDA, Întrebuințarea imaginarelor lui Galois în teoria mecanismelor automate. VI. Clasificarea evoluțiilor schemelor cu două elemente intermediare	21
IVAN SINGER, Asupra reprezentării concrete a spațiilor Banach.....	31
I. P. ELIANU, Derivata arcolară și diferențiala exterioară	39
MARIANA NEDELCU, Formule de mediație pentru polinomul areolar de ordinul n în spațiul cu 3 dimensiuni	51
DANA TĂUTU, Asupra reprezentării variației totale a unei funcții continue printr-o integrală riemanniană	59
D. V. IONESCU, O generalizare a unei proprietăți care intervine în metoda lui Runge și Kutta, pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale	67
M. GHERMĂNESCU, Asupra lanțurilor lui Markov	101
N. N. PATRAULEA, Mișcarea axial simetrică în jurul aripilor toroidale subțiri	115
ANDREI POPOVICI, Determinismul cuantic în lumina legii reciprocității (II)	121
G. DEMETRESCU, Cutremurul 1953.II.22 din Vrancea	183
CĂLIN POPOVICI, Convergentul nucleului roiului Ursa Mare	193
CĂLIN POPOVICI, Determinarea deviației relative a verticalei	199
N. VASILESCU KARPEN, Mecanismul presiunii osmotice	205
ÁRPÁD SZABÓ și ATTILA, SOÓ V. Radioactivitatea unor izvoare de apă termală din regiunile Oradea și Hunedoara (Transilvania)	215
V. TOMA, Sistemul aritmetic al unei mașini electronice de calcul în studiu și realizare la Institutul de fizică al Academiei R.P.R.....	223
BUTU ROTENȘTEIN, SOFIA CALOGHIRU și TEODOR TEITEL, Contribuții la studiul transformării fără difuzie $\gamma \rightarrow \alpha$ în aliaje Fe—C	237
AL. SPĂTARU, Determinarea condițiilor de lucru în regim cvasistaționar și calculul distorsiunilor în cazul modulației de frecvență	247

O GENERALIZARE A UNEI PROPRIETĂȚI
CARE INTERVINE ÎN METODA LUI RUNGE
ȘI KUTTA, PENTRU INTEGRAREA NUMERICĂ
A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

DE

D. V. IONESCU

Comunicare prezentată de academician GH. VRÂNCEANU în ședința din 1 decembrie 1955

În această lucrare vom extinde la sisteme de ecuații diferențiale și la ecuații diferențiale de ordin superior rezultatele din lucrarea [2].

§ Sisteme de ecuații diferențiale

1. Să considerăm sistemul de ecuații diferențiale

$$y_j' = f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (1)$$

unde $j = 1, 2, \dots, n$. Presupunem că sînt îndeplinite toate condițiile, pentru ca să existe un sistem de integrale $y_1, y_2, \dots, y_n$, care se dezvoltă în serii întregi după puterile lui $x - x_0$, convergente în intervalul $[x_0, x_0 + \rho]$ și care satisfac la condiții inițiale în punctul x_0 .

Fie x un punct al intervalului $[x_0, x_0 + \rho]$ și $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ valorile corespunzătoare ale sistemului de integrale în acest punct. În punctul $x + h$, care de asemenea aparține intervalului $[x_0, x_0 + \rho]$, se poate calcula $y_j(x + h)$ prin dezvoltările în serie

$$y_j(x + h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \dots \quad (2)$$

după puterile lui h , coeficienții acestor dezvoltări calculîndu-se din ecuații diferențiale (1) și cu ajutorul lui $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ prin derivări succesive.

C. Runge și H. König [2] au arătat că, dacă se construiesc următoarele funcții de h

$$\begin{aligned} m_j^{(1)} &= hf_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ m_j^{(2)} &= hf_j\left(x + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{m_1^{(1)}}{2}, \dots, y_n + \frac{m_n^{(1)}}{2}\right), \\ m_j^{(3)} &= hf_j\left(x + h, y_1 + m_1^{(1)}, \dots, y_n + m_n^{(1)}\right), \\ m_j^{(4)} &= hf_j\left(x + h, y_1 + m_1^{(3)}, \dots, y_n + m_n^{(3)}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

atunci funcția

$$M_j(h) = y_j(x) + \frac{m_j^{(1)} + m_j^{(2)} + m_j^{(4)}}{6}, \quad (3')$$

dezvoltată după puterile lui h , se scrie

$$M_j^{(h)} = y_j + \frac{h}{1} y_j' + \frac{h^2}{2!} y_j'' + \frac{h^3}{3!} y_j''' + \dots, \quad (3'')$$

care are primii patru termeni identici cu primii patru termeni ai dezvoltării lui $y(x+h)$ după puterile lui h .

W. Kutta [3] a arătat că, dacă se construiesc următoarele funcții de h

$$\begin{aligned} m_i^{(1)} &= hf_i(x, y_1, \dots, y_n), \\ m_i^{(2)} &= hf_i\left(x + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{m_1^{(1)}}{2}, \dots, y_n + \frac{m_n^{(1)}}{2}\right), \\ m_i^{(3)} &= hf_i\left(x + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{m_1^{(2)}}{2}, \dots, y_n + \frac{m_n^{(2)}}{2}\right), \\ m_i^{(4)} &= hf_i\left(x + h, y_1 + m_1^{(3)}, \dots, y_n + m_n^{(3)}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

atunci funcția

$$M_i(h) = y_i(x) + \frac{m_i^{(1)} + 2m_i^{(2)} + 2m_i^{(3)} + m_i^{(4)}}{6} \quad (4')$$

dezvoltată după puterile lui h , se scrie

$$M_i(h) = y_i + \frac{h}{1!} y_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \frac{h^3}{3!} y_i''' + \frac{h^4}{4!} y_i^{(4)} + \dots, \quad (4'')$$

care are primii cinci termeni identici cu primii cinci termeni ai dezvoltării lui $y(x+h)$ după puterile lui h .

În această lucrare vom arăta un procedeu regulat pentru construirea unor funcții $M_j^{(p)}(h)$ analoge ale lui Runge și Kutta, care dezvoltate după puterile lui h , să aibă primii p termeni — oricare ar fi p — identici cu primii p termeni ai dezvoltării lui $y(x+h)$, după puterile lui h .

2. Să considerăm formula de cvadratură

$$\int_x^{x+h} \varphi(s) ds = \sum_{i=1}^r A_i \varphi(x + \lambda_i h) + R(h), \quad (5)$$

unde $x + \lambda_i h$ sînt noduri date, $i = 1, 2, \dots, r$, iar coeficienții A_i se determină

astfel, ca restul R să fie nul, cînd $\varphi(s)$ este un polinom oarecare de gradul $p \geq r - 1$. Este evident că vom avea ecuațiile

$$\sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^k = \frac{h}{k+1}, \quad (k = 0, 1, \dots, p), \quad (6)$$

iar

$$\sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^{p+1} \neq \frac{h}{p+2}. \quad (7)$$

În formula de cvadratură (5) să înlocuim pe $\varphi(x)$ cu o funcție, care se dezvoltă în serie întreagă după puterile lui $x - x_0$, convergentă în intervalul $[x_0, x_0 + \rho]$. Presupunem că punctele $x, x+h, x+\lambda_i h$ aparțin intervalului $[x_0, x_0 + \rho]$ și să demonstrăm că restul $R(h)$, din formula (5), se dezvoltă în serie întreagă după puterile lui h , care începe cu un termen în h^{p+2} .

Într-adevăr, formula (5) se mai scrie sub forma

$$\int_0^h \varphi(x+t) dt = \sum_{i=1}^r A_i \varphi(x + \lambda_i h) + R(h) \quad (5')$$

și înlocuim

$$\begin{aligned} \varphi(x+t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \varphi^{(k)}(x), \\ \varphi(x + \lambda_i h) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k h^k}{k!} \varphi^{(k)}(x), \end{aligned}$$

din formula (5') deducem că

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{k+1} - \sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^k \right) \frac{h^k}{k!} \varphi^{(k)}(x). \quad (8)$$

Să notăm

$$\sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^k = B_k \quad (k = p+1, p+2, \dots)$$

și să dovedim că

$$B_k = h b_k, \quad (k = p+1, p+2, \dots),$$

unde b_k sînt coeficienți care depind numai de numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Pentru aceasta scriem ecuațiile

$$A_1 \lambda_1^{p-r+1} + A_2 \lambda_2^{p-r+1} + \dots + A_r \lambda_r^{p-r+1} = \frac{h}{p-r+2},$$

.....

$$A_1 \lambda_1^p + A_2 \lambda_2^p + \dots + A_r \lambda_r^p = \frac{h}{p+1},$$

$$A_1 \lambda_1^{p+1} + A_2 \lambda_2^{p+1} + \dots + A_r \lambda_r^{p+1} = B_{p+1},$$

între care eliminăm pe $A_1 \lambda_1^{p-r+1}, A_2 \lambda_2^{p-r+1}, \dots, A_r \lambda_r^{p-r+1}$.

Vom avea

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{h}{p-r+2} \\ 1 & 2 & \dots & \lambda_r & \frac{h}{p-r+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} & \frac{h}{p+1} \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r & B_{p+1} \end{vmatrix} = 0;$$

de unde se deduce că

$$B_{p+1} = h \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{p-r+2} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r & \frac{1}{p-r+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} & \frac{1}{p+1} \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r & 0 \end{vmatrix} = h b_{p+1}$$

La fel se arată că

$$B_{p+2} = h \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{p-r+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{r-2} & \lambda_2^{r-2} & \lambda_r^{r-2} & \frac{1}{p+1} \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \lambda_r^{r-1} & b_{p+1} \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \lambda_r^r & 0 \end{vmatrix} = h b_{p+2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix}$$

și așa mai departe.

Revenind la formula (8), vom putea deci scrie

$$R(h) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - b_k \right) \frac{h^{k+1}}{k!} \varphi^{(k)}(x) \quad (8')$$

și primul termen al acestei dezvoltări este

$$\left(\frac{1}{p+2} - b_{p+1} \right) \frac{h^{p+2}}{(p+1)!} \varphi^{(p+1)}(x)$$

care în baza relației (7) este diferit de zero.

3. În formula de cuadratură (5) să înlocuim $\varphi(s) = y'_j(s)$. Vom obține

$$y_j(x+h) - y_j(x) = \sum_{i=1}^r A_i y'_j(x + \lambda_i h) + R_j(h). \quad (8'')$$

Să presupunem că se cunoaște dezvoltarea lui $y'_j(x + \lambda_i h)$ după puterile lui $\lambda_i h$, din care punem în evidență primii $p+1$ termeni, adică

$$y'_j(x + \lambda_i h) = y'_j(x) + \frac{\lambda_i h}{1!} y''_j(x) + \dots + \frac{(\lambda_i h)^p}{p!} y_j^{(p+1)}(x) + \rho_j(\lambda_i h).$$

Formula (8'') ne dă atunci

$$\begin{aligned} y_j(x+h) = y_j(x) + \left(\sum_{i=1}^r A_i \right) y'_j(x) + \dots + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y_j^{(p+1)}(x) + \dots \\ + \left(\sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^p \right) \frac{h^p}{p!} y_j^{(p+1)}(x) + R_j(h) + \sum_{i=1}^r A_i \rho_j(\lambda_i h). \end{aligned}$$

Ținând seama de ecuațiile (6) vedem că această formulă devine

$$\begin{aligned} y_j(x+h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y'_j(x) + \dots + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y_j^{(p+1)}(x) + R_j(h) + \\ + \sum_{i=1}^r A_i \rho_j(\lambda_i h), \end{aligned}$$

unde termenii $R_j(h) + \sum_{i=1}^r A_i \rho_j(\lambda_i h)$ conțin puteri ale lui h

de ordin $\geq p+2$.

De aici rezultă că, dacă se cunoaște dezvoltarea în serie întreagă după puterile lui h a funcțiilor $y'_j(x + \lambda_i h)$, unde $i = 1, 2, \dots, r$ pînă la gradul p în h , atunci funcția de h

$$M_j(h) = y_j(x) + \sum_{i=1}^r A_i y'_j(x + \lambda_i h)$$

dezvoltată în serie după puterile lui h are primii $p+2$ termeni identici cu primii $p+2$ termeni din dezvoltarea în serie a lui $y_j(x+h)$ după puterile lui h .

Să presupunem că $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ formează un sistem de integrale ale sistemului de ecuații diferențiale (1). Atunci

$$y'_j(x + \lambda_i h) = f_j[x + \lambda_i h, y_1(x + \lambda_i h), y_2(x + \lambda_i h), \dots, y_n(x + \lambda_i h)].$$

Ținând seama că dezvoltarea în serie a lui $y'_j(x + \lambda_i h)$ după puterile lui h , revine la dezvoltarea în serie a funcției

$$f_j [x + \lambda_i h, y_1(x + \lambda_i h), y_2(x + \lambda_i h), \dots, y_n(x + \lambda_i h)],$$

deducem, din considerațiile precedente, următoarea *teoremă fundamentală*.

Dacă se cunosc primii $p + 1$ termeni din dezvoltarea în serie după puterile lui h ale funcțiilor $y_k(x + \lambda_i h)$, adică se cunoaște polinomul

$$y_k(x) + \frac{\lambda_i h}{1!} y'_k(x) + \dots + \frac{(\lambda_i h)^p}{p!} y_k^{(p)}(x),$$

pe care îl vom nota mai scurt cu $y_k(x) + a_k(\lambda_i)$, atunci funcția de h

$$M_j(h) = y_j(x) + \sum_{i=1}^r A_i f_j[x + \lambda_i h, y_1 + a_1(\lambda_i), y_2 + a_2(\lambda_i), \dots, y_n + a_n(\lambda_i)] \quad (9)$$

dezvoltată după puterile lui h , are primii $p + 2$ termeni identici cu primii $p + 2$ termeni din dezvoltarea după puterile lui h , a funcției $y_j(x + h)$, adică avem

$$M_j(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y'_j(x) + \dots + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y_j^{(p+1)}(x) + \dots, \quad (9')$$

unde termenii nescrise nu mai coincid cu termenii corespunzători din dezvoltarea lui $y_j(x + h)$ după puterile lui h .

Rămîne acum să arătăm cum se construiesc, din aproape în aproape, funcțiile $M_j(h)$, alegînd convenabil formulele de cvadratură (5).

4. La sistemul de ecuații diferențiale (1) să atașăm formula de cvadratură

$$\int_x^{x+h} \varphi(s) ds = h \varphi(x) + R(h), \quad (10)$$

unde $R(h) = 0$, cînd $\varphi(x)$ este un polinom de gradul zero, iar $R(h)$ dezvoltat după puterile lui h , începe cu un termen în h^2 . Să înlocuim pe $\varphi(s)$ cu $y'_j(s)$ și să ținem seama de sistemul de ecuații diferențiale (1). Vom obține

$$y_j(x + h) = y_j(x) + h f_j(x, y_1, \dots, y_n) + R_j(h).$$

Deci, punînd

$$m_j = h f_j(x, y_1, \dots, y_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

funcția de h

$$M_j^{(1)}(h) = y_j(x) + m_j \quad (12)$$

se mai scrie

$$M_j^{(1)}(h) = y_j(x) + h y'_j(x) \quad (12')$$

și ne dă primii doi termeni ai dezvoltării lui $y_j(x + h)$ după puterile lui h .

Înlocuind în $M_j^{(1)}(h)$ pe h cu μh , unde μ este un factor independent de h , avem

$$M_j^{(1)}(\mu h) = y_j(x) + \mu m_j \quad (13)$$

și această formulă dă

$$M_j^{(1)}(\mu h) = y_j(x) + \mu h y'_j(x). \quad (13')$$

Vom nota cu P_1 procedeul dat mai sus pentru a se obține formula (12), (12'), (13) și (13').

5. La sistemul de ecuații diferențiale (1), să atașăm formula de cvadratură

$$\int_x^{x+h} \varphi(s) ds = \frac{h}{2} \left[\varphi(x) + \varphi(x+h) \right] + R(h), \quad (14)$$

unde $R(h) = 0$, când $\varphi(s)$ este înlocuit cu un polinom oarecare de gradul întâi, iar $R(h)$ dezvoltat în serii după puterile lui h , începe cu un termen în h^3 .

Înlocuind pe $\varphi(s)$ cu $y_j'(s)$ și ținând seama de sistemul de ecuații diferențiale (1), vom avea

$$y_j(x+h) = y_j(x) + \frac{h}{2} [f_j(x, y_1, \dots, y_n) + f_j(x+h, y_1(x+h), \dots, y_n(x+h))] + R_j(h).$$

Procedeul P_1 ne dă prin formula (13) primii doi termeni ai dezvoltării lui $y_j(x + \lambda h)$ după puterile lui λh . Atunci, conform teoremei de la punctul 3, punînd

$$m_j^{(1)}(\lambda, h) = hf_j(x + \lambda h, y_1 + \lambda m_1, \dots, y_n + \lambda m_n), \quad (15)$$

funcția de h

$$M_j^{(2)}(h) = y_j(x) + \frac{m_j^{(1)}(0, h) + m_j^{(1)}(1, h)}{2} \quad (16)$$

dezvoltată după puterile lui h

$$m_j^{(2)}(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \dots \quad (16')$$

dă primii trei termeni ai dezvoltării lui $y_j(x+h)$ după puterile lui h . Să observăm că avem

$$m_j^{(1)}(\lambda, \mu h) = \mu m_j^{(1)}(\lambda, \mu, h), \quad (17)$$

de unde rezultă că

$$M_j^{(2)}(\mu h) = y_j(x) + \mu \frac{m_j^{(1)}(0, h) + m_j^{(1)}(\mu, h)}{2} \quad (18)$$

și este evident că avem

$$M_j^{(2)}(\mu h) = y_j(x) + \frac{\mu h}{1!} y_j'(x) + \frac{(\mu h)^2}{2!} y_j''(x) + \dots \quad (18')$$

Vom nota cu P_2 acest procedeu, care ne-a dat formulele (16), (16') precum și (18), (18').

6. La sistemul de ecuații diferențiale (1) să atașăm formula de cvadratură

$$\int_x^{x+h} \varphi(s) ds = \frac{h}{4} \left[\varphi(x) + 3 \varphi\left(x + \frac{2h}{3}\right) \right] + R(h), \quad (19)$$

unde $R(h) = 0$, cînd $\varphi(s)$ este un polinom oarecare de gradul al doilea, iar $R(h)$ dezvoltat în serie după puterile lui h , începe cu un termen în h . Înlocuind pe $\varphi(s)$ cu $y_j'(s)$ și ținînd seama de sistemul de ecuații diferențiale, vom avea

$$y_j(x+h) = y_j(x) + \frac{h}{4} \left\{ f(x, y_1, \dots, y_n) + 3f\left[x + \frac{2h}{3}, y_1\left(x + \frac{2h}{3}\right), \dots, y_n\left(x + \frac{2h}{3}\right)\right] \right\} + R_j(h).$$

Procedeul P_2 ne dă primii trei termeni din dezvoltarea lui $y_j(x + \mu h)$, după puterile lui μh . Atunci, aplicînd aceeași metodă ca mai sus, să notăm

$$a_j(h, \lambda) = \lambda \frac{m_j^{(1)}(0, h) + m_j^{(1)}(\lambda, h)}{2} \quad (20)$$

și să calculăm

$$m_j^{(2)}(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + a_1(\lambda, h), \dots, y_n + a_n(\lambda, h)]. \quad (21)$$

Funcția de h

$$M_j^{(3)}(h) = y_j(x) + \frac{m_j^{(2)}(0, h) + 3m_j^{(2)}\left(\frac{2}{3}, h\right)}{2}, \quad (22)$$

dezvoltată după puterile lui h

$$M_j^{(3)}(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \frac{h^3}{3!} y_j'''(x) + \dots, \quad (22')$$

dă primii patru termeni ai dezvoltării lui $y_j(x + h)$ după puterile lui h .

Să observăm din formulele (20) și (17) că

$$a_j(\lambda, \mu h) = a_j(\lambda \mu, h),$$

de unde rezultă că

$$m_j^{(2)}(\lambda, \mu h) = \mu m_j^{(2)}(\lambda \mu, h). \quad (23)$$

Deducem atunci că

$$M_j^{(3)}(\mu h) = y_j(x) + \mu \frac{m_j^{(2)}(0, h) + 3m_j^{(2)}\left(\frac{2\mu}{3}, h\right)}{4} \quad (24)$$

și este evident că avem

$$M_j^{(3)}(\mu h) = y_j(x) + \frac{\mu h}{1!} y_j'(x) + \frac{(\mu h)^2}{2!} y_j''(x) + \frac{(\mu h)^3}{3!} y_j'''(x) + \dots \quad (24')$$

Procedeul de a se ajunge la formulele (22), (22') și (24), (24') va fi notat cu P_3 .

7. La sistemul de ecuații diferențiale (1) să atașăm formula de cuadratură

$$\int_x^{x+h} \varphi(s) ds = \frac{h}{6} \left[\varphi(x) + 4\varphi\left(x + \frac{h}{2}\right) + \varphi(x+h) \right] + R(h), \quad (25)$$

unde $R(h) = 0$, cînd $\varphi(s)$ este un polinom oarecare de gradul al treilea, iar $R(h)$ dezvoltat în serie după puterile lui h , începe cu un termen în h^5 . Dacă înlocuim pe $\varphi(s)$ cu $y'(s)$ și ținem seama de sistemul de ecuații diferențiale (1), vom avea

$$y_j(x+h) = y_j(x) + \frac{h}{6} \left\{ f_j(x, y_1, \dots, y_n) + 4 f_j\left(x + \frac{h}{2}, y_1\left(x + \frac{h}{2}\right), \dots, \dots, y_n\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) + f_j\left[x+h, y_1(x+h), \dots, y_n(x+h)\right] \right\} + R_j(h).$$

Procedeu P_3 ne dă primii patru termeni din dezvoltarea lui $y_j(x+h)$ după puterile lui μh . Procedînd ca mai sus să punem

$$b_j(\lambda, h) = \lambda \frac{m_j^{(2)}(0, h) + 3 m_j^{(2)}\left(\frac{2\lambda}{3}, h\right)}{4} \quad (26)$$

și să calculăm

$$m_j^{(3)}(\lambda, h) = h f_j[x + \lambda h, y_1 + b_1(\lambda, h), \dots, y_n + b_n(\lambda, h)]. \quad (27)$$

Funcția de h

$$M_j^{(4)}(h) = y_j(x) + \frac{m_j^{(3)}(0, h) + 4 m_j^{(3)}\left(\frac{1}{2}, h\right) + m_j^{(3)}(1, h)}{6}, \quad (28)$$

dezvoltată după puterile lui h

$$M_j^{(4)}(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \frac{h^3}{3!} y_j'''(x) + \frac{h^4}{4!} y_j^{(4)}(x) + \dots, \quad (28')$$

dă primii *cinci* termeni ai dezvoltării lui $y_j(x+h)$, după puterile lui h .

Să observăm din formulele (26) și (23) că

$$b_j(\lambda, \mu h) = b_j(\lambda \mu, h),$$

atunci formula (27) arată că

$$m_j^{(3)}(\lambda, \mu h) = \mu m_j^{(3)}(\lambda \mu, h). \quad (29)$$

Din formula (28) rezultă că

$$M_j^{(4)}(\mu h) = y_j(x) + \mu \frac{m_j^{(3)}(0, h) + 4 m_j^{(3)}\left(\frac{\mu}{2}, h\right) + m_j^{(3)}(\mu, h)}{6} \quad (30)$$

și vom avea

$$\begin{aligned} M_j^{(4)}(\mu h) = y_j(x) + \frac{\mu h}{1!} y_j'(x) + \frac{(\mu h)^2}{2!} y_j''(x) + \frac{(\mu h)^3}{3!} y_j'''(x) + \\ + \frac{(\mu h)^4}{4!} y_j^{(4)}(x) + \dots \end{aligned} \quad (30')$$

Vom nota cu P_4 procedeu care dă formulele (28), (28') și (30), (30').

8. Pentru a ajunge la formule de tipuri (28), (28') putem folosi chiar *formulele lui Runge* (3), (3'), (3''). Părăsind pentru un moment notațiile precedente, să notăm

$$\begin{aligned} p_j(h) &= hf_j(x, y_1, \dots, y_n), \\ q_j(\lambda, h) &= hf_j \left[x + \frac{\lambda h}{2}, y_1 + \frac{\lambda p_1(h)}{2}, \dots, y_n + \frac{\lambda p_n(h)}{2} \right], \\ r_j(\lambda, h) &= hf_j [x + \lambda h, y_1 + \lambda p_1(h), \dots, y_n + \lambda p_n(\lambda)], \\ s_j(\lambda, h) &= hf_j [x + \lambda h, y_1 + r_1(\lambda, h), \dots, y_n + \lambda r_n(\lambda, h)]. \end{aligned}$$

Atunci, conform procedurii lui Runge, funcția de h

$$t_j(\lambda, h) = y_j(x) + \lambda \frac{p_j(h) + 4q_j(\lambda, h) + s_j(\lambda, h)}{6}$$

dezvoltată după puterile lui h , dă

$$t_j(\lambda, h) = y_j(x) + \frac{(\lambda h)}{1!} y_j'(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y_j''(x) + \frac{(\lambda h)^3}{3!} y_j'''(x) + \dots$$

Punînd atunci

$$\alpha_j(\lambda, h) = \lambda \frac{p_j(h) + 4q_j(\lambda, h) + s_j(\lambda, h)}{6},$$

să calculăm

$$\mu_j(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + \alpha_1(\lambda, h), \dots, y_n + \alpha_n(\lambda, h)]$$

și aplicînd teorema de la punctul 3, funcția de h

$$M_j(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \frac{h^3}{3!} y_j'''(x) + \frac{h^4}{4!} y_j^{(4)}(x) + \dots$$

dezvoltată, după puterile lui h , ne va da

$$M_j(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \frac{h^3}{3!} y_j'''(x) + \frac{h^4}{4!} y_j^{(4)}(x) + \dots,$$

adică primii *cinci* termeni din dezvoltarea lui $y_k(x+h)$ după puterile lui h .

9. Revenind la metoda generală, la sistemul de ecuații diferențiale (1), să atașăm formula de cvadratură

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} \varphi(s) ds &= \frac{h}{36} \left\{ 4 \varphi(x) + (16 + \sqrt{6}) \varphi \left(x + \frac{6 - \sqrt{6}}{10} h \right) + \right. \\ &\quad \left. + (16 - \sqrt{6}) \varphi \left(x + \frac{6 + \sqrt{6}}{10} h \right) \right\} + R(h), \end{aligned} \quad (31)$$

unde $R(h) = 0$, cînd $\varphi(x)$ este un polinom oarecare de gradul patru, iar $R(h)$ dezvoltată după puterile lui h , începe cu un termen în h^6 . Înlocuind pe $\varphi(s)$

cu $y_j(s)$ și ținînd seama de sistemul de ecuații diferențiale (1), vom avea

$$y_j(x+h) = y_j(x) + \frac{h}{36} \left\{ 4f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n) + (16 + \sqrt{6}) \right. \\ \left. f_j \left[x + \frac{6 - \sqrt{6}}{10} h, y_1 \left(x + \frac{6 - \sqrt{6}}{10} h \right), \dots, y_n \left(x + \frac{6 - \sqrt{6}}{10} h \right) \right] + \right. \\ \left. + (16 - \sqrt{6}) f_j \left[x + \frac{6 + \sqrt{6}}{10} h, y_1 \left(x + \frac{6 + \sqrt{6}}{10} h \right), \dots, y_n \left(x + \frac{6 + \sqrt{6}}{10} h \right) \right] \right\} + R_j(h).$$

Procedeul P_4 ne dă primii cinci termeni de dezvoltare a lui $y_j(c + \mu h)$ după puterile lui μh . Procedînd ca la punctul 7 să notăm

$$C_j(\lambda, h) = \lambda \frac{m_j^{(3)}(0, h) + 4 m_j^{(3)}\left(\frac{\lambda}{2}, h\right) + m_j^{(3)}(\lambda, h)}{6} \quad (32)$$

și să calculăm

$$m_j^{(4)}(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + c_1(\lambda, h), \dots, y_n + c_n(\lambda, h)]. \quad (33)$$

Funcția de h

$$M_j^{(5)}(h) = y_j(x) + \frac{4m_j^{(4)}(0, h) + (16 + \sqrt{6})m_j^{(4)}\left(\frac{6 - \sqrt{6}}{10}, h\right) + (16 - \sqrt{6})m_j^{(4)}\left(\frac{6 + \sqrt{6}}{10}, h\right)}{36} \quad (34)$$

dezvoltată după puterile lui h , se scrie

$$M_j^{(5)}(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \frac{h^3}{3!} y_j'''(x) + \\ + \frac{h^4}{4!} y_j^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} y_j^{(5)}(x) + \dots, \quad (34')$$

adică primii șase termeni ai dezvoltării lui $y(x+h)$ după puterile lui h .

Observăm că din formulele (32), (29) rezultă

$$C_j(\lambda, \mu h) = C_j(\lambda \mu, h),$$

iar din formula (33) deducem că

$$m_j^{(4)}(\lambda, \mu h) = \mu m_j^{(4)}(\lambda \mu, h). \quad (35)$$

Atunci, formula (34) ne arată că

$$M_j^{(5)}(\mu h) = y_j(x) + \mu \frac{4m_j^{(4)}(0, h) + (16 + \sqrt{6})m_j^{(4)}\left(\frac{6 - \sqrt{6}}{10}, h\right)}{36} + \\ + \frac{(16 - \sqrt{6})m_j^{(4)}\left(\frac{6 + \sqrt{6}}{10}, h\right)}{36} \quad (36)$$

și această funcție, dezvoltată după puterile lui h , se scrie

$$\begin{aligned} M_j^{(5)}(\mu, h) = & y_j(x) + \frac{\mu h}{1!} y_j'(x) + \frac{(\mu h)^2}{2!} y_j''(x) + \frac{(\mu h)^3}{3!} y_j'''(x) + \\ & + \frac{(\mu h)^4}{4!} y_j^{(4)}(x) + \frac{(\mu h)^5}{5!} y_j^{(5)}(x) + \dots \end{aligned} \quad (36')$$

Notăm cu P_5 procedeul care a dat formulele (34), (34') și (36), (36').

Am arătat mai sus procedeele $P_1, \dots, P_5$, ce permit să se construiască funcțiile $M_j^{(1)}(h), \dots, M_j^{(5)}(h)$, care dezvoltate după puterile lui h , dau primii 2, ..., 6 termeni din dezvoltarea lui $y_j(x+h)$ după puterile lui h .

Este important de semnalat procedeul P_5 , pentru că el permite să se treacă peste dezvoltarea pe care o oferă procedeul lui Kutta. Și evident, din aproape în aproape, se pot continua procedeele precedente oricât de departe voim.

10. Procedeul P_5 folosește formula de cvadratură (31) cu un număr minim de noduri, însă are dezavantajul că nodurile și coeficienții sint numere iraționale. Se poate aplica și altă formulă de cvadratură, de exemplu, următoarea formulă

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} \varphi(s) ds = & \frac{h}{720} \left\{ 251 \varphi(x) + 646 \varphi(x+h) - 264 \varphi(x+2h) + \right. \\ & \left. + 106 \varphi(x+3h) - 19 \varphi(x+4h) \right\} + R_1(h), \end{aligned}$$

care utilizează noduri exterioare la dreapta în progresie aritmetică cu rația lui h [4]. În această formulă $R(h) = 0$, cînd $\varphi(s)$ este un polinom oarecare de gradul patru și $R(h)$ dezvoltat în serie după puterile lui h , începe cu un termen în h^6 .

Pentru a scurta calculele este util să se folosească formula precedentă, combinată cu procedeul lui Kutta.

Părăsind notațiile generale precedente, să notăm ca la punctul 8

$$\begin{aligned} p_j(h) &= hf_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ q_j(\lambda, h) &= hf_j \left[x + \frac{\lambda h}{2}, y_1 + \frac{\lambda p_1(h)}{2}, \dots, y_n + \frac{\lambda p_n(h)}{2} \right], \\ r_j(\lambda, h) &= hf_j \left[x + \frac{\lambda h}{2}, y_1 + \frac{\lambda q_1(\lambda, h)}{2}, \dots, y_n + \frac{\lambda q_n(\lambda, h)}{2} \right], \\ s_j(\lambda, h) &= hf_j[x + \lambda h, y_1 + \lambda r_1(\lambda, h), \dots, y_n + \lambda r_n(\lambda, h)]. \end{aligned}$$

Conform procedeului lui Kutta, funcția de h

$$l_j(\lambda, h) = y_j(x) + \lambda \frac{p_j(h) + 2q_j(\lambda, h) + 2r_j(\lambda, h) + s_j(\lambda, h)}{6},$$

dezvoltată după puterile lui h , se scrie

$$l_j(\lambda, h) = y_j(x) + \frac{\lambda h}{1!} y_j'(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y_j''(x) + \frac{(\lambda h)^3}{3!} y_j'''(x) + \frac{(\lambda h)^4}{4!} y_j^{(4)}(x) + \dots$$

Aplicînd teorema de la punctul 3, să punem

$$\beta_j(\lambda, h) = \lambda \frac{p_j(\lambda) + 2q_j(\lambda, h) + 2r_j(\lambda, h) + s_j(\lambda, h)}{6}$$

și să calculăm

$$\mu_j(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + \beta_1(\lambda, h), \dots, y_n + \beta_n(\lambda, h)].$$

Funcția de h

$$M_j(\lambda) = y_j(x) + \frac{251 \mu_f(0, h) + 646 \mu_f(1, h) - 264 \mu_j(2, h) + 106 \mu_j(3, h) - 19 \mu_j(4, h)}{720}$$

dezvoltată după puterile lui h , ne va da

$$M_j(\lambda) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \frac{h^3}{3!} y_j'''(x) + \frac{h^4}{4!} y_j^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} y_j^{(5)}(x) + \dots$$

adică primii șase termeni din dezvoltarea lui $y_j(x + h)$ după puterile lui h .

11. Încheiem acest paragraf dînd schemele de calcul așa cum rezultă din considerațiile precedente, mărginindu-ne la procedeele $p_1, \dots, p_5$. Sistemul de ecuații diferențiale este

$$y_j' = f_j(x, y_1, \dots, y_n), \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

1° Se calculează

$$m_j = hf_j(x, y_1, \dots, y_n),$$

$$M_j^{(1)}(h) = y_j(x) + m_j.$$

Avem

$$M_j^{(1)}(h) = y_j(x) + hy_j'(x)$$

2° Se calculează

$$m_j = hf_j(x, y_1, \dots, y_n),$$

$$m_j^{(1)}(\lambda, h) = hf[x + \lambda h, y_1 + \lambda m_1, \dots, y_n + \lambda m_n],$$

$$M_j^{(1)}(h) = y_j(x) + \frac{m_j^{(1)}(0, h) + m_j^{(1)}(1, h)}{2}.$$

Avem

$$M_j^{(2)}(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \dots$$

3° Se calculează

$$m_j = hf_j(x_1, y_1, \dots, y_n),$$

$$m_j^{(1)}(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y + \lambda m_1, \dots, y_n + \lambda m_n],$$

$$a_j(\lambda, h) = \lambda \frac{m_j^{(1)}(0, h) + m_j^{(1)}(\lambda, h)}{2}$$

$$m_j^{(2)}(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + a_1(\lambda, h), \dots, y_n + a_n(\lambda, h)],$$

$$M_j^{(3)}(\lambda, h) = y_j(x) + \frac{m_j^{(2)}(0, h) + 3m_j^{(2)}\left(\frac{2}{3}, h\right)}{4}.$$

Avem

$$M_j^{(3)}(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \frac{h^3}{3!} y_j'''(x) + \dots$$

4° Se calculează

$$m_j = hf_j(x, y_1, \dots, y_n),$$

$$m_j^{(1)}(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + \lambda m_1, \dots, y_n + \lambda m_n];$$

$$a_j(\lambda, h) = \lambda \frac{m_j^{(1)}(0, h) + m_j^{(1)}(\lambda, h)}{2},$$

$$m_j^{(2)}(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + a_1(\lambda, h), \dots, y_n + a_n(\lambda, h)],$$

$$b_j(\lambda, h) = \lambda \frac{m_j^{(2)}(0, h) + 3 m_j^{(2)}\left(\frac{2\lambda}{3}, h\right)}{4}$$

$$m_j^{(3)}(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + b_1(\lambda, h), \dots, y_n + b_n(\lambda, h)],$$

$$M_j^{(4)}(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \frac{h^3}{3!} y_j'''(x) + \frac{h^4}{4!} y_j^{(4)}(x) + \dots$$

Avem

$$M_j^{(4)}(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \frac{h^3}{3!} y_j'''(x) + \dots + \frac{h^4}{4!} y_j^{(4)}(x) + \dots$$

5° Se calculează

$$\lambda_1 = \frac{6 - \sqrt{6}}{10} = 0,355051025 \dots; A_1 = 16 + \sqrt{6} = 18,44948974 \dots,$$

$$\lambda_2 = \frac{6 + \sqrt{6}}{10} = 0,844948974 \dots; A_2 = 16 - \sqrt{6} = 13,55051025 \dots,$$

$$m_j = hf_j(x, y_1, \dots, y_n),$$

$$m_j^{(1)}(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + \lambda m_1, \dots, y_n + \lambda m_n];$$

$$a_j(\lambda, h) = \frac{m_j^{(1)}(0, h) + m_j^{(1)}(\lambda, h)}{2}$$

$$m_j^{(2)}(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + a_1(\lambda, h), \dots, y_n + a_n(\lambda, h)];$$

$$b_j(\lambda, h) = \lambda \frac{m_j^{(2)}(0, h) + 3 m_j^{(2)}\left(\frac{\lambda}{2}, h\right)}{4},$$

$$m_j^{(3)}(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + b_1(\lambda, h), \dots, y_n + b_n(\lambda, h)];$$

$$c_j(\lambda, h) = \lambda \frac{m_j^{(3)}(0, h) + 4 m_j^{(3)}\left(\frac{\lambda}{2}, h\right) + m_j^{(3)}(\lambda, h)}{6},$$

$$m_j^{(4)}(\lambda, h) = hf_j[x + \lambda h, y_1 + c_1(\lambda, h), \dots, y_n + c_n(\lambda, h)],$$

$$M_j^{(5)}(h) = y_j(x) + \frac{4m_j^{(4)}(0, h) + A_1 m_j^{(4)}(\lambda_1, h) + A_2 m_j^{(4)}(\lambda_2, h)}{36}.$$

Avem

$$M_j^{(5)}(h) = y_j(x) + \frac{h}{1!} y_j'(x) + \frac{h^2}{2!} y_j''(x) + \frac{h^3}{3!} y_j'''(x) + \frac{h^4}{4!} y_j^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} y_j^{(5)}(x) + \dots$$

6° Procedeeul precedent poate fi înlocuit cu următorul.

Se calculează

$$p_j(h) = hf_j(x, y_1, \dots, y_n),$$

$$q_j(\lambda, h) = hf_j \left[x + \frac{\lambda h}{2}, y_1 + \frac{\lambda p_1(h)}{2}, \dots, y_n + \frac{\lambda p_n(h)}{2} \right]$$

$$r(\lambda, h) = hf_j \left[x + \lambda h, y_1 + \frac{\lambda q_1(\lambda, h)}{2}, \dots, y_n + \frac{\lambda q_n(\lambda, h)}{2} \right],$$

$$s_j(\lambda, h) = hf_j [x + \lambda h, y_1 + \lambda r_1(\lambda, h), \dots, y_n + \lambda r_n(\lambda, h)],$$

$$\mu_j(\lambda, h) = hf_j [x + \lambda h, y_1 + \beta_1(\lambda, h), \dots, y_n + \beta_n(\lambda, h)],$$

$$\beta_j(\lambda, h) = \lambda \frac{p_j(h) + 2q_j(\lambda, h) + 2r_j(\lambda, h) + s_j(\lambda, h)}{6},$$

$$M_j(h) = y_j(x) + \frac{251}{720} \mu_j(0, h) + \frac{646}{720} \mu_j(1, h) - \frac{264}{720} \mu_j(2, h) + \frac{106}{720} \mu_j(3, h) - \frac{19}{720} \mu_j(4, h)$$

Avem

$$M_f(h) = y_f(x) + \frac{h}{1!} y_f'(x) + \frac{h^2}{2!} y_f''(x) + \frac{h^3}{3!} y_f'''(x) + \frac{h^4}{4!} y_f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} y_f^{(5)}(x) + \dots$$

§ 2. Ecuații diferențiale de ordin superior

12. Să considerăm ecuația diferențială de ordinul n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

și să presupunem că sînt împlinite toate condițiile ca să existe o integrală $y(x)$, corespunzînd la condiții inițiale în punctul x_0 și care se dezvoltă împreună cu derivatele ei succesive $y^{(q)}(x)$, unde $q = 0, 1, \dots, n-1$, în serii întregi, după puterile lui $x - x_0$ convergente în intervalul $[x_0, x_0 + \rho]$. Fie x un punct din intervalul $[x_0, x_0 + \rho]$, unde valorile integralei și ale derivatelor ei succesive sînt $y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$. În punctul $x + h$ al intervalului $[x_0, x_0 + \rho]$ se poate calcula integrala și derivatele ei succesive prin dezvoltările în serie

$$y^{(q)}(x + h) = y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \dots, \quad (2)$$

unde $q = 0, 1, \dots, n-1$. Coeficienții din această serie se calculează cu ajutorul lui $y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ și al ecuației diferențiale (1) prin derivări succesive.

Prin procedeul lui Runge-Kutta [1] se pot construi funcții de h , pe care care le notăm cu $M_q^{(p)}(h)$, care dezvoltate în serii întregi după puterile lui h să dea primii $n-q+3$ termeni ai seriilor (2).

În această lucrare vom da un procedeu regulat pentru construirea funcțiilor $M_q^{(p)}(h)$, care dezvoltate în serii întregi după puterile lui h , să aibă primii $n-q-1+p$ termeni identici cu primii $n-q-1+p$ termeni ai dezvoltărilor (2), oricare ar fi numărul p .

Formula de integrare prin părți generalizate, arată că:

$$y^{(q)}(x+h) = y^{(q)}(x) + \frac{h}{1} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n)}(s) ds, \quad (3)$$

unde $q = 0, 1, \dots, n-1$. Această formulă pune în evidență integrala definită

$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \varphi(s) ds, \quad (4)$$

asupra căreia vom stabili teoreme analoge celor de la punctele 2 și 3.

13. Să considerăm formula de cvadratură

$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \varphi(s) ds = \sum_{i=1}^r A_i \varphi(x + \lambda_i h) + R(h), \quad (5)$$

unde $x + \lambda_i h$ sînt noduri date, $i = 1, 2, \dots, r$, iar coeficienții A_i se determină astfel ca restul $R(h)$ să fie nul cînd $\varphi(s)$ este un polinom oarecare de gradul $p \geq r-1$. Înlocuind pe $\varphi(s)$ cu $(s-x)^k$, unde $k = 0, 1, \dots, p$, vom obține

$$h^k \sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^k = \int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} (s-x)^k ds.$$

Însă avem

$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \frac{(s-x)^k}{k!} ds = \frac{h^{n-q+k}}{(n-q+k)!}$$

astfel că sistemul de ecuații liniare, care determină coeficienții A_i , este

$$\sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^k = k! \frac{h^{n-q}}{(n-q+k)!}, \quad (6)$$

unde $k = 0, 1, \dots, p$. De asemenea avem

$$\sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^{p+1} \neq (p+1)! \frac{h^{n-q}}{(n-q+p+1)!} \quad (7)$$

În formula de cvadratură (5), să înlocuim $\varphi(x)$ cu o funcție care se dezvoltă în serie întreagă după puterile lui $x - x_0$, convergentă în intervalul $[x_0, x_0 + \rho]$.

Punctele $x, x + h, x + \lambda_i h$ fiind situate în intervalul $[x_0, x_0 + \rho]$, să demonstrăm că restul $R(h)$ se dezvoltă într-o serie întreagă după puterile lui h , care începe cu un termen în $h^{n-q+p+1}$.

Într-adevăr, formula (5) se mai scrie

$$\int_0^h \frac{(h-t)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \varphi(x+t) dt = \sum_{i=1}^r A_i \varphi(x + \lambda_i h) + R(h).$$

Înlocuind

$$\varphi(x+t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \varphi^{(k)}(x)$$

și

$$\varphi(x + \lambda_i h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k h^k}{k!} \varphi^{(k)}(x)$$

vom avea

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_0^h \frac{(h-t)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \frac{t^k}{k!} dt - \frac{h^k}{k!} \sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^k \right] \varphi^{(k)}(x)$$

sau

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{k! h^{n-q}}{(n-q+k)!} - \sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^k \right] \frac{h^k}{k!} \varphi^{(k)}(x).$$

Ținând seama de ecuațiile (6), $R(h)$ se reduce la

$$R(h) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \left[\frac{k! h^{n-q}}{(n-q+k)!} - \sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^k \right] \frac{h^k}{k!} \varphi^{(k)}(x).$$

Notînd

$$B_k = \sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^k \quad (k = p+1, p+2, \dots)$$

să dovedim că

$$B_k = h^{n-q} b_k \quad (k = p+1, p+2, \dots),$$

unde b_k sînt coeficienți care depind numai de numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Este suficient pentru aceasta să se scrie ecuațiile

$$A_1 \lambda_1^{p-r+1} + A_2 \lambda_2^{p-r+1} + \dots + A_r \lambda_r^{p-r+1} = \frac{(p-r+1)! h^{n-q}}{(n-q+p-r+1)!},$$

.....

$$A_1 \lambda_1^p + A_2 \lambda_2^p + \dots + A_r \lambda_r^p = \frac{p! h^{n-q}}{(n-q+p)!},$$

$$A_1 \lambda_1^{p+1} + A_2 \lambda_2^{p+1} + \dots + A_r \lambda_r^{p+1} = B_{p+1},$$

Eliminînd pe $A_1 \lambda_1^{p-r+1}, \dots, A_r \lambda_r^{p-r+1}$ deducem cã

$$B_{p+1} = h^{n-q} \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots & 1 & \frac{(p-r+1)!}{(n-q+p-r+1)!} \\ \lambda_1 & \lambda_2 \dots & \lambda_r & \frac{(p-r+2)!}{(n-q+p-r+2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} \dots & \lambda_r^{r-1} & \frac{p!}{(n-q+p)!} \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r \dots & \lambda_r^r & 0 \end{vmatrix} = h^{n-q} b_{p+1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \dots & \lambda_r \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix}$$

În mod analog se arată cã

$$B_{p+2} = h^{n-q} b_{p+2}, \dots,$$

de unde rezultã cã

$$R(h) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \left[\frac{[k!]}{(n-q+k)!} - b_{p+1} \right] \frac{h^{n-q+k}}{k!} \varphi^{(k)}(x), \quad (8)$$

ceea ce dovedește cã $R(h)$ începe cu un termen în $h^{n-q+p+1}$, deoarece conform formulei (7), avem

$$\frac{(p+1)!}{(n-q+p+1)!} - b_{p+1} \neq 0.$$

14. În formula de cvadraturã (5) sã înlocuim $\varphi(x) = y^{(n)}(x)$ Ținînd seama de formula (3), vom avea

$$y^{(q)}(x+h) - y^{(q)}(x) - \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) - \dots - \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) \quad (9)$$

$$= \sum_{i=1}^r A_i y^{(n)}(x + \lambda_i h) + R(h).$$

Sã presupunem cã se cunoaște dezvoltarea lui $y^n(x + \lambda_i h)$ după puterile lui $\lambda_i h$, din care punem în evidență primii $p+1$ termeni

$$y^{(n)}(x + \lambda_i h) = y^{(n)}(x) + \frac{\lambda_i h}{1!} y^{(n+1)}(x) + \dots + \frac{(\lambda_i h)^p}{p!} y^{(n+p)}(x) + \rho_i(h).$$

Formula (9) devine

$$\begin{aligned} y^{(q)}(x+h) = & y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ & + \left(\sum_{i=1}^r A_i \right) y^{(n)}(x) + \left(\sum_{i=1}^r A_i \lambda_i \right) \frac{h}{1!} y^{(n+1)}(x) + \dots + \\ & + \left(\sum_{i=1}^r A_i \lambda_i^p \right) \frac{h^p}{p!} y^{(n+p)}(x) + R(h) + \sum_{i=1}^r A_i \rho_i(h) \end{aligned}$$

sau, ținînd seama de ecuațiile (6), vom avea

$$\begin{aligned} y^{(q)}(x+h) = & y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ & + \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q+1)!} y^{(n+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-p}}{(n-q+p)!} y^{(n+p)}(x) + \\ & + R(h) + \sum_{i=1}^r A_i \rho_i(h), \end{aligned}$$

unde termenii $R(h) + \sum_{i=1}^r A_i \rho_i(h)$ conțin puteri ale lui h de ordin $n-q+p+1$.

Din această formulă rezultă următoarea teoremă

Dacă se cunoaște dezvoltarea în serie întreagă după puterile lui h , a lui $y^{(h)}(x + \lambda_i h)$, unde $i = 1, 2, \dots, r$ pînă la termenul în h^p , atunci funcția de h

$$M_q(h) = y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^r A_i y^{(n)}(x + \lambda_i h)$$

dezvoltată după puterile lui h , are primii $n-q+p+1$ termeni identici cu primii $n-q+p+1$ termeni din dezvoltarea lui $y^{(q)}(x+h)$ după puterile lui h .

Să presupunem că $y(x)$ este integrala ecuației diferențiale (1). Avem $y^{(n)}(x + \lambda_i h) = f[x + \lambda_i h, y(x + \lambda_i h), y'(x + \lambda_i h), \dots, y^{(n-1)}(x + \lambda_i h)]$ și prin urmare, din teorema precedentă se deduce următoarea teoremă fundamentală.

Dacă se cunosc primii $n-q+p$ termeni din dezvoltarea în serie întreagă după puterile lui h , ale funcțiilor $y^{(q)}(x + \lambda_i h)$, adică polinomul

$$y^{(q)}(x) + \frac{\lambda_i h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{(\lambda_i h)^{n-q+p}}{(n-q+p)!} y^{(n+p)}(x),$$

pe care îl vom nota cu $y^q(x) + a_q(\lambda_i)$, atunci funcția de h

$$\begin{aligned} M_q(h) = & y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ & + \sum_{i=1}^r A_i f[x + \lambda_i h, y + a_0(\lambda_i), y' + a_1(\lambda_i), \dots, y^{n-1} + a_{n-1}(\lambda_i)], \end{aligned} \quad (10)$$

dezvoltată după puterile lui h , are primii $n - q + p + 1$ termeni identici cu primii $n - q + p + 1$ termeni din dezvoltarea după puterile lui h , a funcției $y^{(q)}(x + h)$, adică avem

$$M_q(h) = y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q+p}}{(n-q+p)!} y^{(n+p)}(x) + \dots,$$

unde termenii care urmează după $\frac{h^{n-q+p}}{(n-q+p)!} y^{(n+p)}(x)$ nu mai coincid cu termenii corespunzători din dezvoltarea lui $y^{(q)}(x + h)$ după puterile lui h .

Vom arăta, mai departe, cum se construiesc, din aproape în aproape, funcțiile $M_q(h)$, alegînd convenabil formulele de cvadratură (5).

15. La ecuația diferențială (1), să atașăm formulele de cvadratură

$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \varphi(s) ds = \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} \varphi(x) + R_q(h) \quad (q = 0, 1, \dots, n-1) \quad (11)$$

unde $R_q(h) = 0$ cînd $\varphi(x)$ este un polinom de gradul zero, iar $R_q(h)$ dezvoltat în serie după puterile lui h , începe cu un termen în h^{n-q+1} . Să înlocuim pe $\varphi(s)$ cu $y^{(n)}(s)$ și să ținem seama de ecuația diferențială (1). Vom obține

$$y^{(q)}(x+h) = y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + R_q(h).$$

De aici rezultă că, dacă punem

$$m = hf(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (12)$$

funcția de h

$$M_q^{(1)}(h) = (y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} m, \quad (13)$$

dezvoltată după puterile lui h , ne dă primii $n - q + 1$ termeni din dezvoltarea lui $y^{(q)}(x + h)$ după puterile lui h , adică

$$M_q^{(1)}(h) = y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \dots \quad (13')$$

Înlocuind pe h cu μh , unde μ este un factor independent de h , avem

$$M_q^{(1)}(\mu h) = y^{(q)}(x) + \frac{\mu h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \mu \frac{(\mu h)^{n-q}}{(n-q)!} m + \dots \quad (14)$$

și această formulă ne dă

$$M_q^{(1)}(\mu h) = y^{(q)}(x) + \frac{\mu h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{(\mu h)^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \dots \quad (14')$$

Vom nota cu P'_1 procedeul arătat mai sus pentru a obține formulele (13), (13') și (14), (14').

16. La ecuația diferențială (1), să atașăm formele de cvadratură

$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \varphi(s) ds = \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} \frac{[(n-q)\varphi(x) + \varphi(x+h)]}{n-q+1} + \\ + R(h), \quad (q = 0, 1, \dots, n-1), \quad (15)$$

unde $R(h) = 0$ când $\varphi(x)$ este un polinom oarecare de gradul întâi, iar $R(h)$, dezvoltat după puterile lui h , începe cu un termen în h^{n-q+2} .

Înlocuind formula de cvadratură

$$\varphi(s) = y^{(n)}(s) = f[s, y(s), y'(s), \dots, y^{(n-1)}(s)]$$

vom avea

$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n)}(s) ds = \frac{h^{n-q}}{(n-q+1)!} \{(n-q)f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) + \\ + f[x+h, y(x+h), \dots, y^{(n-1)}(x+h)]\} + R(h).$$

Procedeul P'_1 ne dă pe $y^{(q)}(x + \mu h)$ dezvoltat după puterile lui μh pînă la ordinul $n-q$. Atunci, conform teoremei de la punctul 14, formula de cvadratură (15) ne va da pe $y^{(q)}(x + h)$ dezvoltat după puterile lui h pînă la ordinul $n-q+1$.

Să punem

$$m_1(\lambda, h) = h f[x + \lambda h, y + \lambda h y', \dots, y^{(n-2)} + \lambda h y^{(n-1)}, y^{(n-1)} + \lambda m]. \quad (16)$$

Funcția de h

$$M_q^{(2)}(h) = y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} \frac{(n-q)m_1(0, h) + m_1(1, h)}{n-q-1}, \quad (17)$$

dezvoltată după puterile h , se scrie

$$M_q^{(2)}(h) = y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \frac{h^{n-q+1}}{(n-q+1)!} y^{(n+1)}(x) + \dots, \quad (17')$$

adică ne dă primii $n-q+2$ termeni ai dezvoltării lui $y^{(q)}(x+h)$ după puterile lui h .

Se observă că

$$m_1(\lambda, \mu h) = \mu m_1(\lambda^* \mu, h), \quad (18)$$

de unde rezultă că

$$\begin{aligned} M_q^{(2)}(\mu h) &= y^{(q)}(x) + \frac{(\mu h)}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ &+ \frac{(\mu h)^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \mu \frac{(\mu h)^{n-q+1}}{(n-q)!} \frac{(n-q) m_1(0, h) + m_1(\mu, h)}{(n-q+1)} \end{aligned} \quad (19)$$

și este evident că avem

$$\begin{aligned} M_q^{(2)}(\mu h) &= y^{(q)}(x) + \frac{(\mu h)}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ &+ \frac{(\mu h)^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n+1)}(x) + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Vom nota cu P'_2 procedeul care ne-a condus la formulele (17), (17') și (19), (19').

17. La ecuația diferențială (1), să atașăm formulele de cvadratură

$$\begin{aligned} \int_h^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \varphi(s) ds &= \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} \frac{(n-q)\varphi(x) + (n-q+2)\varphi\left(x + \frac{2h}{(n-q+2)}\right)}{2(n-q+1)} + \\ &+ R(h), \quad (q=0, 1, \dots, n-1), \end{aligned} \quad (20)$$

unde $R(h) = 0$ când $\varphi(s)$ este un polinom oarecare de gradul al doilea, iar $R(h)$ se dezvoltă în serie după puterile lui h , primul termen al dezvoltării fiind în h^{n-q+3} .

Înlocuind în formula de cvadratură (20) pe $\varphi(s)$ cu $y^{(n)}(x)$ și ținând seama de ecuația diferențială (1), vom avea

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n)}(s) ds &= \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} \frac{(n-q)f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) +}{2(n-q+1)} \\ &+ (n-q+2)f\left[x + \frac{2h}{n-q+2}, y\left(x + \frac{2h}{n-q+2}, \dots, y^{(n-1)}(x) + \frac{2h}{n-q+2}\right)\right] + R(h). \end{aligned}$$

Procedeul P'_2 ne dă pe $y^{(q)}(x + \mu h)$ dezvoltat după puterile lui μh pînă la ordinul $n-q+1$. Atunci, aplicînd formula de cvadratură (20), vom obține conform teoremei de la punctul 14 dezvoltarea lui $y^{(q)}(x + h)$ după puterile lui h , pînă la ordinul $n-q+2$.

Formulele (19), în care $q = 0, 1, \dots, n-1$ ne dau primii trei termeni din dezvoltarea lui $y(x + \mu h)$, $y'(x + \mu h)$, $\dots$, $y^{(n-1)}(x + \mu h)$ după puterile lui h .

Vom calcula

$$a_k(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y^{(k+1)}(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y^{(k+2)}(x), \quad (21)$$

pentru $k = 0, 1, \dots, n-3$, apoi

$$a_{n-2}(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y^{(n-1)}(x) + \lambda \frac{\lambda h}{2!} \frac{2m_1(0, h) + m_1(\lambda, h)}{3}$$

$$a_{n-1}(\lambda, h) = \frac{1}{1!} \frac{m_1(0, h) + m_1(\lambda, h)}{2}$$

și, în sfârșit,

$$m_2(\lambda, h) = hf[x + \lambda h, y(x) + a_0(\lambda h), y'(x) + a_1(\lambda h), \dots, y^{(n-1)}(x) + a_{n-1}(\lambda h)]. \quad (22)$$

Funcția de h

$$\begin{aligned} M_q^{(3)}(h) &= y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ &+ \frac{h^{n-q-1}}{(n-q)!} \frac{(n-q)m_2(0, h) + (n-q+2)m_2\left(\frac{2}{n-q+2}, h\right)}{2(n-q+1)}, \end{aligned} \quad (23)$$

dezvoltată după puterile lui h , se scrie

$$\begin{aligned} M_q^{(3)}(h) &= y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-2}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ &+ \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \frac{h^{n-q+1}}{(n-q+1)!} y^{(n+1)}(x) + \frac{h^{n-q+1}}{(n-q+2)!} y^{(n+2)}(x) + \dots, \end{aligned} \quad (23')$$

care ne dă primii $n-q+3$ termeni din dezvoltarea lui $y^{(q)}(x+h)$ după puterile lui h .

Se observă că

$$m_2(\lambda, \mu h) = \mu m_2(\lambda \mu, h), \quad (24)$$

de unde rezultă că

$$\begin{aligned} M_q^{(3)}(\mu h) &= y^{(q)}(x) + \frac{\mu h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ &+ \mu \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q)!} \frac{(n-q)m_2(0, h) + (n-q+2)m_2\left(\frac{2\mu}{n-q+2}, h\right)}{2(n-q+1)} \end{aligned} \quad (25)$$

și aceasta, dezvoltată după puterile lui μh , devine

$$\begin{aligned} M_q^{(3)}(\mu h) &= y^{(q)}(x) + \frac{\mu h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ &+ \frac{(\mu h)^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \frac{(\mu h)^{n-q+1}}{(n-q+1)!} y^{(n+1)}(x) + \frac{(\mu h)^{n-q+2}}{(n-q+2)!} y^{(n+2)}(x) + \dots, \end{aligned} \quad (25')$$

Vom nota cu P_3 procedeul care ne-a condus la formulele (23), (23') și (25), (25').

18. La ecuația diferențială (1) să atașăm formulele de cvadratură

$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \varphi(s) ds = \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} \frac{(n-q)(n-q+1)^2 \varphi(x)}{2(n-q+1)} +$$

$$+ \frac{(n-q)(n-q+3)^2 \varphi\left(x + \frac{2h}{n-q+3}\right) + 4 \varphi(x+h)}{2(n-q+2)} + R(h) \quad (26)$$

unde $R(h) = 0$ când $\varphi(s)$ este un polinom oarecare de gradul al treilea, iar $R(h)$ se dezvoltă în serie după puterile lui h , primul termen al dezvoltării fiind în h^{n-q+4} .

Înlocuind pe $\varphi(s)$ cu $y^{(n)}(s)$ și ținând seama de ecuația diferențială (1), vom avea

$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n)}(s) ds = \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} \frac{1}{2(n-q+1)^2(n-q+2)}$$

$$\left\{ (n-q)(n-q-1)^2 f(x, y', \dots, y^{(n-1)}) + (n-q)(n-q+3)^2 f\left[x + \frac{2h}{n-q+3}, y\left(x + \frac{2h}{n-q+3}\right), \dots, y^{(n-1)}\left(x + \frac{2h}{n-q+3}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + 4 f\left[x+h, y(x+h), \dots, y^{(n-1)}(x+h)\right] \right\} + R(h).$$

Procedeul P'_3 ne dă pe $y^{(n)}(x + \mu h)$ dezvoltat după puterile lui μh pînă la ordinul $n-q+2$. Atunci, aplicînd metoda generală, formula (26) ne va permite să obținem dezvoltarea lui $y^{(n)}(x+h)$ pînă la ordinul $n-q+3$.

Ținînd seama de formulele (25), să punem

$$b_k(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y^{(k+1)}(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y^{(k+2)}(x) + \frac{(\lambda h)^3}{3!} y^{(k+3)}(x) \quad (27)$$

pentru $k = 0, 1, \dots, n-4$, apoi

$$b_{n-3}(\lambda, h) = \frac{h}{1!} y^{(n-2)}(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y^{(n-1)}(x) + \lambda \frac{(\lambda h)^2}{3} \frac{3m_0(0, h) + 5m_2\left(\frac{2\lambda}{5}, h\right)}{8}, \quad (27')$$

$$b_{n-2}(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y^{(n-1)}(x) + \lambda \frac{(\lambda h)}{2!} \frac{2m_2(0, h) + 4m_2\left(\frac{2\lambda}{4}, h\right)}{6},$$

$$b_{n-1}(\lambda, h) = \lambda \frac{1}{1!} \frac{m_2(0, h) + 3m_2\left(\frac{2\lambda}{3}, h\right)}{4}.$$

După formulele (25') avem

$$y^k(x) + b_k(\lambda, h) = y^{(k)}(x) + \frac{\lambda h}{1!} y^{(k+1)}(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y^{(k+2)}(x) + \frac{(\lambda h)^3}{3!} y^{(k+3)}(x) + \dots$$

pentru $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Se calculează

$$m_3(\lambda, h) - h f[x + \lambda h, y(x) + b_0(\lambda h), y'(x) + b_1(\lambda h), \dots, y^{n-1}(x) + b_{n-1}(\lambda, h)] \quad (28)$$

și aplicind teorema de la punctul 14, se formează funcția de h

$$M_q^{(4)}(h) = y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q)!} \frac{(n-q)(n-q+1)^2 m_3(o, h) + (n-q)(n-q+3)^2 m_3\left(\frac{2}{n-q+3}, h\right) + 4m_3(1, h)}{2(n-q+1)^2(n-q+2)} \quad (29)$$

și vom avea

$$M_q^{(4)}(h) = y^q(x) + \frac{h}{1} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{(n-q-1)}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) \\ + \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n+1)}(x) + \frac{h^{n-q+2}}{(n-q+2)!} y^{(n+2)}(x) + \\ + \frac{h^{n-q+3}}{(n-q+3)!} y^{(n+3)}(x) + \dots \quad (29')$$

adică ea dă primii $n - q + 4$ termeni din dezvoltarea lui $y^{(q)}(x+h)$ după puterile lui h .

Din formulele (28), (27) și (24) se observă că $m_3(\lambda, \mu h) = \mu m^3(\lambda, \mu, h)$. (30)

Înlocuind în $M_q^{(4)}(h)$ pe h cu μh vom obține

$$M_q^{(4)}(\mu h) = y^{(q)}(x) + \frac{\mu h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q)!} \frac{(n-q)(n-q+1)^2 m_3(o, h) + (n-q)(n-q+3)^2 m_3\left(\frac{2\mu}{n-q+3}, h\right) + 4m_3(\mu h)}{2(n-q+1)^2(n-q+2)} \quad (31)$$

și evident, dezvoltind în serie după puterile lui μh , avem

$$M_q^{(4)}(\mu h) = y^{(q)}(x) + \frac{\mu h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{(\mu h)^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \frac{(\mu h)^{(n-q+1)}}{(n-q+1)!} y^{(n+1)}(x) + \frac{(\mu h)^{n-q+2}}{(n-q+2)!} y^{(n+2)}(x) + \\ + \frac{(\mu h)^{(n-q+3)}}{(n-q+3)!} y^{(n+3)}(x) + \dots \quad (31')$$

Vom nota cu P'_4 procedeul arătat mai sus, pentru a se ajunge la formulele (29), (29') și (31), (31')

19. La ecuația diferențială (1) atașăm formula de cvadratură

$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \varphi(s) ds = \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} [A_0 \varphi(x) + A_1 \varphi(x + \lambda_1 h) + A_2 \varphi(x + \lambda_2 h)] + R(h), \quad (32)$$

unde

$$\lambda_1 = \frac{3(n-q+3) - \sqrt{3(n-q+1)(n-q+3)}}{(n-q+3)(n-q+4)} \quad (33)$$

$$\lambda_2 = \frac{3(n-q+3) + \sqrt{3(n-q+1)(n-q+3)}}{(n-q+3)(n-q+4)},$$

și

$$A_0 = \frac{n-q}{3(n-q+2)}$$

$$A_1 = \frac{2(n-q+1)^2(n-q+3) - [(n-q)^2 + 2(n-q) - 2]\sqrt{3(n-q+1)(n-q+3)}}{6(n-q+1)^2(n-q+2)} \quad (34)$$

$$A_2 = \frac{2(n-q+1)^2(n-q+3) + [(n-q)^2 + 2(n-q) - 2]\sqrt{3(n-q+1)(n-q+3)}}{6(n-q+1)^2(n-q+2)}$$

În formula (32) $R(h) = 0$ când $\varphi(s)$ este un polinom oarecare de gradul al patrulea, iar $R(h)$, dezvoltat după puterile lui h , începe cu un termen în h^{n-q+5}

Înlocuind pe $\varphi(s)$ cu $y^h(s)$ și ținând seama de ecuația diferențială (1) vom avea

$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \varphi(s) ds = \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} \{ A_0 f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + A_1 f[x + \lambda_1 h, y(x + \lambda_1 h), \dots, y^{(n-1)}(x + \lambda_1 h)] + A_2 f[x + \lambda_2 h, y(x + \lambda_2 h), \dots, y^{(n-1)}(x + \lambda_2 h)] \} + R(h).$$

Procedeul P'_4 ne dă pe $y^{(q)}(x + \mu h)$ dezvoltat după puterile lui h pînă la ordinul $n - q + 3$ prin formula (31). Atunci conform teoremei de la punctul 14 cu ajutorul formulei de cvadratură (32), vom obține dezvoltarea lui $y^{(q)}(x+h)$ după puterile lui h , pînă la ordinul $n - q + 4$.

Să punem

$$C_k(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y^{(k+1)}(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y^{(k+2)}(x) + \frac{(\lambda h)^3}{3!} y^{(k+3)}(x) + \frac{(\lambda h)^4}{4!} y^{(k+4)}(x) \quad (35)$$

pentru $k = 0, 1, \dots, n-5$, și

$$C_{n-4}(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y^{(n-3)}(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y^{(n-2)}(x) + \frac{(\lambda h)^3}{3!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \lambda \frac{(\lambda h)^3}{4!} \frac{25 m_3(0, h) + 49 m_3\left(\frac{2\lambda}{7}, h\right) + m_3(\lambda, h)}{75}, \quad (35')$$

$$C_{n-3}(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y^{(n-2)}(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \lambda \frac{(\lambda h)^2}{3!} \frac{12 m_3(0, h) + 27 m_3\left(\frac{2\lambda}{6}, h\right) + m_3(\lambda, h)}{40},$$

$$C_{n-2}(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y^{(n-1)}(x) + \lambda \frac{(\lambda h)}{2!} \frac{9 m_3(0, h) + 25 m_3\left(\frac{2\lambda}{5}, h\right) + 2 m_3(\lambda, h)}{45},$$

$$C_{n-1}(\lambda, h) = \lambda \frac{1}{1!} \frac{m_3(0, h) + 4 m_3\left(\frac{\lambda}{2}, \lambda\right) + m_3(\lambda, h)}{6}.$$

După formulele (31'), vom avea

$$y^{(n)}(x) + C_k(\lambda, h) = y^{(k)}(x) + \frac{\mu h}{1!} y^{(k+1)}(x) + \frac{(\mu h)^2}{3!} y^{(k+2)}(x) + \\ + \frac{(\mu h)^3}{3!} y^{(k+3)}(x) + \frac{(\mu h)^4}{4!} y^{(k+4)}(x) + \dots \quad (35'')$$

pentru $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Se calculează

$$m_4(\lambda, h) = h f[x + \lambda h, y(x) + C_0(\lambda, h), y'(x) + C_1(\lambda, h), \dots, y^{(n-1)}(x) + \\ + C_{n-1}(\lambda, h)]. \quad (36)$$

Conform teoremei de la punctul 14, se formează funcția de h

$$M_q^{(5)}(h) = y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q)!} [A_0 m_4(0, h) + A_1 m_4(\lambda_1, h) + A_2 m_4(\lambda_2, h)] \quad (37)$$

și vom avea

$$M_q^{(5)}(h) = y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q+1)!} y^{(n+1)}(x) + \frac{h^{n-q+2}}{(n-q+2)!} y^{(n+2)}(x) + \\ + \frac{h^{n-q+3}}{(n-q+3)!} y^{(n+3)}(x) + \frac{h^{n-q+4}}{(n-q+4)!} y^{(n+4)}(x) + \dots \quad (37')$$

Din formulele (36), (36'), (30) rezultă că

$$m_4(\lambda, \mu, h) = \mu m_4(\lambda, \mu, h) \quad (38)$$

astfel că înlocuind în formula (37) pe h cu μh , vom obține

$$\begin{aligned} M_q^{(5)}(\mu h) &= y^{(q)}(x) + \frac{\mu h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ &+ \mu \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q)!} [A_0 m_4(0, h) + A_1 m_4(\mu \lambda_1, h) + A_2 m_4(\mu \lambda_2, h)] \end{aligned} \quad (39)$$

și evident vom avea

$$\begin{aligned} M_q^{(5)}(\mu h) &= y^{(q)}(x) + \frac{\mu h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{(\mu h)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ &+ \frac{(\mu h)^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \frac{(\mu h)^{n-q+1}}{(n-q+1)!} y^{(n+1)}(x) + \frac{(\mu h)^{n-q+2}}{(n-q+2)!} y^{(n+2)}(x) + \\ &+ \frac{(\mu h)^{n-q+3}}{(n-q+3)!} y^{(n+3)}(x) + \frac{(\mu h)^{n-q+4}}{(n-q+4)!} y^{(n+4)}(x) + \dots \end{aligned} \quad (39')$$

Vom nota cu P'_5 procedeul care ne-a dat formulele (37), (37') și (39), (39')

20. Procedeul P'_5 dat la punctul precedent deși întrebunțează formula de cvadratură (32), cu un număr minim de noduri, are dezavantajul de a întrebunța în general, noduri iraționale și coeficienții A_1, A_2 iraționali. Putem remedia acest dezavantaj, luând o altă formulă de cvadratură în care $R(h) = 0$ când $\varphi(x)$ este un polinom oarecare de gradul patru. Să atașăm, de exemplu, la ecuația diferențială (1), formula de cvadratură cu noduri exterioare

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} \frac{(x+h-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \varphi(s) ds &= \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} [A_0 \varphi(x) + A_1 \varphi(x+h) + \\ &+ A_2 \varphi(x+2h) + A_3 \varphi(x+3h) + A_4 \varphi(x+4h)] + R(h), \end{aligned} \quad (40)$$

unde

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{(n-q)[12(n-q)^3 + 95(n-q)^2 + 230(n-q) + 168]}{12(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)(n-q+4)}, \\ A_1 &= \frac{12(n-q)^3 + 82(n-q)^2 + 157(n-q) + 72}{3(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)(n-q+4)}, \\ A_2 &= -\frac{(n-q)[6(n-q)^2 + 35(n-q) + 47]}{2(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)(n-q+4)}, \\ A_3 &= \frac{(n-q)[4(n-q)^2 + 22(n-q) + 27]}{3(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)(n-q+4)}; \\ A_4 &= -\frac{(n-q)[3(n-q)^2 + 16(n-q) + 19]}{12(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)(n-q+4)}. \end{aligned} \quad (41)$$

În formula (40) avem $R(h) = 0$ când $\varphi(s)$ este un polinom oarecare de gradul patru iar $R(h)$, dezvoltat în serie după puterile lui h , începe cu un termen în h^{n-q+5} .

Folosindu-ne de metoda de la punctul precedent și de formulele (35), (35'), (35''), (36) vom forma funcția de h

$$\begin{aligned} \overline{M}_q^{(5)}(h) = & y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ & + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q)!} [A_0 m_4(0, h) + A_1 m_4(1, h) + A_2 m_4(2, h) + A_3 m_4(3, h) + \\ & + A_4 m_4(4, h)] \end{aligned} \quad (42)$$

și vom avea

$$\begin{aligned} \overline{M}_q^{(5)}(h) = & y^{(q)}(x) + \frac{h}{1!} y^{(q+1)}(x) + \dots + \frac{h^{n-q-1}}{(n-q-1)!} y^{(n-1)}(x) + \\ & + \frac{h^{n-q}}{(n-q)!} y^{(n)}(x) + \frac{h^{n-q+1}}{(n-q+1)!} y^{(n+1)}(x) + \frac{h^{n-q+2}}{(n-q+2)!} y^{(n+2)}(x) + \\ & + \frac{h^{n-q+3}}{(n-q+3)!} y^{(n+3)}(x) + \frac{h^{n-q+4}}{(n-q+4)!} y^{(n+4)}(x) + \dots \end{aligned} \quad (42')$$

Observăm că procedeele P'_4 și P'_5 sînt importante pentru că prin ele se trece peste dezvoltarea dată de procedeul lui Runge-Kutta. Aceste procedee pot fi aplicate din aproape în aproape oricît de departe vom.

21. Vom încheia acest paragraf dînd schema de calcul pe un caz precis, așa cum ele rezultă din metoda de calcul expusă, de exemplu pentru ecuația diferențială

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

de ordinul $n = 3$.

1°. Se calculează

$$m = h f(x, y, y', y'')$$

$$M_0^{(1)}(h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} m,$$

$$M_1^{(1)}(h) = y'(x) + \frac{h}{1!} y''(x) + \frac{h^2}{2!} m,$$

$$M_2^{(1)}(h) = y''(x) + \frac{1}{1!} m.$$

Avem

$$M_0^{(1)}(h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x),$$

$$M_1^{(1)}(h) = y'(x) + \frac{h}{1!} y''(x) + \frac{h^2}{2!} y'''(x),$$

$$M_2^{(1)}(h) = y''(x) + \frac{h}{1!} y'''(x).$$

2°. Se calculează

$$\begin{aligned}
 m &= h(x, y, y', y''), \\
 m_1(\lambda, h) &= hf[x + \lambda h, y + \lambda hy', y' + \lambda hy'', y'' + \lambda m], \\
 M_0^2(h) &= y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^2}{3!} \frac{3m_1(0, h) + m_1(1, h)}{4}, \\
 M_1^{(2)}(h) &= y'(x) + \frac{h}{1!} y''(x) + \frac{h}{2!} \frac{2(m_1(0, h) + m_1(1, h))}{3}, \\
 M_2^{(2)}(h) &= y''(x) + \frac{1}{1!} \frac{m_1(0, h) + m_1(1, h)}{2}.
 \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned}
 M_0^{(2)}(h) &= y(x) + \frac{h}{1} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x) + \dots, \\
 M_1^{(2)}(h) &= y'(x) + \frac{h}{1} y''(x) + \frac{h^2}{2!} y'''(x) + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(x) + \dots, \\
 M_2^{(2)}(h) &= y''(x) + \frac{h}{1} y'''(x) + \frac{h^2}{2!} y^{(4)}(x) + \dots
 \end{aligned}$$

3°. Se calculează

$$\begin{aligned}
 m &= hf(x, y, y', y''), \\
 m_1(\lambda, h) &= hf(x + \lambda h, y + \lambda hy', y' + \lambda hy'', y'' + \lambda m), \\
 a_0(\lambda) &= \frac{\lambda h}{1!} y'(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y''(x), \\
 a_1(\lambda) &= \frac{\lambda h}{1!} y''(x) + \lambda \frac{\lambda h}{2!} \frac{2m_1(0, h) + m_1(\lambda, h)}{3}, \\
 a_2(\lambda) &= \lambda \frac{1}{1!} \frac{m_1(0, h) + m_1(\lambda, h)}{2}, \\
 m_2(\lambda, h) &= hf[x + \lambda h, y(x) + a_0(\lambda), y'(x) + a_1(\lambda), y''(x) + a_2(\lambda)], \\
 M_0^{(3)}(h) &= y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^2}{3!} \frac{3m_2(0, h) + 5m_2\left(\frac{2}{5}, h\right)}{8}, \\
 M_1^{(3)}(h) &= y'(x) + \frac{h}{1!} y''(x) + \frac{h}{2!} \frac{2m_2(0, h) + 4m_2\left(\frac{2}{4}, h\right)}{6}, \\
 M_2^{(3)}(h) &= y''(x) + \frac{1}{1!} \frac{m_2(0, h) + 3m_2\left(\frac{2}{3}, h\right)}{4}.
 \end{aligned}$$

Avem

$$M_0^{(3)}(h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(x) + \dots$$

$$M_1^{(3)}(h) = y'(x) + \frac{h}{1!} y''(x) + \frac{h^2}{2!} y'''(x) + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(5)}(x) + \dots$$

$$M_2^{(3)}(h) = y''(x) + \frac{h}{1!} y'''(x) + \frac{h^2}{2!} y^{(4)}(x) + \frac{h^3}{3!} y^{(5)}(x) + \dots$$

4°. Se calculează

$$m = h f(x, y, y', y''),$$

$$m_1(\lambda, h) = h f[x + \lambda h, y + \lambda h y', y' + \lambda h y'', y'' + \lambda m],$$

$$a_0(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y'(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y''(x),$$

$$a_1(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y''(x) + \lambda \frac{\lambda h}{2!} \frac{2 m_1(0, h) + m_1(\lambda, h)}{3},$$

$$a_2(\lambda, h) = \lambda \frac{1}{1!} \frac{m_1(0, h) + m_1(\lambda, h)}{2},$$

$$m_2(\lambda, h) = h f[x + \lambda h, y(x) + a_0(\lambda, h), y'(x) + a_1(\lambda, h), y''(x) + a_2(\lambda, h)]$$

$$b_0(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y'(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y''(x) + \lambda \frac{(\lambda h)^2}{3!} \frac{3 m_2(0, h) + 5 m_2\left(\frac{2\lambda}{5}, h\right)}{8},$$

$$b_1(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y''(x) + \lambda \frac{\lambda h}{2!} \frac{2 m_2(0, h) + 4 m_2\left(\frac{2\lambda}{5}, h\right)}{6},$$

$$b_2(\lambda, h) = \lambda \frac{1}{1!} \frac{m_2(0, h) + 3 m_2\left(\frac{2\lambda}{5}, h\right)}{4},$$

$$m_3(\lambda, h) = h f[x + \lambda h, y(x) + b_0(\lambda, h), y'(x) + b_1(\lambda, h), y''(x) + b_2(\lambda, h)],$$

$$M_0^{(4)}(h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} \frac{12 m_3(0, h) + 27 m_3\left(\frac{1}{3}, h\right) + m_3(1, h)}{40},$$

$$M_1^{(4)}(h) = y'(x) + \frac{h}{1!} y''(x) + \frac{h}{2!} \frac{9 m_3(0, h) + 25 m_3\left(\frac{2}{5}, h\right) + 2 m_3(1, h)}{36},$$

$$M_2^{(4)}(h) = y''(x) + \frac{1}{1!} \frac{m_3(0, h) + 4 m_3\left(\frac{1}{2}, h\right) + m_3(1, h)}{6},$$

Avem

$$M_0^{(4)}(h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x) + \\ + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(x) + \frac{h^6}{6!} y^{(6)}(x) + \dots$$

$$M_1^{(4)}(h) = y'(x) + \frac{h}{1!} y''(x) + \frac{h^2}{2!} y'''(x) + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(5)}(x) + \\ + \frac{h^5}{5!} y^{(6)}(x) + \dots$$

$$M_2^{(4)}(h) = y''(x) + \frac{h}{1!} y'''(x) + \frac{h^2}{2!} y^{(4)}(x) + \frac{h^3}{3!} y^{(5)}(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(6)}(x) + \dots$$

5° Se calculează

$$m = h f(x, y, y', y''),$$

$$m_1(\lambda, h) = h f[x + \lambda h, y + \lambda h y', y' + \lambda h y'', y'' + \lambda m],$$

$$a_0(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y'(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y''(x),$$

$$a_1(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y''(x) + \lambda \frac{\lambda h}{2!} \frac{2 m_1(0, h) + m_1(\lambda, h)}{3},$$

$$a_2(\lambda, h) = \lambda \frac{1}{1!} \frac{m_1(0, h) + m_1(\lambda, h)}{2}$$

$$m_2(\lambda, h) = h f[x + \lambda h, y(x) + a_0(\lambda, h), y'(x) + a_1(\lambda, h), y''(x) + a_2(\lambda, h)],$$

$$b_0(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y'(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y''(x) + \lambda \frac{(\lambda h)^2}{3!} \frac{3 m_2(0, h) + 5 m_2\left(\frac{2\lambda}{5}, h\right)}{8},$$

$$b_1(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y''(x) + \lambda \frac{\lambda h}{2!} \frac{2 m_2(0, h) + 4 m_2\left(\frac{2\lambda}{4}, h\right)}{6},$$

$$b_2(\lambda, h) = \lambda \frac{1}{1!} \frac{m_2(0, h) + 3 m_2\left(\frac{2\lambda}{3}, h\right)}{4},$$

$$m_3(\lambda, h) = h f[x + \lambda, h, y(x) + b_0(\lambda h), y'(x) + b_1(\lambda h), y''(x) + b_2(\lambda h)],$$

$$c_0(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y'(x) + \frac{(\lambda h)^2}{2!} y''(x) + \lambda \frac{(\lambda h)^2}{3!} \frac{12 m_3(0, h) + 27 m_3\left(\frac{h}{3}, h\right) + m_3(\lambda, h)}{40}$$

$$c_1(\lambda, h) = \frac{\lambda h}{1!} y''(x) + \lambda \frac{\lambda h}{2!} \frac{9 m_3(0, h) + 25 m_3\left(\frac{2\lambda}{5}, h\right) + 2 m_3(\lambda, h)}{45},$$

$$C_2(\lambda, h) = \lambda \frac{1}{1!} \frac{m_3(0, h) + 4 m_3\left(\frac{\lambda}{2}, h\right) + m_3(\lambda, h)}{6},$$

$$m_4(\lambda, h) = h f[x + \lambda h, y(x) + c_0(\lambda, h), y'(x) + c_1(\lambda, h), y''(x) + c_2(\lambda, h)],$$

$$M_0^{(5)}(h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \\ + \frac{h^3}{3!} \frac{1017 m_4(0, h) + 1070 m_4(1, h) - 618 m_4(2, h) + 258 m_4(3, h) - 47 m_4(4, h)}{1680}.$$

$$M_1^{(5)}(h) = y'(x) + \frac{h}{1!} y''(x) + \\ + \frac{h}{2!} \frac{367 m_4(0, h) + 540 m_4(1, h) - 282 m_4(2, h) + 116 m_4(3, h) - 21 m_4(4, h)}{720},$$

$$M_2^{(5)}(h) = y''(x) + \\ + \frac{1}{1!} \frac{251 m_4(0, h) + 646 m_4(1, h) - 264 m_4(2, h) + 106 m_4(3, h) - 19 m_4(4, h)}{720}.$$

Avem

$$M_0^{(5)}(h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x) + \\ + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(x) + \frac{h^6}{6!} y^{(6)}(x) + \frac{h^7}{7!} y^{(7)}(x) + \dots$$

$$M_1^{(5)}(h) = y'(x) + \frac{h}{1!} y''(x) + \frac{h^2}{2!} y'''(x) + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(5)}(x) + \\ + \frac{h^5}{5!} y^{(6)}(x) + \frac{h^6}{6!} y^{(7)}(x) + \dots$$

$$M_2^{(5)}(h) = y''(x) + \frac{h}{1!} y'''(x) + \frac{h^2}{2!} y^{(4)}(x) + \frac{h^3}{3!} y^{(5)}(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(6)}(x) + \\ + \frac{h^5}{5!} y^{(7)}(x) + \dots$$

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО СВОЙСТВА, ОТНОСЯЩЕГОСЯ К МЕТОДУ РУНГЕ И КУТТА, ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе распространяется на системы дифференциальных уравнений (1,1) и на дифференциальные уравнения высшего порядка (2,1) способ численного интегрирования, приведенный в заметке [1].

Рассматривается квадратурная формула (1,5), в которой $x + \lambda_i h$ представляет собой данные узлы ($i = 1, 2, \dots, r$) и коэффициенты A_i определены так, чтобы остаток R был равен нулю, когда $\varphi(s)$ является полиномом $p \geq r - 1$ степени. Тогда получается основная теорема.

Если известны первые $p + 1$ члены разложения функций $y_k(x + \lambda_i h)$ в степенный ряд по h , то в функции (1,9), разложенной в степенный ряд по h , первые $p + 2$ члена тождественны первым $p + 2$ членам разложения функции $y_j(x + h)$ по степеням h .

Из этой теоремы вытекает закономерный способ численного интегрирования дифференциальных систем (1,1) путем последовательного введения значения $p = 0, 1, 2, \dots$.

Для уравнений высшего порядка имеется аналогичная теорема, исходящая из квадратурной формулы вида (2,5), из которой вытекает закономерность способов численного интегрирования дифференциальных уравнений высшего порядка (2,1).

GÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ QUI INTERVIENT DANS LA MÉTHODE DE RUNGE ET KUTTA D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES (RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on étend aux systèmes d'équations différentielles et aux équations différentielles d'ordre supérieur, le procédé d'intégration numérique donné dans la Note [1].

On considère la formule de quadrature (5) où les $x + \lambda_i h$ sont des nœuds donnés ($i = 1, 2, \dots, r$) et les coefficients A_i sont déterminés de manière que le reste R soit nul lorsque $\varphi(s)$ est un polynôme de degré $p \geq r - 1$. On a alors le théorème fondamental.

Si l'on connaît les $p + 1$ premiers termes du développement des fonctions $y_k(x + \lambda_i h)$ en série entière de h , la fonction $M_j(h)$ développée en série entière de h , a les $p + 2$ premiers termes identiques aux $p + 2$ premiers termes du développement de $y_j(x + h)$ en série entière de h .

De ce théorème, il résulte un procédé régulier d'intégration numérique des systèmes différentiels (1,1) en rendant successivement $p = 0, 1, 2, \dots$.

On a un théorème analogue pour les équations d'ordre supérieur en partant d'une formule de quadrature de la forme (2, 5), d'où découle un procédé régulier d'intégration numérique des équations différentielles d'ordre supérieur (2, 1).

BIBLIOGRAFIE

1. Kollaț L. K., *Cislennie metodî reșenia diferențiatnîh urvanenii*. Moscova, 1953, p. 31—45.
2. Ionescu D. V., *O generalizare a unei proprietăți care intervine în metoda lui Runge-Kutta pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale*. Bul. Științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, t. VI, nr. 2, aprilie-mai-iunie 1954, p. 229.
3. Kutta W., *Beiträge zur Annäherungsweise Integration totaler Differenzialgleichungen*. Zeitschr. f. Math. u. Phys., 1901, t. 46, p. 435—452.
4. Mikelađze Ș. E., *Cislennie metodî matematetskogo analiza*. Moscova, 1953, p. 328.
5. Runge C. u. König H., *Vorlesungen über numerische Rechnen*. 1924, p. 286—325.