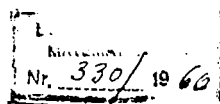


ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Lucrările
celui de al IV-lea

CONGRES AL MATEMATICIENILOR ROMÎNI

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
1960



Théorèmes d'existence déduits d'une équation fonctionnelle de E. Picard

D. V. IONESCU

(Cluj)

E. Picard [1] a étudié l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) - P(x) \varphi(\beta x) + \int_0^x N(x, s) \varphi(s) ds = F(x) \quad (1)$$

avec des hypothèses convenables sur β , $P(x)$, $N(x, s)$ et $F(x)$.

Comme application de l'équation (1), nous avons considéré l'équation fonctionnelle

$$y^{(n)}(x) - P(x) y^{(n)}(\beta x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) y(x) = f(x) \quad (2)$$

et nous avons fait les hypothèses suivantes :

1° $0 < \beta < 1$

2° Le produit $\pi_n(x) = P(x) P(\beta x) \dots P(\beta^n x)$ est uniformément convergent et a une limite $\pi(x)$ dans l'intervalle $[0, a]$, ce qui a lieu lors-

qu'il existe une constante A , telle que $1 \leq l(x) < l^{Ax}$, d'où il résulte que $P(0) = 1$.

3° Les fonctions $a_i(x)$ et $f(x)$ sont continues dans l'intervalle $[0, a]$ et nous avons $|a_i(x)| < A_i x$, $|f(x)| < f x$ lorsque $x \in [0, a]$, d'où $a_i(0) a(0) = f(0) = 0$.

Dans ces conditions, l'équation fonctionnelle (2) a une intégrale $y(x)$ continue pour $x = 0$, unique et qui satisfait aux conditions

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \dots, y_0^{n-1} = y_0^{n-1}, y^{(n)}(0) = k. \quad (3)$$

Nous avons démontré aussi que lorsque a est suffisamment petit, l'équation fonctionnelle (2) admet une intégrale $y(x)$ continue pour $x=0$, et qui satisfait aux conditions

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, y^{(n)}(0) = k,$$

x_0 étant un point quelconque de l'intervalle $[0, a]$.

Bibliographie

1. E. PICARD, *Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie des équations aux dérivées partielles*. C.R. de l'Ac. des Sc. de Paris, 144, 1009-1012 (1907).