

ASUPRA DELIMITĂRII RESTULUI ÎN UNELE FORMULE DE APROXIMARE LINIARĂ ALE ANALIZEI*)

DE

TIBERIU POPOVICIU

Membru corespondent al Academiei R.P.R.

(Cluj)

1. Să presupunem că restul $R[f]$ al unei formule de aproximare liniară este o funcțională liniară definită pe un spațiu vectorial S , format din funcții $f = f(x)$, definite și continue pe un interval I . Funcțiile f și funcționala liniară $R[f]$ sînt reale și S conține toate polinoamele.

Spunem că $R[f]$ este de formă simplă, dacă există un întreg $n \geq -1$, astfel încît să aibă loc egalitatea

$$R[f] = K[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f], \quad f \in S, \quad (1)$$

unde $K = R[x^{n+1}]$ este $\neq 0$, independent de funcția f , iar ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n+2$ sînt $n+2$ puncte distincte ale intervalului I (care pot să depindă în general de funcția f și care sînt situate în interiorul intervalului, dacă $n \geq 0$). Notăția $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f]$ reprezintă diferența divizată a funcției f pe nodurile $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}$. Pentru aceste noțiuni și pentru cele cîteva proprietăți care vor urma, rugăm cititorul de a consulta lucrările noastre anterioare, în particular, lucrarea noastră [3] din volumul anterior al acestei reviste.

În acest caz, n reprezintă gradul de exactitate al restului și se bucură de proprietatea (caracteristică) că $R[f]$ este nul pentru orice polinom de grad n , dar $R[x^{n+1}] \neq 0$.

Reamintim că pentru ca funcționala $R[f]$ avînd gradul de exactitate n , să fie de formă simplă, este necesar și suficient ca $R[f] \neq 0$ pentru orice funcție $f \in S$ convexă de ordinul n (pe I). În acest caz este de altfel necesar ca $R[f]$ să păstreze un semn constant pentru orice funcție convexă de ordinul n . Observînd că funcția x^{n+1} este convexă de ordinul n , condiția precedentă se poate scrie

$$R[x^{n+1}] \cdot R[f] > 0. \quad (2)$$

*) Această lucrare se publică și în limba franceză în revista „Mathematica” vol. 2(25), fascicola 1.

Condiția (2) pentru orice funcție $f \in S$ convexă de ordinul n , este deci necesară și suficientă pentru ca $R[f]$ să fie de formă simplă (1). Observăm că pentru aceasta este de asemenea necesar (dar nu suficient) ca $R[x^{n+1}] \neq 0$ și

$$R[x^{n+1}] \cdot R[f] \geq 0 \quad (3)$$

pentru orice funcție $f \in S$ neconcavă de ordinul n .

2. Dacă funcționala $R[f]$ este de formă simplă (1), atunci o putem delimita cu formula

$$|R[f]| \leq |R[x^{n+1}]| \cdot M, \quad (4)$$

unde

$$M = \sup_{x_i \in I} | [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] |. \quad (5)$$

De altfel dacă f admite o derivată de ordin $n+1$ (mărginită) pe I , numărul (5) este dat de egalitatea

$$M = \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Dar delimitarea (4) este valabilă într-un caz mai general. Anume, vom demonstra că:

Delimitarea (4) este valabilă dacă $R[f]$ are gradul de exactitate n și dacă inegalitatea (3) este verificată pentru orice funcție $f \in S$ neconcavă de ordinul n .

Avem $R[x^{n+1}] \neq 0$ și pentru demonstrație putem presupune că $R[x^{n+1}] > 0$. Considerăm atunci funcționala liniară (definită pe S)

$$R_1[f] = R[f] + \varepsilon [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f], \quad (6)$$

unde $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ sînt $n+2$ puncte distincte fixate (independent de funcția f) în intervalul I , iar ε este un număr pozitiv oarecare. Vom arăta că $R_1[f]$ este de formă simplă (1). Într-adevăr, dacă ținem seamă de faptul că diferența divizată pe $n+2$ noduri (nu toate confundate) a unei funcții convexe de ordinul n este, prin definiție, pozitivă, deducem că $R_1[f] > 0$, pentru orice funcție $f \in S$, convexă de ordinul n . Proprietatea este astfel demonstrată. Ținînd seamă de (5) și (6) și scriînd de asemenea delimitarea corespunzătoare (4) pentru $R_1[f]$, obținem

$$|R[f]| \leq (R[x^{n+1}] + 2\varepsilon)M.$$

Această inegalitate fiind adevărată oricare ar fi numărul pozitiv ε , rezultă delimitarea (4) și proprietatea în cauză este demonstrată. Dacă avem $R[x^{n+1}] < 0$, demonstrația este analoagă. Se ia atunci în (6) pentru ε un număr negativ oarecare.

3. Pentru a aplica proprietatea precedentă este suficient de a cunoaște criteriul care să permită de a afirma că (în ipoteza $R[x^{n+1}] \neq 0$) inegalitatea (3) este verificată pentru orice funcție $f \in S$, neconcavă de ordinul n . Vom

prezenta aici un astfel de criteriu care rezultă din remarcabila proprietate a polinoamelor de aproximare ale lui S. N. Bernstein, de a păstra caracterul convexității funcțiilor [2].

Presupunem că $I = [0, 1]$ și că funcțiile spațiului S admit derivate de ordinul $j (\geq 0)$ continue pe $[0, 1]$. Considerăm funcționala liniară $R[f]$, avînd gradul de exactitate n și care este mărginită în norma

$$\|f\| = \sum_{i=0}^j \sup_{x \in [0,1]} |f^{(i)}(x)|. \quad (7)$$

Notăm

$$\pi_{k,l} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_x^1 (t-x)^n t^k (1-t)^l dt. \quad (8)$$

În ipotezele formulate anterior are loc următoarea proprietate:

Pentru ca inegalitatea (3) să fie verificată pentru orice funcție $f \in S$, neconcavă de ordinul n , este (necesar și) suficient ca să aibă loc inegalitatea $R[x^{n+1}] \cdot R[\pi_{k,l}] \geq 0$, oricare ar fi întregii nenegativi k și l .

Observăm că $\pi_{k,l}^{(n+1)} = x^k(1-x)^l$. Dacă

$$B_m = B_m(x; f) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} f\left(\frac{i}{m}\right) x^i (1-x)^{m-i}$$

este polinomul lui S. N. Bernstein de gradul m , atunci pentru derivata sa de ordinul $n+1$ ($m \geq n+1$), avem

$$B_m^{(n+1)} = \frac{(m-1)!(n+1)!}{m^n(m-n-1)!} \sum_{i=0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{i} \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \dots, \frac{i+n+1}{m}; f \right] \pi_{i, m-n-1-i}^{(n+1)},$$

de unde

$$B_m = \frac{(m-1)!(n+1)!}{m^n(m-n-1)!} \sum_{i=0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{i} \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \dots, \frac{i+n+1}{m}; f \right] \pi_{i, m-n-1-i} + \beta_m,$$

unde β_m este un polinom de gradul n .

După cum au arătat S. N. Bernstein [1] și S. Wigert [5], dacă derivata $f^{(i)}$ de ordin $i (\geq 0)$ a funcției f există și este continuă pe $[0, 1]$, șirul $\{B_m^{(i)}\}$ tinde pentru $m \rightarrow \infty$, uniform pe $[0, 1]$ către $f^{(i)}$. Rezultă de aici că $R[B_m] \rightarrow R[f]$ pentru $m \rightarrow \infty$ și deci

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R[x^{n+1}] \cdot R[B_m] = R[x^{n+1}] \cdot R[f]. \quad (9)$$

Dacă observăm că

$$R[B_m] = \frac{(m-1)!(n+1)!}{m^n(m-n-1)!} \sum_{i=0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{i} \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \dots, \frac{i+n+1}{m}; f \right] R[\pi_{i, m-n-1-i}]$$

și că diferențele divizate pe $n + 2$ noduri ale unei funcții neconcave de ordinul n sînt nenegative, rezultă că $R[x^{n+1}] \cdot R[B_n] \geq 0$ pentru orice funcție neconcavă de ordinul n . Ținînd seamă de (9), rezultă proprietatea în cauză.

4. Pentru a da o aplicație, fie $R[f]$ restul în formula de cuadratură numerică

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{5} f'(0) + \frac{1}{30} f''(0) + \frac{1}{360} f'''(0) + \frac{1}{3} f(1) - \frac{1}{30} f'(1) + R[f], \quad (10)$$

unde f admite o derivată de ordinul 3, continuă pe $[0, 1]$.

În acest caz funcționala $R[f]$ are gradul de exactitate $n = 5$ și este mărginită în raport cu norma (7), pentru $j = 3$. Avem

$$\pi_{k,l} = \frac{1}{5!} \int_x^1 (t-x)^5 t^k (1-t)^l dt.$$

Deducem

$$R[x^6] = \frac{1}{105} > 0, \quad \int_0^1 \pi_{k,l} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 t^{6+k} (1-t)^l dt$$

și un calcul simplu ne dă

$$R[\pi_{k,l}] = \frac{1}{6} \int_0^1 t^{k+2} (1-t)^{l+4} dt > 0.$$

Se poate deci aplica în acest caz delimitarea (4) și avem

$$R[f] \leq \frac{1}{105} \sup_{x_i \in [0, 1]} | [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7; f] |.$$

Dacă derivata de ordinul 6, $f^{(6)}$, există pe $[0, 1]$, avem

$$|R[f]| \leq \frac{1}{150} \cdot \frac{1}{6!} \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(6)}(x)|.$$

ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМУЛ ПРИБЛИЖЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Предполагается что остаток $R[f]$ некоторой формулы линейного приближения является линейным функционалом, определенным на векторном пространстве S , образованном функциями $f = f(x)$, определенными и непрерывными на интервале I . Функции f и функционал $R[f]$ суть действительные, а пространство S , содержит все полиномы. Исходя от некоторых предыдущих результатов [3] в настоящем труде доказывается следующее свойство:

Чтобы имело место оценка (4), где M дается формулой (5), достаточно чтобы $K[f]$ имел порядок точности n и чтобы неравенство (3) удовлетворялось для любой функции $f \in S$ невогнутой порядка n .

Здесь под порядком точности функционала $K[f]$, разумеается число n с тем свойством, что $R[f]$ равняется нулю для любого полинома n -ой степени, но $R[x^{n+1}] \neq 0$.

В продолжении дается признак, дающий возможность узнать (при предположении $R[x^{n+1}] \neq 0$) удовлетворяется ли неравенство (3) для любой функции $f \in S$ невогнутой степени n . Этот признак основывается на применения свойства полиномов приближения С. Н. Бернштейна сохранять характер выпуклости [2].

С этой целью предполагается что $I = [0, 1]$ и что элементы пространства S имеют производные порядка $j (\geq 0)$ непрерывные на $[0, 1]$. Предполагается еще что линейный функционал $R[f]$ ограничен относительно нормы (7). При этих предположениях доказывается свойство:

Для того, чтобы неравенство (3) удовлетворялось какая ни была бы функция $f \in S$ невогнутая порядка n , (необходимо и) достаточно, чтобы имело место неравенство $R[x^{n+1}] \cdot R[\pi_{k,l}] \geq 0$, какие ни были неотрицательные целые числа k и l .

Вышеуказанные результаты применяются к ограничению остатка квадратурных формул (10).

SUR LA DÉLIMITATION DU RESTE DANS CERTAINES FORMULES D'APPROXIMATION LINÉAIRES DE L'ANALYSE

RÉSUMÉ

On suppose que le reste $R[f]$ d'une formule d'approximation linéaire est une fonctionnelle linéaire définie sur un espace vectoriel S , formé par les fonctions $f = f(x)$, définies et continues sur un intervalle I . Les fonctions f et la fonctionnelle $R(f)$ sont réelles, et l'espace S contient tous les polynômes. En partant de quelques résultats antérieurs [3], on démontre dans le présent travail la propriété suivante :

Pour que la délimitation (4) ait lieu, où M est donné par (5), il suffit que $R[f]$ ait le degré d'exactitude n et que l'inégalité (3) soit vérifiée pour toute fonction $f \in S$, non-concave d'ordre n .

Nous entendons ici par degré d'exactitude d'une fonctionnelle $R[f]$ un nombre n ayant la propriété que $R[f]$ est nul pour tout polynôme de degré n , mais $R[x^{n+1}] \neq 0$.

On donne ensuite un critère qui permet de connaître si (dans l'hypothèse $R[x^{n+1}] \neq 0$) l'inégalité (3) est vérifiée pour toute fonction $f \in S$, non-concave d'ordre n . Ce critère se base sur l'utilisation de la propriété qu'ont les polynômes d'approximation de S. N. Bernstein de conserver les caractères de convexité des fonctions [2].

On suppose à cette fin que $I = [0, 1]$ et que les éléments de l'espace S aient des dérivées d'ordre j (≥ 0) continues dans $[0, 1]$. On suppose aussi que la fonctionnelle linéaire $R[f]$ soit bornée par rapport à la norme (7). Dans cette hypothèse on démontre la propriété suivante :

Pour que l'inégalité (3) soit vérifiée quelles que soit la fonction $f \in S$ non-concave d'ordre n , il est (nécessaire et) suffisant qu'ait lieu l'inégalité $R[x^{n+1}] \cdot R[\pi_{k,l}] \geq 0$, quels que soient les entiers non-négatifs k et l .

Les résultats ci-dessus s'appliquent à la délimitation du reste de la formule de quadrature (10).

BIBLIOGRAFIE

1. S. N. Bernstein, *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*. Сооб. Харьк. Матем. Об-ва, серия 2, 13, 1—2 (1912).
2. T. Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. Mathematica, 10, 49—54 (1934).
3. — *Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei*. Studii și Cercetări de Matematică (Cluj), X, 2, 337—389 (1959).
4. — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. Mathematica, 1(24), 95—142 (1956).
5. S. Wigert, *Sur l'approximation par polynômes des fonctions continues*. Arkiv för Mat Astr., och Fysik, 22 B, No. 9, 1—4 (1932).

Primit la 29 noembrie 1960.