

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R. P. R.
FILIALA CLUJ

MATHEMATICA

VOLUMUL 3 (26)

FASCICOLA 2

1961

CLUJ



MATHEMATICA

Vol. 3 (26), fasc. 2

1961

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE

Oleg Aramă, Sur un théorème de W. A. Markov . . .	197
C. Cordonanu, Approximation des solutions d'une équation parabolique dans un domaine non borné .	217
C. Coșniță, Sur les trajectoires isogonales des familles de cercles	225
D. V. Ionescu, La représentation de la différence divisée d'une fonction de deux variables par une intégrale double (suite)	231
E. Gergely, D. Maros, E. Munteanu, Über den Unterschnitt und das Übergangsprofil der mit kegeligem Scheibenfräser bearbeiteten Schnecken	273
A. Харадзе, Об одной формуле A. Angelescu . . .	297
O. Onicescu, On the restricted (simple) random walk .	303
Tiberiu Popoviciu, Sur la conservation de l'allure de convexité d'une fonction par ses polynômes d'interpolation	311
T. Rachwał, L'ordre du contact d'une courbe régulière avec l'hypersphère tangente dans le point d'inflexion d'ordre $n-1$ (Espaces euclidiens R_{2n} et R_{2n+1}). .	331
A. Rényi, On random subsets of a finite set	355
T. T. Vescan, La géométrisation des problèmes de la mécanique relativiste du point matériel	363
V. Vâlcovici, The new form of the principle of virtual displacements	371

SUR LA CONSERVATION DE L'ALLURE DE CONVEXITÉ D'UNE FONCTION PAR SES POLYNOMES D'INTERPOLATION

par

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

§ 1.

Conservation de la convexité par interpolation

1. Considérons l'opérateur linéaire

$$(1) \quad F[f|x] = \sum_{i=0}^m f(x_i)P_i$$

défini sur l'espace des fonctions $f = f(x)$, réelles et d'une variable réelle x , définies sur un ensemble linéaire E contenant les points $x_0, x_1, \dots, x_m$. Nous pouvons supposer que les points x_i sont distincts et sont numérotés par ordre de grandeur croissant, donc

$$(2) \quad x_0 < x_1 < \dots < x_m.$$

Les fonctions

$$(3) \quad P_0, P_1, \dots, P_m$$

caractérisent l'opérateur (1) et sont réelles, de la variable réelle x , définies sur un intervalle non-nul I .*) Pour tout f la valeur de l'opérateur (1) est une fonction définie sur l'intervalle $I^{**})$.

*) C'est-à-dire de longueur non nulle.

**) Les définitions et certains des résultats de ce travail peuvent être étendus facilement au cas où les fonctions (3) sont définies sur un ensemble linéaire quelconque.

L'expression (1) représente et peut donc s'appeler une *fonction d'interpolation* de la fonction f . Les points (2) sont les *noeuds* d'interpolation correspondants.

Si les fonctions (3) sont des polynômes, l'opérateur (1) est un *polynôme d'interpolation* (généralisée) de la fonction f . Dans ce cas le degré du polynôme d'interpolation est égal au plus grand des degrés des polynômes (3).

La dénomination de fonction, respectivement de polynôme d'interpolation est justifiée par le fait que sur tout point commun x_0 des ensembles E et I , la valeur $F[f|x_0]$ de la fonction (1) peut être considérée comme une valeur approximative de $f(x_0)$. Cette approximation s'obtient par le procédé d'interpolation exprimé par l'opérateur (1).

Nous entendons ici l'interpolation dans un sens généralisé. La fonction (1) est une fonction d'interpolation (un polynôme d'interpolation) proprement dite si l'intervalle I contient les noeuds (2) et si les fonctions $F[f|x]$, f coïncident sur les noeuds, quelle que soit la fonction f . Cette dernière condition s'exprime par les conditions

$$(4) \quad P_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq i \\ 1, & \text{si } j = i, \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

De cette forme est, par exemple, le polynôme d'interpolation de Lagrange, divers types de polynômes d'interpolation dus à L. FEJÉR [1], etc. Mais, il existe aussi des polynômes d'interpolation ne vérifiant pas les conditions (4) et présentant pourtant une grande importance. Tel est le polynôme, bien connu, de S. N. Bernstein

$$(5) \quad \sum_{i=0}^m f\left(\frac{i}{m}\right) \binom{m}{i} x^i (1-x)^{m-i}$$

Dans ce cas nous avons

$$x_i = \frac{i}{m}, \quad P_i = \binom{m}{i} x^i (1-x)^{m-i}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

2. Le polynôme (5) jouit de la propriété importante qu'il conserve le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$, donc que, pour toute fonction f non-négative (sur E), il est non-négatif sur $[0,1]$.

J'ai démontré autrefois [2] que les polynômes (5) jouissent encore d'autres propriétés de conservation de l'allure de la fonction f . Si la fonction f est non-décroissante ou bien, en général, si elle est non-concave d'ordre n (sur E) il en est de même pour le polynôme (5) sur $[0,1]$. Les polynômes (5) de S. N. Bernstein conservent donc (sur $[0,1]$) la non-concavité de tout ordre (≥ -1) de la fonction f .

Nous pouvons introduire la

Définition 1. Nous dirons que la fonction d'interpolation (1) conserve (sur l'intervalle I) la non-concavité d'ordre n (de la fonction f) si, la fonction (1) est non-concave d'ordre n (sur I) pour toute fonction f non-concave d'ordre n (sur E).

3. Rappelons qu'une fonction est dite non-concave d'ordre $n (\geq -1)$ sur E si toutes les différences divisées d'ordre $n+1$ de cette fonction, sur $n+2$ points (distincts) quelconques de E , sont non-négatives. Si toutes ces différences divisées sont positives, la fonction est dite, en particulier, convexe d'ordre n sur E . La non-concavité respectivement la convexité d'ordre -1 est équivalente à la non-négativité respectivement à la positivité de la fonction. La non-concavité respectivement la convexité d'ordre 0 est équivalente à la non-décroissance respectivement à la croissance de la fonction. Enfin, la non-concavité respectivement la convexité d'ordre 1 est équivalente à la non-concavité respectivement à la convexité habituelle de la fonction.

Si les différences divisées d'ordre $n+1$ de la fonction sont toutes non-positives respectivement toutes négatives, nous disons que cette fonction est non-convexe respectivement concave d'ordre n (sur E). Il y a des spécifications analogues à celles de plus haut dans les cas $n = -1, 0$ ou 1 .

Si la fonction f est non-concave respectivement convexe d'ordre n , la fonction $-f$ est non-convexe respectivement concave d'ordre n et réciproquement.

Une fonction qui a toutes ses différences divisées d'ordre $n+1$ nulles est dite polynomiale d'ordre n (sur E). Pour qu'une fonction soit polynomiale d'ordre n il faut et il suffit qu'elle soit à la fois non-concave et non-convexe d'ordre n .

La convexité (concavité) et la polynomialité sont des cas particuliers de la non-concavité (non-convexité) du même ordre. Si une fonction est non-concave d'ordre $n \geq 0$ sur l'intervalle non nul I , mais si elle n'est pas convexe d'ordre n (sur I), il existe un sous-intervalle non nul de I sur lequel la fonction est polynomiale d'ordre n . Cette propriété n'est évidemment pas vraie pour $n = -1$.

Si l'ensemble E est formé par au plus $n+1$ points ($n \geq 0$), toute fonction définie sur E est polynomiale d'ordre n (sur E).

Un polynôme de degré n est une fonction de la forme

$$(6) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

les a_i (les coefficients du polynôme) étant des constantes quelconques. Si $a_0 \neq 0$ le polynôme (6) est de *degré effectif* n . Toute fonction polynomiale d'ordre $n (\geq 0)$ est un polynôme de degré n^*). La fonction (identiquement) nulle est une fonction polynomiale de tout ordre $n \geq -1$, donc un poly-

*) Pour simplifier nous pouvons, sans aucun inconvénient, confondre un polynôme avec une fonction polynomiale, quoique les deux notions sont logiquement distinctes.

nome de tout degré $n \geq -1$. On peut supposer que le degré effectif de ce polynôme est égal à -1 .

Nous désignons par $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}; f]$ la différence divisée d'ordre n et par $L(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}; f|x)$ le polynôme de Lagrange, donc le polynôme prenant les valeurs de la fonction f sur les noeuds $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n+1$.

Dans la suite nous utiliserons un certain nombre de propriétés des fonctions convexes d'ordre supérieur, des différences divisées et des polynômes de Lagrange. Ces propriétés sont, en général, connues. Les plus importantes seront brièvement rappelées à mesure qu'elles interviendront.

4. Nous nous proposons de trouver des conditions que doivent remplir les fonctions (3) pour que la fonction d'interpolation (1) conserve la non-concavité d'ordre n de la fonction f .

Avant d'aller plus loin remarquons qu'on peut donner une définition analogue à la définition 1 pour la conservation de la non-convexité et de la polynomialité. D'ailleurs, toute fonction d'interpolation (1) qui conserve la non-concavité conserve aussi la non-convexité du même ordre et réciproquement.

En particulier donc,

THÉORÈME 1. Si la fonction d'interpolation (1) conserve la non-concavité d'ordre n , elle se réduit à un polynôme de degré n pour tout polynôme f de degré n^* .

Nous avons aussi le

THÉORÈME 2. Si $n \geq m$, pour que la fonction d'interpolation (1) conserve la non-concavité d'ordre n , il faut et il suffit que les fonctions (3) se réduisent à des polynômes de degré n .

En effet, le polynôme

$$f = \lambda \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_m)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_m)}$$

est une fonction non-concave d'ordre n , quel que soit la constante λ (à cause de l'inégalité $m \leq n$). Pour cette fonction nous avons $F[f|x] = \lambda P_i$ et il est nécessaire et suffisant que P_i et $-P_i$ soient non-concaves d'ordre n , donc que P soit un polynôme de degré n .

Il en résulte que si la fonction d'interpolation (1) conserve la non-concavité de tout ordre $n \geq -1$, les fonctions (3) se réduisent à des polynômes de degré m et, de plus, la fonction $F[f|x]$ se réduit à un polynôme de degré n (≥ -1) si f est un polynôme de degré n . Une fonction d'interpolation (1) qui conserve la non-concavité de tout ordre est donc un polynôme de degré m qui n'élève jamais son degré si f est un polynôme.

*) Pour $n = -1$, la propriété est banale et résulte de la linéarité de l'opérateur (1).

5. Il est facile de voir qu'il existe des fonctions d'interpolation (1) conservant la non-concavité d'ordre quelconque $n \geq -1$. Pour obtenir une telle fonction d'interpolation il suffit de prendre pour les fonctions (3) des constantes non-négatives quelconques. On peut même affirmer que tout polynôme d'interpolation de degré k conserve la non-concavité de tout ordre $n \geq k$.

6. Pour que la fonction d'interpolation (1) conserve la non-concavité d'ordre -1 (la non-négativité) il faut et il suffit que les fonctions (3) soient non-négatives.

Supposons maintenant que $0 \leq n \leq m-1$. D'après une formule de transformation des différences divisées [5] nous avons

$$(7) \quad F[f|x] = \sum_{i=0}^n [x_0, x_1, \dots, x_i; f] Q_i + \sum_{i=0}^{m-n-1} [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f] R_{n,i}$$

où

$$(8) \quad Q_i = \sum_{j=i}^m (x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{i-1}) P_j, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

$$(9) \quad R_{n,i} = (x_{i+n+1} - x_i) \sum_{j=i+n+1}^m (x_j - x_{i+1})(x_j - x_{i+2}) \dots (x_j - x_{i+n}) P_j,$$

$$i = 0, 1, \dots, m-n-1, \quad n = 0, 1, \dots, m-1.$$

Ici le produit $(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{i-1})$ si $i = 0$ et le produit $(x_j - x_{i+1})(x_j - x_{i+2}) \dots (x_j - x_{i+n})$ si $n = 0$ sont remplacés par 1.

Nous avons alors le

THÉORÈME 3. Si $0 \leq n \leq m-1$, pour que la fonction d'interpolation (1) conserve sur I la non-concavité d'ordre n de toute fonction f non-concave d'ordre n sur les points (2), il faut et il suffit que les fonctions $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ soient des polynômes de degré n et $R_{n,0}, R_{n,1}, \dots, R_{n,m-n-1}$ des fonctions non-concaves d'ordre n (sur I).

La propriété résulte facilement en remarquant qu'on peut trouver une fonction non-concave d'ordre n sur les points (2) telle que $[x_0, x_1, \dots, x_i; f], i = 0, 1, \dots, n$ prennent des valeurs réelles quelconques et $[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f], i = 0, 1, \dots, m-n-1$ des valeurs réelles non-négatives quelconques. Il faut aussi tenir compte du fait que toute combinaisons linéaire de fonctions non-concaves d'ordre n , avec des coefficients non-négatifs, est aussi une fonction non-concave d'ordre n .

Si les fonctions (3) sont $(n+1)$ -fois dérivables, donc, en particulier, si elles sont des polynômes, les conditions du théorème 3 peuvent s'écrire

$$(10) \quad Q_i^{(n+1)} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$(11) \quad R_{n,i}^{(n+1)} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-n-1.$$

En effet, pour qu'une fonction $(n+1)$ -fois dérivable soit non-concave d'ordre n , il faut et il suffit que sa dérivée d'ordre $n+1$ soit non-négative.

Enfin, il est facile de voir que de ce qui précède résulte aussi le

THÉORÈME 4. *Pour que la fonction d'interpolation (1) conserve (sur I) toute non-concavité d'ordre $n \geq -1$, des fonctions f non-concaves d'ordre n sur les points (2), il faut et il suffit que Q_i soit un polynôme de degré i pour $i = 0, 1, \dots, m$ et que pour tout $n \geq -1$ et $i = 0, 1, \dots, m-n-1$, le polynôme $R_{n,i}$ soit non-concave d'ordre n (sur I).*

Remarquons que du fait que Q_i est un polynôme de degré i pour $i = 0, 1, \dots, m$ il résulte que les fonctions (3) sont des polynômes de degré m . Pour compléter les formules (9) nous prenons $R_{-1,i} = P_i, i = 0, 1, \dots, m$ et on voit que $R_{n,i}$ sont tous des polynômes de degré m . Les conditions de l'énoncé peuvent aussi s'écrire

$$(12) \quad Q_i^{(i+1)} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

$$(13) \quad R_{n,i}^{(n+1)} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-n-1, \quad n = -1, 0, 1, \dots, m-1.$$

7. Dans les théorèmes 3, 4 on suppose essentiellement que l'ensemble de définition E de la fonction f se réduit à l'ensemble des points (2). La non-prolongeabilité des fonctions non-concaves d'ordre > 1 [3] nous montre que si E est un ensemble quelconque contenant les points (2) on peut seulement affirmer que les conditions des théorèmes sont seulement suffisantes. Nous avons donc les

THÉORÈME 3'. *Si $0 \leq n \leq m-1$, pour que la fonction d'interpolation (1) conserve la non-concavité d'ordre n , il suffit que $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ soient des polynômes de degré n et que les fonctions $R_{n,0}, R_{n,1}, \dots, R_{n,m-n-1}$ soient non-concaves d'ordre n .*

THÉORÈME 4'. *Pour que la fonction d'interpolation (1) conserve toutes les non-concavités d'ordres $n \geq -1$, il suffit que Q_i soit un polynôme de degré i pour $i = 0, 1, \dots, m$ et que pour $i = 0, 1, \dots, m-n-1, n = -1, 0, 1, \dots, m-1$, le polynôme $R_{n,i}$ soit non-concave d'ordre n .*

8. Nous savons que les fonctions non-concaves d'ordre $-1, 0$ ou 1 sont toujours et partout prolongeables. Nous en déduisons donc le

THÉORÈME 5. 1°. *Pour que la fonction d'interpolation (1) conserve la non-négativité il faut et il suffit que les fonctions (3) soient non-négatives.*

2°. *Pour que la fonction d'interpolation (1) conserve la non-décroissance il faut et il suffit que la somme $P_0 + P_1 + \dots + P_m$ se réduise à une constante et que les fonctions*

$$\sum_{j=i+1}^m P_j, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

soient non-décroissantes.

3°. *Pour que la fonction d'interpolation (1) conserve la non-concavité habituelle (d'ordre 1) il faut et il suffit que les sommes*

$$\sum_{j=0}^m P_j, \quad \sum_{j=1}^m (x_j - x_0) P_j$$

se réduisent à des polynômes de degré 1 et que les fonctions

$$\sum_{j=i+2}^m (x_j - x_{i+1}) P_j, \quad i = 0, 1, \dots, m-2$$

soient non-concaves d'ordre 1.

Nous avons tenu compte des formules (8) et (9) et de la numérotation (2) des noeuds.

Il est facile de trouver des énoncés analogues pour $m = 0$ et $m = 1$.

Lorsque $n > 1$, les conditions nécessaires et suffisantes sont plus compliquées. Lorsque n est quelconque mais $m = n+1$ les conditions du théorème 3' sont encore nécessaires (même si $n > 1$). En effet, dans ce cas toute fonction non-concave d'ordre n sur les noeuds est toujours et partout prolongeable, notamment par le polynôme de Lagrange $L(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}; f|x)$.

9. En introduisant une légère restriction par la modification de la définition 1, on peut obtenir des résultats plus intéressants. Cette modification consiste en à exiger la conservation non seulement de la non-concavité, mais aussi de la convexité.

Nous introduisons la

Définition 2. *Nous dirons que la fonction d'interpolation (1) conserve (sur l'intervalle I) la convexité d'ordre n (de la fonction f) si la fonction (1) est convexe d'ordre n (sur I) pour toute fonction f convexe d'ordre n (sur E).*

Si on tient compte du fait que la limite d'une suite convergente de fonctions non-concaves d'ordre n est également une fonction non-concave

d'ordre n et que toute fonction *non-concave* est la limite d'une suite convergente de fonctions *convexes* de même ordre (par exemple, des fonctions $f + \varepsilon x^{n+1}$ pour $\varepsilon > 0$ et tendant vers 0), on déduit que toute fonction d'interpolation (1) qui conserve la convexité d'ordre n , conserve aussi la non-concavité d'ordre n .

En vertu du théorème 2, la fonction d'interpolation (1) ne peut conserver aucune convexité d'ordre $n \geq m$. Il suffit donc d'examiner le cas $n \leq m - 1$.

En supposant $n \leq m - 1$, pour qu'une fonction d'interpolation (1), qui conserve la non-concavité d'ordre n , conserve aussi la convexité d'ordre n il faut et il suffit qu'en plus des conditions des théorèmes 3, 4, 3', 4' :

1°. Si $n = -1$, les fonctions (3) ne soient pas nulles à la fois.

2°. Si $n \geq 0$, les fonctions $R_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, m - n - 1$, ne se réduisent pas toutes à des polynômes de degré n sur un même sous-intervalle non nul de I .

Il est facile d'énoncer, avec ces précisions, les théorèmes correspondants aux théorèmes 3, 4, 3', 4' et relatifs à la conservation de la convexité d'ordre $n \leq m - 1$. Les fonctions convexes d'ordre $-1, 0$ ou 1 sur les noeuds (2) peuvent toujours et partout se prolonger (au sens strict) [4]. On peut donc énoncer pour les convexités d'ordre $-1, 0$ ou 1 un théorème analogue au théorème 5. Les conditions trouvées sont nécessaires si n est quelconque et $m = n + 1$, pour la même raison.

Comme dans le cas de la non-concavité, on peut aussi donner une définition de la conservation de la concavité. On voit facilement que toute fonction d'interpolation (1) qui conserve la convexité, conserve aussi la concavité du même ordre et réciproquement.

10. Si les fonctions (3) sont des polynômes, donc lorsqu'il s'agit d'un polynôme d'interpolation, le fait que $Q_0, Q_1, \dots, Q_n, R_{n,0}, R_{n,1}, \dots, R_{n,m-n-1}$ se réduisent tous à des polynômes de degré n est équivalent au fait que les polynômes (3) sont tous de degré n .

Si la fonction d'interpolation (1) conserve la non-concavité d'ordre n , le fait que les fonctions (3) se réduisent toutes à des polynômes de degré n est équivalent, en vertu des égalités (10), au fait que les fonctions $P_0, P_1, \dots, P_n$ ou bien que les fonctions $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_m$ se réduisent à des polynômes de degré n . Nous pouvons donc énoncer le

THÉOREME 6. Si $n \leq m - 1$, pour que le polynôme d'interpolation (1) conserve la convexité d'ordre n il faut et il suffit qu'il conserve la non-concavité d'ordre n et que les polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ ou bien que les polynômes $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_m$ ne se réduisent pas tous à des polynômes de degré n .

En particulier, nous avons le

THÉOREME 7. Pour que le polynôme d'interpolation (1) conserve toutes les convexités d'ordre $n \leq m - 1$ il faut et il suffit qu'il conserve les non-concavités de tous les ordres et que les polynômes P_0, P_m soient de degré effectif m .

D'ailleurs si l'un des polynômes P_0, P_m est de degré effectif m , l'autre l'est également.

Dans ce cas, si $m > 0$, le polynôme P_0 est décroissant et ne peut donc s'annuler qu'au plus sur l'extrémité droite de l'intervalle I . De même le polynôme P_m est croissant et ne peut donc s'annuler qu'au plus sur l'extrémité gauche de l'intervalle I . On voit ainsi d'une autre manière que la condition de conservation non seulement de la non-négativité, mais celle de la positivité est vérifiée.

11. Par symétrie, on peut mettre les conditions exprimées par les fonctions (3) à l'aide des fonctions Q_i et $R_{n,i}$, sous une autre forme. On peut obtenir ces conditions symétriques en utilisant, au lieu de (7), la formule de transformation

$$(7') \quad F[f|x] = \sum_{i=0}^n [x_{m-i}, x_{m-i+1}, \dots, x_m; f] \bar{Q}_i + \sum_{i=0}^{m-n-1} [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f] \bar{R}_{n,i}$$

où

$$(8') \quad \bar{Q}_i = \sum_{j=0}^{m-i} (x_j - x_m)(x_j - x_{m-1}) \dots (x_j - x_{m-i+1}) P_j$$

$$i = 0, 1, \dots, m$$

$$(9') \quad \bar{R}_{n,i} = (x_i - x_{i+n+1}) \sum_{j=0}^i (x_j - x_{i+1})(x_j - x_{i+2}) \dots (x_j - x_{i+n}) P_j$$

$$i = 0, 1, \dots, m - n - 1, \quad n = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Les conditions pour l'ordre n sont que $\bar{Q}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ soient des polynômes de degré n et $\bar{R}_{n,i}$ des fonctions non-concaves d'ordre n . On peut d'ailleurs déduire ces conditions en exprimant linéairement les fonctions $\bar{Q}_i, \bar{R}_{n,i}$ par rapport aux fonctions $Q_i, R_{n,i}$. Ces relations sont

$$\bar{Q}_i = \sum_{j=0}^i [x_0, x_1, \dots, x_j; \bar{\varphi}_i] Q_j, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

$$\text{où } \bar{\varphi}_i = (x - x_m)(x - x_{m-1}) \dots (x - x_{m-i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (\bar{\varphi}_0 = 1)$$

$$\bar{R}_{n,i} = R_{n,i} + (x_i - x_{i+n+1}) \sum_{j=0}^n [x_0, x_1, \dots, x_j; \varphi_{i,n}] Q_j$$

$$i = 0, 1, \dots, m - n - 1, \quad n = 0, 1, \dots, m - 1$$

$$\text{où } \varphi_{i,n} = (x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) \dots (x - x_{i+n}).$$

Réciproquement, nous avons

$$Q_i = \sum_{j=0}^i [x_m, x_{m-1}, \dots, x_{m-j}; \varphi_i] \bar{Q}_j, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

où $\varphi_i = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})$, $i = 0, 1, \dots, m$ ($\varphi_0 = 1$),

$$R_{n,i} = \bar{R}_{n,i} + (x_{i+n+1} - x_i) \sum_{j=0}^n [x_m, x_{m-1}, \dots, x_{m-j}; \varphi_{i,n}] \bar{Q}_j;$$

$$i = 0, 1, \dots, m - n - 1, \quad n = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Nous avons aussi $R_{-1,i} = \bar{R}_{-1,i} = P_i$, $i = 0, 1, \dots, n$

§ 2.

Existence des polynômes d'interpolation conservant la convexité

12. Nous allons démontrer que si les noeuds (2) sont donnés quelconques, il existe des polynômes d'interpolation (1) de degré m qui conservent toutes les convexités d'ordre $\leq m - 1$, donc qui conservent aussi toutes les non-concavités d'ordre ≥ -1 , sur un intervalle fini non-nul I . Nous désignerons par a, b , $a < b$ les extrémités de I .

Nous allons construire un polynôme d'interpolation de la forme cherchée en utilisant le

L e m m e 1. Si I est un intervalle fini, d'extrémités a, b , $a < b$, si $0 \leq i \leq m$ et si $S_0, S_1, \dots, S_{i+1}$ sont $i + 2$ polynômes de degré m , on peut trouver un polynôme P de degré m tel que l'on ait

$$(14) \quad P^{(j)} \geq S_j^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, i, \quad P^{(i+1)} = S_{i+1}^{(i+1)}$$

sur I^* .

*) On peut énoncer une propriété un peu plus générale sous la forme suivante :

Si I est un intervalle fini et si $Z_0, Z_1, \dots, Z_{i+1}$ sont $i + 2$ ($i \geq 0$) polynômes, dont le dernier est de degré k , on peut trouver un polynôme P de degré $k + i + 1$ tel que l'on ait

$$P^{(j)} \geq Z_j, \quad j = 0, 1, \dots, i + 1,$$

sur I .

Si le polynôme Z_{i+1} est de degré effectif k , on peut choisir, parmi l'infinité des solutions du problème, un polynôme P de degré effectif $k + i + 1$.

En effet, le polynôme

$$P = S_{i+1} + \sum_{j=0}^i \lambda_j \frac{(x-a)^{i-j}}{(i-j)!}$$

où les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i$ vérifient les inégalités

$$(15) \quad \lambda_j \geq \sup_{(1)} \left[S_{i-j}^{(i-j)} - S_{i+1}^{(i-j)} - \sum_{v=0}^{j-1} \lambda_v \frac{(x-a)^{j-v}}{(j-v)!} \right]$$

$$j = 0, 1, \dots, i$$

et où pour $j = 0$ la somme de $v = 0$ à $v = j - 1$ du second membre est remplacée par 0, vérifie le lemme 1. Les sup du second membre sont toujours finis et on peut donc successivement déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i$.

Il est clair que de cette manière on obtient toutes les solutions du lemme 1. Parmi ces solutions on peut distinguer comme une sorte de *solution minimale*, le polynôme

$$P^* = S_{i+1} + \sum_{j=0}^i \lambda_j^* \frac{(x-a)^{i-j}}{(i-j)!}$$

où les coefficients $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_i^*$ sont donnés successivement par les égalités

$$\lambda_j^* = \sup_{(1)} \left[S_{i-j}^{(i-j)} - S_{i+1}^{(i-j)} - \sum_{v=0}^{j-1} \lambda_v^* \frac{(x-a)^{j-v}}{(j-v)!} \right]$$

$$j = 0, 1, \dots, i.$$

13. En appliquant le lemme 1 on peut construire les polynômes (3) de degré m tel que les conditions (12) et (13) soient vérifiées. Nous groupons d'abord ces conditions sous la forme

$$(16_i) \quad Q_i^{(i+1)} = 0, \quad R_{s-1,i-s}^{(s)} \geq 0, \quad s = 0, 1, \dots, i$$

$$i = 0, 1, \dots, m$$

et remarquons que dans le groupe (16_i) ne figurent pas les polynômes $P_0, P_1, \dots, P_{i-1}$ ($i \geq 1$).

Compte tenant de (8) et (9), les relations (16_i) peuvent s'écrire

$$(17_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_i^{(s)} \geq - \frac{1}{\prod_{v=1}^{s-1} (x_i - x_{i-v})} \sum_{j=i+1}^m \left[\prod_{v=1}^{s-1} (x_j - x_{i-v}) \right] P_j^{(s)} \\ \quad s = 0, 1, \dots, i \\ P_i^{(i+1)} = - \frac{1}{\prod_{v=0}^{i-1} (x_i - x_v)} \sum_{j=i+1}^m \left[\prod_{v=0}^{i-1} (x_j - x_v) \right] P_j^{(i+1)} \\ \quad i = 0, 1, \dots, m \end{array} \right.$$

la première (pour $i \geq 0$) et la seconde (pour $i \geq 1$) relation étant

$$P_i \geq 0, \quad P'_i \geq - \sum_{j=i+1}^m P'_j.$$

respectivement

Remarquons que si les (3) sont des polynômes de degré m , les relations (17_i) sont bien de la forme (14). On peut donc déterminer, à l'aide du lemme 1, successivement les polynômes $P_m, P_{m-1}, \dots, P_1, P_0$.

En particulier, le groupe (17_m) nous montre que

$$P_m = \rho(x - a)^m + c_1(x - a)^{m-1} + \dots + c_m$$

où $\rho, c_1, c_2, \dots, c_m$ sont non-négatifs.

De cette manière, en prenant $\rho > 0$, on obtient tous les polynômes d'interpolation (1) de degré m qui conservent les convexités d'ordre $-1, 0, 1, \dots, m-1$ et en supposant que l'ensemble E coïncide avec l'ensemble de points (2). Si $m = 0, 1, 2$ ou 3 , même sans cette dernière restriction.

En imposant la condition moins restrictive $\rho \geq 0$, on obtient tous les polynômes d'interpolation (1) qui conservent la non-concavité de tout ordre, toujours en prenant l'ensemble des points (2) comme ensemble E .

14. En prenant $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ et en déterminant successivement les solutions minimales des inégalités (17_{m-1}), (17_{m-2}), ..., (17₀), on trouve une sorte de *polynôme d'interpolation minimal* vérifiant les conditions cherchées. Dans ce cas les polynômes (3) ont tous en commun le facteur constant ρ . Si on détermine cette constante de manière que la somme des polynômes (3) soit égale à 1, nous dirons que nous avons obtenu le polynôme d'interpolation minimal *normalisé*.

15. La structure du polynôme minimal dépend des rapports des distances mutuelles des noeuds (2), mais cette structure est, en général, très compliquée. Cette complication résulte déjà des exemples simples que nous donnons ici.

Exemples. 1. $m = 1$. Le polynôme minimal normalisé est

$$f(x_0) \frac{b-x}{b-a} + f(x_1) \frac{x-a}{b-a}$$

D'ailleurs la solution générale est donnée par les formules

$$P_0 = \rho(x - a) + \lambda, \quad P_1 = \rho(b - x) + \mu$$

où ρ, λ, μ sont des constantes non-négatives.

2. $m = 2$. Le polynôme minimal (pour $\rho = 1$) s'obtient par les formules

$$P_0 = k(x - b)^2, \quad P_2 = (x - a)^2,$$

$$P_1 = -(k + 1)(x - a)^2 + 2k(b - a)(x - a) - \tau(b - a)^2,$$

$$\text{où } k = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}, \quad \tau = \frac{1 - k + |1 - k|}{2}.$$

3. $m = 3$ et les noeuds sont symétriquement distribués, donc $x_0 + x_3 = x_1 + x_2$.

Le polynôme minimal (pour $\rho = 1$) est donné par les formules

$$P_0 = (b - x)^3, \quad P_3 = (x - a)^3$$

$$P_1 = (2k + 1)(b - x)^3 + 3k(b - a)(x - b)^2 + \tau(b - a)^3$$

$$P_2 = -(2k + 1)(x - a)^3 + 3k(b - a)(x - a)^2 + \tau(b - a)^3$$

$$\text{où } k = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}, \quad \tau = \frac{1 - k + |1 - k|}{2}.$$

16. La difficulté de la construction effective d'une solution du lemme 1, telle que nous l'avons indiquée, consiste dans la nécessité de calculer les sup des seconds membres des inégalités (15). Nous pouvons aussi déterminer une solution en utilisant une autre méthode, que nous allons indiquer.

Considérons une suite de nombres $c_0, c_1, \dots, c_m$ et désignons par

$$\Delta c_v = c_{v+1} - c_v, \quad v = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$\Delta^k c_v = \Delta^{k-1} c_{v+1} - \Delta^{k-1} c_v, \quad v = 0, 1, \dots, m-k, \quad k = 2, 3, \dots, m$$

les différences successives de ces nombres. Nous avons alors le

Lemme 2. Si $0 \leq i \leq m$ et si $\lambda_{j,v}$, $v = 0, 1, \dots, m-j$, $j = 0, 1, \dots, i+1$ sont des nombres donnés, on peut déterminer la suite $c_0, c_1, \dots, c_m$ telle que l'on ait

$$(18_j) \quad \Delta^j c_v \geq \lambda_{j,v}, \quad v = 0, 1, \dots, m-j, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

$$(18_{i+1}) \quad \Delta^{i+1} c_v = \lambda_{i+1,v}, \quad v = 0, 1, \dots, m-i-1$$

En effet, la suite $c_0, c_1, \dots, c_m$ est complètement déterminée par la suite des différences $c_0, \Delta c_0, \Delta^2 c_0, \dots, \Delta^m c_0$.

Remarquons maintenant que

$$\Delta^j c_v = \sum_{r=0}^v \binom{v}{r} \Delta^{j+r} c_0$$

et alors les inégalités (18_j) peuvent s'écrire

$$\Delta^j c_0 \geq \lambda_{j,v} - \sum_{r=1}^v \binom{v}{r} \Delta^{j+r} c_0, \quad v = 0, 1, \dots, m-j$$

la somme du second membre étant remplacée par 0 si $v = 0$.

Les différences $\Delta^{i+1} c_0, \Delta^{i+2} c_0, \dots, \Delta^m c_0$ sont complètement déterminées par les égalités (18_{i+1}) . Si donc nous choisissons successivement $\Delta^i c_0, \Delta^{i-1} c_0, \dots, \Delta c_0, c_0$ de manière que l'on ait

$$\Delta^j c_0 \geq \max_{v=0,1,\dots,m-j} \left[\lambda_{j,v} - \sum_{r=1}^v \binom{v}{r} \Delta^{j+r} c_0 \right], \quad j = i, i-1, \dots, 1, 0,$$

la suite $c_0, c_1, \dots, c_m$ vérifie le lemme 2.

Ici encore on peut mettre en évidence une sorte de solution minimale, en déterminant les $\Delta^i c_0, \Delta^{i-1} c_0, \dots, \Delta c_0, c_0$ par les égalités

$$\Delta^j c_0 = \max_{v=0,1,\dots,m-j} \left[\lambda_{j,v} - \sum_{r=1}^v \binom{v}{r} \Delta^{j+r} c_0 \right], \quad j = i, i-1, \dots, 1, 0.$$

17. Une solution du lemme 1 s'obtient maintenant de la manière suivante.

Remarquons que tout polynôme P de degré m peut être mis sous la forme

$$(19) \quad P = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} p_v (x-a)^v (b-x)^{m-v}$$

Si les coefficients $p_0, p_1, \dots, p_m$ sont non-négatifs le polynôme (19) est non-négatif sur l'intervalle $[a, b]$. Ce polynôme est nul identiquement si et seulement si $p_0 = p_1 = \dots = p_m = 0$. La dérivée du polynôme (19) peut s'écrire sous la forme

$$P' = m \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v} \Delta p_v (x-a)^v (b-x)^{m-1-v}.$$

donc sa dérivée d'ordre j sous la forme

$$P^{(j)} = m(m-1) \dots (m-j+1) \sum_{v=0}^{m-j} \binom{m-j}{v} \Delta^j p_v (x-a)^v (b-x)^{m-j-v}.$$

Posons maintenant

$$S_j = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} s_v^{(j)} (x-a)^v (b-x)^{m-v}, \quad j = 0, 1, \dots, i+1$$

Si nous cherchons le polynôme P sous la forme (19), pour réaliser les inégalités (14) il suffit d'avoir

$$\Delta^j p_v \geq \Delta^j s_v^{(j)}, \quad v = 0, 1, \dots, m-j, \quad j = 0, 1, \dots, i,$$

$$\Delta^{i+1} p_v = \Delta^{i+1} s_v^{(i+1)}, \quad v = 0, 1, \dots, m-i-1$$

et le lemme 1 résulte du lemme 2.

Il est clair ce qu'il faut entendre par la solution minimale du lemme obtenue par cette méthode.

18. Pour construire un polynôme d'interpolation (1) conservant la convexité pour tout ordre $\leq m-1$, on peut chercher les polynômes (3) sous la forme

$$P_j = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} p_v^{(j)} (x-a)^v (b-x)^{m-v}, \quad j = 0, 1, \dots, m$$

On cherche alors les solutions des systèmes (17_i) , en appliquant le lemme 2. On peut ici encore mettre en évidence le polynôme minimal en déterminant toujours les solutions minimales, dans le sens du nr. précédent, et en partant du polynôme $P_m = \rho(x-a)^m$.

Dans le cas $m = 2$ et dans le cas $m = 3$ et des noeuds symétriquement distribués, les polynômes minimaux (pour $\rho = 1$) dans les deux sens coïncident.

§ 3.

Non conservation de la convexité par le polynôme de Lagrange

19. Il est à prévoir que le polynôme de Lagrange $L(x_0, x_1, \dots, x_m; f|x)$ ne peut conserver, en général, la non-concavité d'ordre n de la fonction f . En ce sens nous allons démontrer le

THÉORÈME 8. Si $n \geq -1$ et $m > n + 2$, le polynôme de Lagrange $L(x_0, x_1, \dots, x_m; f|x)$ ne conserve pas la non-concavité d'ordre n de la fonction f définie sur les points (2), sur aucun intervalle (non nul) de l'axe réel.

Il suffit de démontrer la propriété pour tout intervalle fermé et fini $[a, b]$ qui ne contient aucun noeuds (2).

Considérons le polynôme

$$P = \frac{2 \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{n+3}}{(n+2)(n+3)} - \varepsilon x^{n+2}$$

où ε est un nombre positif.

Soit f la fonction qui prend les valeurs du polynôme P sur les points (2). Alors nous avons $L(x_0, x_1, \dots, x_m; f|x) = P$, puisque P est un polynôme de degré m .

Un calcul simple nous donne

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f] = \left(\frac{a+b}{2} - \frac{x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+n+1}}{n+2} \right)^2 + \frac{1}{n+3} \sum_{\mu, \nu=i}^{i+n+1} (x_\mu - x_\nu)^2 - \varepsilon$$

Il en résulte que si ε est assez petit les différences divisées $[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f]$, $i = 0, 1, \dots, m - n - 1$ sont positives et la fonction f est alors convexe d'ordre n sur les points (2). Mais la valeur sur le point $\frac{a+b}{2}$ de la $(n+1)$ -ième dérivée du polynôme P est égale à $-(n+1)!\varepsilon$ qui est un nombre négatif. Le polynôme P n'est donc pas non-concave d'ordre n sur l'intervalle $[a, b]$ (dans le voisinage du milieu de cet intervalle).

Le théorème 8 est donc démontré.

20. Pour compléter le résultat précédent remarquons que :

1°. Si $m = n + 1$ le polynôme de Lagrange $L(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}; f|x)$ conserve la non-concavité d'ordre n de la fonction f sur tout intervalle I .

2°. Si $m = n + 2$, nous avons

$$\begin{aligned} L^{(n+1)}(x_0, x_1, \dots, x_{n+2}; f|x) &= \\ &= \frac{(n+2)!}{x_{n+2} - x_0} \left\{ [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] \left(x - \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - [x_0, x_1, \dots, x_{n+1}; f] \left(x - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+2}}{n+2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Il en résulte que le polynôme de Lagrange $L(x_0, x_1, \dots, x_{n+2}; f|x)$ conserve la non-concavité d'ordre n sur l'intervalle I si et seulement si c'est un sous-intervalle de l'intervalle

$$\left[\frac{x_0 + x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+2}, \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+2}}{n+2} \right]$$

21. Dans le théorème 8 on suppose essentiellement que la fonction f est définie seulement sur les points (2). Supposons maintenant que f soit une fonction définie sur un intervalle E contenant les points (2).

Avant d'énoncer certains résultats dans ce cas, nous allons établir quelques lemmes préliminaires.

Soit $[a, b]$, ($a < b$) un intervalle fini et fermé qui contient les noeuds (2), n un nombre entier ≥ -1 et prenons les nombres naturels k, l tels que :

a) Si $n = -1$, k et l sont impairs.

b) Si $n \geq 0$, $k + l - n - 1$ est un nombre pair ≥ 2 .

Nous avons le

L e m m e 3. Le polynôme

$$(20) \quad P = (x - a)^k (x - b)^l$$

n'est pas non-concave d'ordre n sur $[a, b]$.

Pour $n = -1$ la propriété est vraie puisqu'alors le polynôme P est négatif sur l'intervalle ouvert (a, b) . Pour $n \geq 0$ la propriété est équivalente au fait que la $(n+1)$ -ième dérivée $P^{(n+1)}$ n'est pas non-négative sur $[a, b]$. Mais $P^{(n+1)}$ a certainement au moins une racine simple dans (a, b) et change donc de signe entre a et b .

Considérons maintenant la fonction f^* définie par les égalités

$$(21) \quad f^* = \begin{cases} 0, & \text{sur } [a, b] \\ P, & \text{sur } (-\infty, a) \cup (b, \infty), \end{cases}$$

P étant le polynôme (20).

Nous avons le

L e m m e 4. La fonction f^* est non-concave d'ordre n sur $(-\infty, \infty)$, donc aussi sur tout sous-intervalle de $(-\infty, \infty)$.

Pour $n = -1, 0$ et 1 la démonstration est immédiate. Pour $n > 1$ la démonstration résulte des faits que f admet une dérivée continue d'ordre $n-1$, que si la dérivée d'ordre $n-1$ d'une fonction est non-concave d'ordre 1 , la fonction elle-même est non-concave d'ordre n et que nous avons le

L e m m e 5. Si Q est un polynôme de degré pair ≥ 2 et si $[a, b]$ est le plus petit intervalle fermé contenant toutes ses racines, supposées toutes réelles (en particulier a, b sont des racines de Q), la fonction

$$g = \begin{cases} 0, & \text{sur } [a, b] \\ Q, & \text{sur } (-\infty, a) \cup (b, \infty) \end{cases}$$

est non-concave d'ordre 1 sur $(-\infty, \infty)$.

Ce lemme résulte du fait que la fonction g est continue et est non-concave d'ordre 1 sur chacun des intervalles $(-\infty, a)$, $[a, b]$, (b, ∞) , puisque sur $(-\infty, a)$ et sur (b, ∞) la dérivée seconde Q'' de Q est positive.

22. Nous avons le

THÉOREME 9. Si $m \geq k + l$ et les nombres n, k, l vérifient les conditions a), b) du nr. précédent, le polynôme de Lagrange $L(x_0, x_1, \dots, x_m; f|x)$ ne conserve pas la non-concavité d'ordre n de la fonction f définie sur l'intervalle E , sur aucun intervalle (non nul) de l'axe réel.

Il suffit de démontrer la propriété pour tout intervalle $[a, b]$ qui ne contient pas les noeuds. Considérons alors le polynôme (20) et la fonction (21) construits précédemment. Nous avons

$$L(x_0, x_1, \dots, x_m; f^*|x) = L(x_0, x_1, \dots, x_m; P|x) = P$$

et le théorème résulte des lemmes 3 et 4.

Les nombres k et l peuvent être choisis de la manière suivante :

1°. $k = l = 1$ si $n = -1$.

2°. $k = 1, l = 2$ si $n = 0$.

3°. $k = l = 2$ si $n = 1$.

4°. $k = n, l = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ si $n > 1$.

Nous déduisons alors le

Corollaire. Si

$$m \geq \begin{cases} n + 3, & \text{pour } n = -1, 0, 1, 2 \text{ ou } 3, \\ 2n, & \text{pour } n \text{ impair et } \geq 3, \\ 2n + 1, & \text{pour } n \text{ pair et } \geq 2, \end{cases}$$

le polynôme de Lagrange $L(x_0, x_1, \dots, x_m; f|x)$ ne conserve pas la non-concavité d'ordre n de la fonction f définie sur l'intervalle E , sur aucun intervalle (non nul) de l'axe réel.

En supposant $n \geq -1$ on peut imposer à la fonction f la restriction d'avoir une dérivée continue d'ordre $r \geq n - 1$. Le théorème 9 reste alors vrai, en imposant aux nombres k, l la condition supplémentaire d'être $\geq r + 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Fejér, Leopold „Über Weierstrassche Approximation besonders durch Hermite'sche Interpolation" Mathematische Annalen, **102**, 707–725 (1930).
- [2] Popoviciu, T. „Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur", Mathematica, **10**, 49–54 (1934).
- [3] — „Sur le prolongement des fonctions convexes d'ordre supérieur", Bull. Math. Soc. Roum. Sci., **36**, 75–108 (1934).
- [4] — „Sur le prolongement des fonctions monotones et des fonctions convexes définies sur un nombre fini de points", Bull. Acad. Roumaine; **20**, 54–56 (1938).
- [5] — „Introduction à la théorie des différences divisées", Bull. Math. Soc. Roum. Sci., **42**, 65–78 (1940).

Reçu le 8 août 1961.