BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES DE LA R.P.R.

Tome 3 (53), nº 4, 1959

SOMMAIRE

S.S.M.F.

BUCUREŞTI 1959

BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R.
Tome 3 (53) n° 4, 1959

L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES À L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

D. V. IONESCU (Cluj)

Considérons l'équation différentielle

$$y' = f(x, y)$$

où la fonction $f(x, y)$ est définie et a des dérivées partielles du premier et du second ordre continues dans le rectangle D défini par les inégalites

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \qquad |y| \leqslant b.$$

Désignons par $y(x)$ l'intégrale de cette équation qui vérifie la condition $y(x_0) = 0$ et soit ε un nombre positif donné.

Dans ce travail, nous allons montrer, en appliquant la méthode des approximations succesives, qu'on peut déterminer sur l'intervalle $[x_0, x_0 + a)$ un réseau Γ de nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et un algorithme de calcul pour le calcul des nombres $y_i^{(s)}$ où $s = 0, 1, 2, \ldots, \nu$ de manière à avoir

$$|y(x_i) - y_i^{(\nu)}| < 2\varepsilon$$

sur tous les nœuds du réseau Γ.

Pour fixer le nombre ν nous tenons compte de la méthode des approximations successives et pour le choix du nombre des nœuds n et de l'algorithme de calcul pour les nombres $y_i^{(s)}$, $s = 0, 1, \ldots, \nu$ nous nous servirons de la formule de quadrature du trapèze.

Ce théorème a été communiqué au Colloque de Mécanique [1] tenu à Bucarest (25–29 octobre 1959) et une extension aux équations aux dérivées partielles du second ordre de type hyperbolique a été communiqué au Colloque sur la théorie des équations aux dérivées partielles [2] tenu à Bucarest (21–26 septembre 1959)

§ 1. Équations différentielles

1. Considérons l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

où la fonction $f(x, y)$ est continue dans le rectangle D défini par les inégalites

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \qquad |y| \leqslant b \tag{2}$$

et satisfait à la condition de LIPSCHITZ

$$|f(x, Y) - f(x, y)| < A\,|Y - y| \tag{3}$$

où A est une constante.

Dans ces conditions, on sait que l'équation différentielle (1) a une intégrale unique nulle pour $x = x_0$. Elle est définie sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h_1]$, où

$$h_1 = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \tag{4}$$

le nombre M étant une borne supérieure de $|f(x, y)|$ dans le rectangle D.

L'intégrale $y(x)$ peut être obtenue par la méthode des approximations successives. On construit la suite des fonctions $\{\overset{(s)}{y}(x)\}$, où

$$y^{(0)}(x) = \int_{x_0}^{x} f[\xi, 0]\, d\xi, \tag{5}$$

$$y^{(s)}(x) = \int_{x_0}^{x} f[\xi, y^{(s-1)}(\xi)]\, d\xi, \tag{6}$$

pour $s = 1, 2, \ldots$

On sait que la série

$$y^{(0)}(x) + \sum_{s=1}^{\infty}[y^{(s)}(x) - y^{(s-1)}(x)]$$

est absolument et uniformément convergente sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h_1]$, et que la somme de cette série représente l'intégrale de l'équation différentielle (1) qui satisfait à la condition $y(x_0) = 0$. On peut écrire l'intégrale $y(x)$ sous la forme

$$y(x) = y^{(0)}(x) + \sum_{s=1}^{\infty}[y^{(s)}(x) - y^{(s-1)}(x)]$$

et on démontre l'inégalité

$$|y(x) - y^{(\nu)}(x)| < \frac{M}{A} e^{Ah_1} \frac{(Ah_1)^{\nu+2}}{(\nu+2)!}.$$

Cela étant soit ε un nombre positif donné. On peut alors choisir le plus petit nombre naturel ν de manière à avoir

$$\frac{M}{A} e^{Ah_1} \frac{(Ah_1)^{\nu+2}}{(\nu+2)!} < \varepsilon \tag{7}$$

et nous aurons

$$|y(x) - y^{(\nu)}(x)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Le nombre naturel ν une fois choisi, restera fix et jouera un rôle important dans l'intégration numérique de l'équation différentielle (1).

9. Pour l'intégration numérique de l'équation différentielle (1) avec la condition $y(x_0) = 0$, nous ferons des nouvelles hypothèses sur la fonction $f(x, y)$, qui sont liées au procédé d'intégration numérique que nous allons donner dans ce travail.

Nous supposerons que la fonction $f(x, y)$ ait des dérivées partielles par rapport à x et à y du premier et du second ordre, continues dans le rectangle D. Dans ces conditions le nombre A de l'inégalité de LIPSCHITZ (3) est une borne supérieure de $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ dans le rectangle D.

On démontre que les fonctions $y^{(s)}(x)$ données par les formules (5) et (6) ont des dérivées du premier et du second ordre continues sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h_1]$. On peut calculer des bornes supérieures de

$$\left|\frac{dy^{(s)}(x)}{dx}\right|, \quad \left|\frac{d^2y^{(s)}(x)}{dx^2}\right|, \qquad (s = 0, 1, 2, \dots, \nu)$$

sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h_1]$ en utilisant seulement les bornes supérieures de

$$|f(x, y)|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

dans le rectangle D.

Il résulte que les fonctions

$$F^{(s)}(x) = f[x, y^{(s-1)}(x)]$$

avec $F^{(0)}(x) = f(x, 0)$ ont des dérivées du premier et du second ordre par rapport à x continues sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h_1]$. Nous désignerons dans la suite par N, une borne supérieure de

$$\left|\frac{d^2F^{(s)}(x)}{dx^2}\right|$$

pour $s = 0, 1, \dots, \nu$, sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h_1]$.

Le nombre N jouera un rôle important dans le calcul approximatif des intégrales (5) et (6) pour $s = 0, 1, \dots, \nu$.

Nous désignerons par h un nombre positif défini par

$$h = \min\left(a, \frac{b - \delta}{M}\right) \tag{9}$$

où δ est un nombre positif donné, assez petit. Il est évident que nous avons $h < h_1$.

Avec ces hypothèses nous pouvons passer à l'intégration numérique de l'équation différentielle (1). Nous allons déterminer un réseau Γ de nœuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$, en progression arithmétique et un algorithme pour le calcul des nombres $y_i^{(s)}$, pour $s = 0, 1, \dots, \nu$ de manière à avoir sur les nœuds du réseau Γ

$$|y^{(s)}(x_i) - y_i^{(s)}| < \varepsilon. \tag{10}$$

3. L'élaboration de l'algorithme pour le calcul des nombres $y_i^{(0)}$, se fera à l'aide de la formule de quadrature du trapèze

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{2}[f(\alpha)+f(\beta)] + R, \tag{11}$$

où

$$R = \int_\alpha^\beta \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{2} f''(x)\,dx. \tag{12}$$

Si N_1 est une borne supérieure de $|f''(x)|$ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, nous aurons

$$|R| < \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} N_1. \tag{13}$$

4. Divisons l'intervalle $[x_0, x+h]$ en n parties égales par les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Les nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ où $x_n = x_0 + h$ forment un réseau Γ. Nous allons calculer les valeurs des fonctions $y^{(s)}(x)$, pour $s = 0, 1, \ldots, \nu$ sur les nœuds du réseau Γ.

Nous avons d'abord

$$y^{(0)}(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} f[\xi, 0]\,d\xi.$$

En appliquant la formule de quadrature (11) à chaque iytervalle $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i]$ et en ajoutant, nous avons la formule

$$y^{(0)}(x_i) = y_i^{(0)} + R_i^{(0)}, \tag{14}$$

où

$$y_i^{(0)} = \frac{h}{2n}\left[f(x_0, 0) + f(x_i, 0) + 2\sum_{j=1}^{i-1} f(x_j, 0)\right] \tag{15}$$

et

$$|R_i^{(0)}| < \frac{h^3}{12n^3}\, i N < \frac{h^3}{12n^2} N$$

parceque $\frac{i}{n} < 1$.

Soit ε un nombre positif que nous déterminerons plus loin. Nous choisirons le nombre n, le plus petit nombre naturel, tel que

$$\frac{h^3}{12n^2} N < \varepsilon_1 \tag{16}$$

Le nombre n étant choisi de cette manière il restera fixe dans la suite, et nous aurons dans la formule (14)

$$|R_i^{(0)}| < \varepsilon \tag{17}$$

5. Pour la fonction $y^{(1)}(x)$, nous avons

$$y^{(1)}(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} f[\xi, y^{(0)}(\xi)]\, d\xi$$

et sur les noeuds x_i nous avons

$$y^{(1)}(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} f[\xi, y^{(0)}(\xi)]\, d\xi.$$

Nous procédons comme au nr. 4, et en appliquant la formule de quadrature du trapèze aux intervalles $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i]$ nous aurons

(18) $$y^{(1)}(x_i) = [y_i^{(1)}] + r_i^{(1)}$$

où

(19) $$|r_i^{(1)}| < \varepsilon_1$$

et où

(20) $$[y_i^{(1)}] = \frac{h}{2n}\left\{f[x_0, y^{(0)}(x_0)] + f[x_i, y^{(0)}(x_i)] + 2\sum_{j=1}^{i-1} f[x_j, y^{(0)}(x_j)]\right\}$$

Introduisons les nombres $y_i^{(1)}$ par la formule

(21) $$y_i^{(1)} = \frac{h}{2n}\left\{f(x_0, 0) + f(x_i, y_i^{(0)}) + 2\sum_{j=1}^{i-1} f(x_j, y_j^{(0)})\right\}.$$

Nous aurons

(22) $$[y_i^{(1)}] = y_i^{(1)} + \rho_i^{(1)}$$

où

$$\rho_i^{(1)} = \frac{h}{2n}\left\{f(x_i, y(x_i^{(0)})) - f(x_i, y_i^{(0)}) + 2\sum_{j=1}^{i-1}[f(x_j, y^{(0)}(x_j)) - f(x_j, y_j^{(0)})]\right\}$$

En tenant compte de l'inégalité de LIPSCHITZ (3) et des inégalités (17), nous avons

$$|\rho_i^{(1)}| < \frac{h}{2n}(2i-1)A\,\varepsilon_1$$

c'est à dire

(23) $$|\rho_i^{(1)}| < Ah\,\varepsilon_1$$

En revenant à la formule (18) nous pouvons écrire

(24) $$y^{(1)}(x_i) = y_i^{(1)} + R_i^{(1)}$$

où, d'après les inégalités (19) et (23) nous avons

$$|R_i^{(1)}| < \varepsilon_1 + A\,h\,\varepsilon_1$$

c'est à dire

(25) $$|R_i^{(1)}| < (1+K)\,\varepsilon_1$$

où nous avons noté

$$K = A h \tag{26}$$

6. Passons au cas général. Supposons que nous avons démontré que

$$\left| y^{(s-1)}(x_j) - y_j^{(s-1)} \right| < (1 + K + \ldots + K^{s-1})\, \varepsilon_1 \tag{27}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, n$, où

$$y_i^{(s-1)} = \frac{h}{2n} \left\{ f(x_0, 0) + f(x_i, y_i^{(s-2)}) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} f(x_j, y_j^{(s-2)}) \right\}$$

et démontrons qu'en introduisant le nombre $y_i^{(s)}$ par la formule

$$y_i^{(s)} = \frac{h}{2n} \left\{ f(x_0, 0) + f(x_i, y_i^{(s-1)}) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} f(x_j, y_j^{(s-1)}) \right\} \tag{28}$$

nous avons aussi

$$\left| y^{(s)}(x_i) - y_i^{(s)} \right| < (1 + K + \ldots + K^{s})\, \varepsilon_1 . \tag{29}$$

En effet, nous avons

$$y^{(s)}(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} f[\xi, y^{(s-1)}(\xi)]\, d\xi .$$

En procédant comme au nr. 5, nous avons

$$y^{(s)}(x_i) = [y_i^{(s)}] + r_i^{(s)} \tag{30}$$

où

$$\left| r_i^{(s)} \right| < \varepsilon_1 \tag{31}$$

et

$$[y_i^{(s)}] = \frac{h}{2n} \left\{ f[x_0, y^{(s-1)}(x_0)] + f[x_i, y^{(s-1)}(x_i)] + 2 \sum_{j=1}^{i-1} f[x_j, y^{(s-1)}(x_j)] \right\} \tag{32}$$

Les formules (28) et (32) montrent que

$$[y_i^{(s)}] = y_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}$$

où

$$\rho_i^{(s)} = \frac{h}{2n} \left\{ f[x_i, y^{(s-1)}(x_i)] - f[x_i, y_i^{(s-1)}] + 2 \sum_{j=1}^{i-1} [f(x_j, y^{(s-1)}(x_j)) - f(x_j, y_j^{(s-1)})] \right\}.$$

Tenant compte de l'inégalité de LIPSCHITZ et des inégalités (27), nous avons

$$\left| \rho_i^{(s)} \right| < \frac{h}{2n} (2i - 1)\, A\, (1 + K + \ldots + K^{s-1})\, \varepsilon_1$$

ou

$$\left| \rho_i^{(s)} \right| < K + K^2 + \ldots + K^{s})\, \varepsilon_1 . \tag{33}$$

Il résulte alors que nous pouvons écrire

$$y^{(s)}(x_i) = y_i^{(s)} + R_i^{(s)}.$$

où

$$R_i^{(s)} = r_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}.$$

Tenant compte des inégalités (31) et (33), il résulte que nous avons

$$|R_i^{(s)}| < (1 + K + \ldots + K^s)\,\varepsilon_1$$

ce qui prouve que l'inégalité (29) est démontrée.

7. Nous avons trouvé donc un algorithme pour le calcul des nombres $y_i^{(s)}$ par les formules (16) et (28). Il nous reste maintenant de préciser le nombre ε_1. Nous prendrons d'abord le nombre ε_1 de manière que le second membre de l'inégalité (29) pour $s = \nu$ soit plus petit que ε. Nous prendrons donc

$$\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{1 + K + \ldots + K^\nu}.$$

Mais il y a encore une condition pour le nombre ε_1. Pour que la formule (28) ait un sens pour $s = \nu$, il faut que le point de coordonnees $(x_i, y_i^{(\nu-1)})$ se trouve dans le rectangle D. De l'identité

$$y_i^{(\nu-1)} = -[y^{(\nu-1)}(x_i) - y_i^{(\nu-1)}] + y^{(\nu-1)}(x_i)$$

et de la définition du nombre b, nous déduisons que

$$|y_i^{(\nu-1)}| < |R_i^{(\nu-1)}| + b - \delta < (1 + K + \ldots + K^{\nu-1})\,\varepsilon_1 + b - \delta$$

ou encore

$$|y_i^{(\nu-1)}| < (1 + K + \ldots + K^\nu)\,\varepsilon_1 + b - \delta.$$

Pour avoir $|y_i^{(\nu-1)}| < b$, il faut que ε_1 vérifie la condition

$$\varepsilon_1 < \frac{\delta}{1 + K + \ldots + K^\nu}.$$

Donc, *on choisi le nombre ε_1 par la formule*

$$\varepsilon_1 = \min\left(\frac{\varepsilon}{1 + K + \ldots + K^\nu},\ \frac{\delta}{1 + K + \ldots + K^\nu}\right) \tag{34}$$

Le nombre ε_1 étant ainsi précisé, le point de coordonnées $(x_i, y_i^{(s)})$ où $s = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ se trouve dans le rectangle la D. En effet, en procédant comme plus haut, nous avons

$$|y_i^{(s)}| < |R_i^{(s)}| + b - \delta < (1 + K + \ldots + K^s)\,\varepsilon_1 + b - \delta$$

ou encore

$$|y_i^{(s)}| < (1 + K + \ldots + K^\nu)\,\varepsilon_1 + b - \delta < b.$$

8. Tenant compte des inégalités

$$|y(x) - y^{(\nu)}(x)| < \varepsilon, \quad |y^{(\nu)}(x_i) - y_i^{(\nu)}| < \varepsilon$$

et de l'indentité

$$y(x_i) - y_i^{(\nu)} = [y(x_i) - y^{(\nu)}(x_i)] + [y^{(\nu)}(x_i) - y_i^{(\nu)}]$$

nous déduisons que sur les noeuds du réseau Γ, nous avons

$$(35) \qquad |y(x_i) - y_i^{(\nu)}| < 2\varepsilon.$$

Ainsi nous avons déterminé sur l'intervalle $[x_0, x_0 + a]$, *un réseau de noeuds* Γ, *et un algorithme pour le calcul des nombres* $y_i^{(\nu)}$, *tel que la différence entre la valeur de l'intégrale* $y(x_i)$ *et le nombre* $y_i^{(\nu)}$, *en valeur absolue, sur les noeuds du réseau* Γ *soit plus petite que* 2ε.

9. Dans un autre travail [3] nous avons montré que si la fonction $f(x, y)$ a des dérivées partielles par rapport à x et à y, d'ordre plus grand que deux, continues dans le rectangle D, on peut choisir le réseau Γ d'une autre manière, en employant d'autres formules de quadrature. Nous avons traité en détail de l'intégration numérique de l'équation différentielle (1), au moyen de la méthode des approximation successives et de la formule de quadrature de K. PETR. [4,5].

§2. Équation aux dérivées partielles du second ordre de type hyperbolique

10. Nous avons fait une extension de la méthode précédente d'intégration numérique des équations différentielles (1), aux équations aux dérivées partielles du second ordre de type hyperbolique [2]. Ce travail paraitra prochainement dans Mathematica Tome 2 (25). Nous avons d'abord établi par une extension de la méthode de J. RADON [6], la formule de cubature

$$(36) \qquad \iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)] + R,$$

où D est le rectangle défini par les inégalités

$$x_1 < x < x_2, \quad y_1 < y < y_2$$

et où le reste R est donné par la formule

$$(37) \qquad R = \iint_D \left(\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx\,dy$$

avec

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2),$$

$$(38) \qquad \psi(x,y) = -\frac{1}{2}[(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_1) + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)],$$

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_1)(y - y_2).$$

Nous avons appliqué ensuite la méthode des approximations successives et la formule de cubature (36) à l'intégration numérique de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z, p, q),$$

où $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, avec les conditions $z(x, 0) = 0$, $z(0, y) = 0$, dans le rectangle Δ formé par les droites $x = 0$, $x = \lambda$, $y = 0$, $y = \mu$.

Nous avons montré qu'on peut déterminer un réseau Γ formé par les droites $x = x_i$, $y = y_k$ où les points x_i et y_k partagent les intervalles $(0, \lambda)$ et $(0, \mu)$ en n et m parties égales et chercher un algorithme de calcul pour les nombres $z_{ik}^{(\nu)}$, $p_{ik}^{(\nu)}$, $q_{ik}^{(\nu)}$ de façon que ε étant un nombre positif donné, les valeurs absolues des différences

$$z(x_i, y_k) - z_{ik}^{(\nu)},\quad p(x_i, y_k) - p_{ik}^{(\nu)},\quad q(x_i, y_k) - q_{ik}^{(\nu)}$$

sur les noeuds du réseau Γ, soient plus petites que 2ε.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. V. Ionescu: *Integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*, Colloque de Mécanique 25–29 octobre 1959, Bucarest.
2. — *Integrarea numerică a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea de tip hiperbolic*, Colloque sur la théorie des équations aux dérivées partielles, 21–26 sept. 1959 Bucarest Studii şi Cercetări de Matematică, Cluj (sous presse) Mathematica, Tome 2(25) (sous presse).
3. — *Aplicarea metodei aproximaţiilor succesive la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*, Sesiunea ştiinţifică a Acad. R.P.R., Filiala Cluj, 25 martie 1960, Studii şi Cercetări de Matematică, Cluj (sous presse).
4. — *Cuadraturi numerice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957, p. 55.
5. K. Petr: *Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale*, Casopis propestovani Matematiky Fysiky 44, (1915) p. 454–455.
6. T. Radon: *Restausdrücke bei Interpolations- und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale*, Monatshefte für Mathematik und Physik 1935, 42, p. 389–396.