

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI ȘI CULTURII
INSTITUTUL POLITEHNIC CLUJ

LUCRĂRI ȘTIINȚIFICE

VOLUMUL

1



Inv. P. 68/1958

1 9 5 8

LITOGRAFIA ȘI TIPOGRAFIA ÎNVĂȚĂMÎNTULUI — BUCUREȘTI — c. 14

TEOREMA FUNDAMENTALA ASUPRA FUNCȚIILOR IMPLICITE

de D. V. Ionescu

1. În teorema fundamentală de existență a funcției implicite definite de ecuația

$$F(y; x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1)$$

pe care o vom numi teorema 1, se presupune:

1. Funcția $F(y; x_1, x_2, \dots, x_n)$ este definită și continuă în paralelipipedul cu $n+1$ dimensiuni definit de inegalitățile

$$a_i < x_i < b_i, \quad c < y < d \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

cu centrul în punctul de coordonare $x_1^0, \dots, x_n^0, y_0$. Vom nota acest paralelipiped cu $(a_1, b_1; a_2, b_2, \dots; a_n, b_n; c, d)$

2. Funcția $F(y; x_1, x_2, \dots, x_n)$ are derivate parțiale $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ continue în paralelipipedul $(a_1; b_1; \dots; a_n, b_n; c, d)$ unde $k \leq n$

3. Avem

$$F(y_0; x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0 \quad (3)$$

4. Avem

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y_0; x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \neq 0 \quad (4)$$

În aceste condiții, într-o anumită vecinătate V a punctului de coordonate $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ care aparține paralelipipedului $(a_1, b_1; \dots, a_n, b_n)$, ecuația (1) definește în mod unic funcția

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5)$$

ale cărei valori aparțin intervalului (c, d) și care ia valoarea y_0 când $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$. Funcția $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este continuă și are derivate parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ continue în vecinătatea V .

Cu ajutorul teoremei I se demonstrează *teorema II* de existență relativă la sistemul de ecuații.

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2, \dots, y_m; x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ F_2(y_1, y_2, \dots, y_m; x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ F_m(y_1, y_2, \dots, y_m; x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

în care se presupune:

1. Funcțiile $F_k(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n)$ unde $k=1, 2, \dots, m$ sînt definite și continue în paralelipipedul cu $m+n$ dimensiuni, definit de inegalitățile

$$a_i < x_i < b_i, \quad c_k < y_k < d_k \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, m) \quad (7)$$

cu centrul în punctul de coordonate $(x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$.

Vom nota acest paralelipiped cu $(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n; c_1, d_1; \dots; c_m, d_m)$

2. Funcțiile $F_k(y_1, y_2, \dots, y_m; x_1, x_2, \dots, x_n)$ unde $k=1, 2, \dots, m$ au derivate parțiale

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_m}$$

continue în paralelipipedul $(a_1, b_1; \dots; c_m, d_m)$

3. Avem

$$F_k(y_1^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_n^0) = 0 \text{ unde } k=1, 2, \dots, m \quad (8)$$

4. Jacobianul

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \quad (9)$$

este diferit de zero în punctul $(x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$.

În aceste condiții, într-o anumită vecinătate V a punctului de coordonate $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ din paralelipipedul $(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n)$ sistemul de ecuații (6) definește în mod unic funcțiile

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots &\dots \dots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (10)$$

ale căror valori aparțin paralelipipedului $(c_1, d_1; \dots; c_m, d_m)$ și care iau valorile $y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0$ când $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$. Funcțiile $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ unde $k = 1, 2, \dots, m$ sînt continue în vecinătatea V a punctului $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Demonstrația teoremei 11 se bazează pe teorema 1 și ea se face de obicei cu ajutorul metodei inducției complete (1), (2). Vom arăta însă, în această lucrare, că metoda inducției complete poate fi înlocuită cu o metodă analogă cu algoritmul lui Gauss, pentru rezolvarea ecuațiilor lineare (3).

2. Deoarece determinantul funcțional (9) este diferit de zero în punctul de coordonate $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ putem presupune că notațiile sînt alese astfel ca determinanții funcționali

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_r)}{D(y_1, y_2, \dots, y_r)} \quad (11)$$

unde $r = 1, 2, \dots, m$ să fie toți diferiți de zero în punctul de coordonate $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$.

Vom nota cu

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_r)}{D(y_1, y_2, \dots, y_r)}$$

valoarea acestui determinant în punctul de coordonate $(x_1^0, \dots, x_n^0; \dots, y_m^0)$.

În acest caz, avînd

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(y_1^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$$

ecuația înliia (6), în baza leoremei 1, definește într-o anumită vecinătate V

$$(y_2^0 - \delta_2^{(1)}, y_2^0 + \delta_2^{(1)}; \dots; y_m^0 - \delta_m^{(1)}, y_m^0 + \delta_m^{(1)}; x_1^0 - \delta_1^{(1)}, x_1^0 + \delta_1^{(1)}; \dots; x_n^0 - \delta_n^{(1)}, x_n^0 + \delta_n^{(1)})$$

din paralelipipedul $(c_1, d_1; \dots; c_m, d_m; a_1, b_1; \dots; a_n, b_n)$, funcția

$$y_1 = f_1(y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) \quad (12)$$

ale cărei valori aparțin unei vecinătăți $y_1^0 - \delta_1^{(1)}, y_1^0 + \delta_1^{(1)}$ c (c_1, d_1)

Funcția f_1 (se reduce la y_1^0 când $y_2 = y_2^0, \dots, x_n = x_n^0$) și este continuă împreună cu derivatele ei

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial y_m}$$

în vecinătatea V .

Înlocuind în ultimele $m-1$ ecuații (6) pe y_1 cu membrul al doilea al formulei (12), $F_2, \dots, F_m$ se reduce la funcții de $y_2, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n$ și anume

$$\begin{aligned} F_2(f_1, y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= F_2^{(1)}(y_2, y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = 0 \\ &\dots \dots \dots \\ F_m(f_1, y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= F_m^{(1)}(y_2, y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Funcțiile $F_k^{(1)}(y_2, y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n)$ sînt continue și au derivate parțiale de ordinul întâi continue în raport cu $y_2, \dots, y_m$ în vecinătatea V .

Avem $F_k^{(1)}(y_2^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_n^0)$ iar derivata

$$\frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial y_2}$$

în punctul de coordonate $(x_1^0, \dots, x_n^0; y_2^0, \dots, y_m^0)$ este diferită de zero.

Într-adevăr derivând ecuațiile

$$F_1(f_1, y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$F_2(f_1, y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = F_2^{(1)}(y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n)$$

în raport cu y_2 , avem ecuațiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} &= 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} &= \frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial y_2} \end{aligned}$$

Înlocuind pe $x_1, \dots, x_n; y_2, \dots, y_m$ cu $x_1^0, \dots, x_n^0; y_2^0, \dots, y_m^0$ și

ținînd seama că $\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right)_0 \neq 0$ deducem că

$$\left(\frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial y_2}\right)_0 = \frac{\left(\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_2, y_2)}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right)_0} \neq 0$$

ceea ce trebuie arătat.

Sistemul de ecuații (6) se reduce astfel la

$$\begin{aligned} F_1(y_2, y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ F_2^{(1)}(y_2, y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ F_m^{(1)}(y_2, y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Funcția $F_2^{(1)}$ îndeplinind toate condițiile pentru aplicarea leoremei 1, ecuația

$$F_2^{(1)}(y_2, y_3, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = 0$$

definește într-o anumită vecinătate V_2

$$(y_3 - \delta_3^{(2)}, y_3 + \delta_3^{(2)}; \dots; y_m - \delta_m^{(2)}, y_m + \delta_m^{(2)}; x_1 - \delta_1^{(2)}, x_1 + \delta_1^{(2)}; \dots; x_n - \delta_n^{(2)}, x_n + \delta_n^{(2)}) \quad (15)$$

din vecinătatea

$$(y_3 - \delta_3^{(1)}, y_3 + \delta_3^{(1)}; \dots; y_m - \delta_m^{(1)}, y_m + \delta_m^{(1)}; \dots; x_n - \delta_n^{(1)}, x_n + \delta_n^{(1)})$$

funcția

$$y_2 = f_2(y_3, y_4, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) \quad (16)$$

care se reduce la y_2^0 când $y_3 = y_3^0, \dots, y_m = y_m^0, x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$. Pentru toate valorile $y_3, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n$ din vecinătatea (15), valorile lui y_2 aparțin unei vecinătăți

$$(y_2 - \delta_2^{(2)}, y_2 + \delta_2^{(2)}) \subset (y_2 - \delta_2^{(1)}, y_2 + \delta_2^{(1)}),$$

iar valorile lui y_1 date de formula (12) aparțin unei vecinătăți

$$(y_1 - \delta_1^{(2)}, y_1 + \delta_1^{(2)}) \subset (y_1 - \delta_1^{(1)}, y_1 + \delta_1^{(1)})$$

Funcția f_2 este continuă și are derivate parțiale

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_3}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial y_m}$$

continue în vecinătatea (15).

Înlocuind pe y_2 în ultimele $m-2$ formule (14) cu $f_2(y_3, \dots, y_m; \dots, x_n)$ vom avea

$$\begin{aligned} F_3(f_1, f_2, y_3, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= F_3^{(2)}(y_3, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = 0 \\ F_4(f_1, f_2, y_3, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= F_4^{(2)}(y_3, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots &\dots \dots \\ F_m(f_1, f_2, y_3, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= F_m^{(2)}(y_3, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

și evident avem

$$\begin{aligned} F_1(f_1, f_2, y_3, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ F_2(f_1, f_2, y_3, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Funcțiile $F_k^{(2)}(y_3, y_4, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n)$ unde $k = 3, \dots, m$ sînt continue în vecinătatea (15) și au derivate parțiale de ordinul întâi continue în

raport cu $y_1, \dots, y_m$. Avem $F_s^{(2)}(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0, x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$ și derivând formulele (18) și prima (17) în raport cu y și făcând apoi $y_s = y_s^0, \dots, y_m = y_m^0, x_n = x_n^0$ se găsește:

$$\left(\frac{\partial F_s^{(2)}}{\partial y_s} \right)_0 = \frac{\left(\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} \right)_0}{\left(\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)} \right)_0} \neq 0$$

Sistemul de ecuații (14) se reduce astfel la sistemul

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2, y_3, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ F_2^{(1)}(y_1, y_2, y_3, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ F_3^{(2)}(y_1, y_2, y_3, \dots, y_m; x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ F_m^{(2)}(y_1, y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Se continuă procedeul precedent. În general se obține sistemul

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ F_2^{(1)}(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ F_r^{(r-1)}(y_r, y_{r+1}, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ F_m^{(m-1)}(y_r, y_{r+1}, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

unde funcțiile $F_k^{(r-1)}(y_r, y_{r+1}, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n)$, ($k = r, \dots, m$) sînt continue și au derivate parțiale de ordinul întâi continue în raport cu $y_r, y_{r+1}, \dots, y_m$ în vecinătatea σ_{r-1}

$$\begin{aligned} (y_r - \delta_r^{(r-1)}, y_r + \delta_r^{(r-1)}, \dots, y_m - \delta_m^{(r-1)}, y_m + \delta_m^{(r-1)}; \\ x_1 - \delta_1^{(r-1)}, x_1 + \delta_1^{(r-1)}; \dots, x_n - \delta_n^{(r-1)}, x_n + \delta_n^{(r-1)}) \end{aligned} \quad (21)$$

inclusă în vecinătatea

$$(y_r - \delta_r^{(r-2)}, y_r + \delta_r^{(r-2)}, \dots, x_n - \delta_n^{(r-2)}, x_n + \delta_n^{(r-2)})$$

$$\text{Avem } F_r^{(r-1)}(y_r, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = 0,$$

iar

$$\left(\frac{\partial F_r^{(r-1)}}{\partial y_r} \right)_0 = \frac{\left(\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_r)}{D(y_1, y_2, \dots, y_r)} \right)_0}{\left(\frac{D(F_1, \dots, F_{r-1})}{D(y_1, \dots, y_{r-1})} \right)_0}$$

Ecuația

$$F_r^{(r-1)}(y_r, y_{r+1}, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = 0$$

definește într-o anumită vecinătate V_r

$$(y_{r+1}^0 - \bar{\delta}_{r+1}^{(r)}, y_{r+1}^0 + \bar{\delta}_{r+1}^{(r)}; \dots; x_n^0 - \bar{\delta}_n^{(r)}, x_n^0 + \bar{\delta}_n^{(r)}) \quad (22)$$

inclusă în vecinătatea

$$(y_{r+1}^0 - \bar{\delta}_{r+1}^{(r-1)}, y_{r+1}^0 + \bar{\delta}_{r+1}^{(r-1)}; \dots; x_n^0 - \bar{\delta}_n^{(r-1)}, x_n^0 + \bar{\delta}_n^{(r-1)})$$

funcția

$$y_r = f_r(y_{r+1}, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) \quad (23)$$

care este continuă împreună cu derivatele ei parțiale de ordinul întâi în raport cu $y_{r+1}, \dots, y_m$ în vecinătatea (22) și se reduce la y_r^0 când $y_{r+1} = y_{r+1}^0, \dots, x_n = x_n^0$.

Pentru toate valorile lui $y_r, y_{r+1}, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n$ din vecinătatea (22) valorile lui $y_r, y_{r-1}, \dots, y_1$ date de formulele

$$\begin{aligned} y_r &= f_r(y_{r+1}, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) \\ y_{r-1} &= f_{r-1}(y_r, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) \\ y_1 &= f_1(y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (24)$$

aparțin respectiv următoarelor vecinătăți

$$\begin{aligned} y_r & \quad (y_r^0 - \bar{\delta}_r^{(r)}, y_r^0 + \bar{\delta}_r^{(r)}) \subset (y_r^0 - \bar{\delta}_r^{(r-1)}, y_r^0 + \bar{\delta}_r^{(r-1)}) \\ y_{r-1} & \quad (y_{r-1}^0 - \bar{\delta}_{r-1}^{(r)}, y_{r-1}^0 + \bar{\delta}_{r-1}^{(r)}) \subset (y_{r-1}^0 - \bar{\delta}_{r-1}^{(r-1)}, y_{r-1}^0 + \bar{\delta}_{r-1}^{(r-1)}) \\ & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_1 & \quad (y_1^0 - \bar{\delta}_1, y_1^0 + \bar{\delta}_1) \subset (y_1^0 - \bar{\delta}_1^{(r-1)}, y_1^0 + \bar{\delta}_1^{(r-1)}) \end{aligned}$$

Pentru $r=m$ sistemul (20) este

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2, \dots, y_m; x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ F_2^{(1)}(y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ F_m^{(m-1)}(y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

unde funcția $F_m^{(m-1)}(y_m; x_1, \dots, x_n)$ este continuă și are derivata

$$\frac{\partial F_m^{(m-1)}}{\partial y_m}$$

continuă în vecinătatea (22) în care se înlocuiește $r = m-1$.

Avem

$$F_m^{(m-1)}(y_m^0; x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial F_m^{(m-1)}}{\partial y_m} \right)_0 = \frac{\left(\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right)_0}{\left(\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_{m-1})} \right)_0} \neq 0$$

Ecuția

$$F_m^{(m-1)}(y_m; x_1, \dots, x_n) = 0$$

definește într-o anumită vecinătate V

$$(x_1^0 - \delta_1^{(m-1)}, x_1^0 + \delta_1^{(m-1)}; \dots; x_n^0 - \delta_n^{(m-1)}, x_n^0 + \delta_n^{(m-1)}) \quad (26)$$

inclusă în vecinătatea

$$(x_1^0 - \delta_1^{(m-2)}, x_1^0 + \delta_1^{(m-2)}; \dots; x_n^0 - \delta_n^{(m-2)}, x_n^0 + \delta_n^{(m-2)})$$

funcția

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (27)$$

care este continuă în vecinătatea V și se reduce la y_m^0 când $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$

Dacă între formele

$$\begin{aligned} y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_{m-1} &= f_{m-1}(y_m; x_1, \dots, x_n) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (28)$$

$$y_1 = f_1(y_2, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n)$$

eliminăm pe rând pe y_m apoi pe y_{m-1} și în sfârșit pe $y_m, y_{m-1}, \dots, y_2$ obținem funcțiile

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$y_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$$

continue în vecinătatea V , care se reduc la $y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0$ când $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$ și care reprezintă soluția unică a sistemului de ecuații (6) în $y_1, y_2, \dots, y_m$ când $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt luate din vecinătatea V . Cu această teoremă 11 este complet demonstrată.

3. Să revenim la sistemul de ecuații (14) și să demonstrăm că

$$\left[\frac{D(F_1, F_2^{(1)}, \dots, F_m^{(1)})}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right]_0 = \left[\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right]_0 \quad (29)$$

Într-adevăr avem

$$\frac{D(F_1, F_2^{(1)}, \dots, F_m^{(1)})}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ 0 & \frac{\partial F_m^{(1)}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m^{(1)}}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m^{(1)}}{\partial y_m} \end{vmatrix} \quad (30)$$

Însă

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_l}{\partial y_1}\right)_0 \left(\frac{\partial f_l}{\partial y_l}\right)_0 + \left(\frac{\partial F_l}{\partial y_l}\right)_0 &= 0 \quad (l = 2, 3, \dots, m) \\ \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\right)_0 \left(\frac{\partial f_l}{\partial y_l}\right)_0 + \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_l}\right)_0 &= \left(\frac{\partial F_k^{(l)}}{\partial y_l}\right)_0 \quad (l, k = 2, 3, \dots, m) \end{aligned}$$

astfel că putem scrie

$$\left[\frac{D(F_1, F_2^{(1)}, \dots, F_m^{(1)})}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right]_0 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)_0 \begin{vmatrix} 1 & -\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & -\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_m}\right)_0 \\ 0 & \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\right)_0 \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right)_0 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \left(\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\right)_0 \end{vmatrix}$$

Înmulțind elementele primei linii ale determinantului pe rînd cu

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\right)_0$$

și adunînd la elementele liniei a doua, ..., a m -a, deducem imediat că avem

$$\left[\frac{D(F_1, F_2^{(1)}, \dots, F_m^{(1)})}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right]_0 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_m}\right)_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial F_m}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\right)_0 \end{vmatrix}$$

adică avem identitatea (29).

Din formula (30) deducem că avem

$$\left[\frac{D(F_2^{(1)}, F_3^{(1)}, \dots, F_m^{(1)})}{D(y_2, y_3, \dots, y_m)} \right]_0 = \left(\frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial y_2}\right)_0 \left[\frac{D(F_3^{(2)}, \dots, F_m^{(2)})}{D(y_3, \dots, y_m)} \right]_0 \quad (31)$$

În mod analog din sistemul (19) se deduce că

$$\left[\frac{D(F_2^{(1)}, F_3^{(1)}, \dots, F_m^{(1)})}{D(y_2, y_3, \dots, y_m)} \right]_0 = \left(\frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial y_2}\right)_0 \left[\frac{D(F_3^{(2)}, \dots, F_m^{(2)})}{D(y_3, \dots, y_m)} \right]_0$$

astfel ca formula (31) devine

$$\left[\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right]_0 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)_0 \left(\frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial y_2}\right)_0 \left[\frac{D(F_3^{(2)}, \dots, F_m^{(2)})}{D(y_3, \dots, y_m)} \right]_0$$

În general din sistemul (20) se deduce că

$$\left[\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right]_0 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \right)_0 \left(\frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial y_1} \right)_0 \dots \left(\frac{\partial F_{r-1}^{(r-2)}}{\partial y_{r-1}} \right)_0 \left[\frac{D(F_r^{(r-1)}, \dots, F_m^{(r-1)})}{D(y_r, \dots, y_m)} \right]_0$$

Însă ținând seama de calculele precedente avem

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \right)_0 \left(\frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial y_1} \right)_0 \dots \left(\frac{\partial F_{r-1}^{(r-2)}}{\partial y_{r-1}} \right)_0 = \left[\frac{D(F_1, \dots, F_r)}{D(y_1, \dots, y_r)} \right]_0$$

Deci formula precedentă ne dă

$$\left[\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right]_0 = \left[\frac{D(F_1, \dots, F_r)}{D(y_1, \dots, y_r)} \right]_0 \left[\frac{D(F_r^{(r-1)}, \dots, F_m^{(r-1)})}{D(y_r, \dots, y_m)} \right]_0 \quad (32)$$

Să punem în evidență elementele determinantului funcțional

$$\left[\frac{D(F_r^{(r-1)}, \dots, F_m^{(r-1)})}{D(y_r, \dots, y_m)} \right]_0$$

În ecuațiile

$$F_1(f_1, f_2, \dots, f_{r-1}, y_r, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F_{r-1}(f_1, \dots, f_{r-1}, y_r, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$F_k(f_1, f_2, \dots, f_{r-1}, y_r, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) = F_k^{(r-1)}(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n),$$

unde $k = r, r+1, \dots, m$ să derivăm în raport cu y_l unde $l = r, r+1, \dots, m$ și să înlocuim apoi pe $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m$ cu $x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_m^0$

Vom avea formulele

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \right)_0 \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_l} \right)_0 + \dots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_{r-1}} \right)_0 \left(\frac{\partial f_{r-1}}{\partial y_l} \right)_0 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_l} \right)_0 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\left(\frac{\partial F_{r-1}}{\partial y_1} \right)_0 \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_l} \right)_0 + \dots + \left(\frac{\partial F_{r-1}}{\partial y_{r-1}} \right)_0 \left(\frac{\partial f_{r-1}}{\partial y_l} \right)_0 + \left(\frac{\partial F_{r-1}}{\partial y_l} \right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial F_k}{\partial y_1} \right)_0 \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_l} \right)_0 + \dots + \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_{r-1}} \right)_0 \left(\frac{\partial f_{r-1}}{\partial y_l} \right)_0 + \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_l} \right)_0 = \frac{\partial F_k^{(r-1)}}{\partial y_l}$$

Ținând seama că

$$\left[\frac{D(F_1, \dots, F_{r-1})}{D(y_1, \dots, y_{r-1})} \right]_0 \neq 0$$

se deduce din aceste formule că

$$\left(\frac{\partial F_k^{(r-1)}}{\partial y_l} \right)_0 = \frac{\left[\frac{D(F_1, \dots, F_{r-1}, F_k)}{D(y_1, \dots, y_{r-1}, y_l)} \right]_0}{\left[\frac{D(F_1, \dots, F_{r-1})}{D(y_1, \dots, y_{r-1})} \right]_0} \quad (33)$$

formind determinantul cu elementele

$$\left[\frac{D(F_1, \dots, F_{r-1}, F_k)}{D(y_1, \dots, y_{r-1}, y_t)} \right]_0$$

cind k și t iau valorile $r, r+1, \dots, m$, pe care îl vom nota

$$\Delta = \left| \left(\frac{D(F_1, \dots, F_{r-1}, F_k)}{D(y_1, \dots, y_{r-1}, y_t)} \right) \right|_{k, t=r}^n$$

deducem din formula (32) identitatea lui Sylvester (3)

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{D(F_1, \dots, F_{r-1}, F_k)}{D(y_1, \dots, y_{r-1}, y_t)} \right) \right|_{k, t=r}^n \left(\frac{D(F_1, \dots, F_{r-1})}{D(y_1, \dots, y_{r-1})} \right)_0^{m-p+1} = \\ = \left(\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right)_0 \end{aligned}$$

scrisă sub forma cea mai generală.

РЕЗЮМЕ

Основная теорема для не явных функций

Д. В. Ионеску

Дается новое доказательство, в котором обычный метод полной индукции заменен аналогичным методом алгоритмом Гаусса от решения систем линейных уравнений.

RÉSUMÉ

Le théorème fondamental sur les fonctions implicites

par **D. V. Ionescu**

On y présente une nouvelle démonstration, dans laquelle la méthode habituelle de l'induction complète est remplacée par une méthode analogue à l'algorithme de Gauss, de la résolution des systèmes d'équations linéaires.