

COMUNICĂRILE

ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Tomul XIII, nr. 8

August 1963

S U M A R

MATEMATICĂ

	Pag.
D. MANGERON, Asupra stabilității soluțiilor unor probleme de contur pentru o nouă clasă de ecuații integro-diferențiale cu derivata de ordin superior a lui Picone	665
L. DRAGOȘ, Mișcarea unui gaz conductor în jurul profilelor subțiri	671
ELENA UNGUREANU, Asupra teoriei interferenței izvoarelor în medii poroase omogene	677
ELENA UNGUREANU, Asupra unei mișcări tridimensionale în medii poroase neomogene	683
D. V. IONESCU, Cîteva formule practice de cvadratură	689
DUMITRU RIPIANU, O problemă de minimum în teoria interpolării	697
MIRCEA TÎRNOVEANU, Despre un sistem de comunicare de treapta I	703

BIOLOGIE

WILHELM K. KNECHTEL, Bombe din împrejurimile lacului Peșea (reg. Crișana).	711
VALERIA MACK-FIRĂ, Contribuții la studiul collembolelor (<i>Insecta—Apterygota</i>) din R.P.R.	717
ANCA DECU-BURGHELE, Cercetări asupra pupariului la <i>Nycteribiidae</i> (<i>Diptera—Pupipara</i>)	725

ȘTIINȚE AGRICOLE

M. OȘLOBEANU și F. MUJDABA, Soiuri de viță pentru vinuri roșii din podgoria Murfatlar	733
---	-----

GEOLOGIE—GEOGRAFIE

RĂZVAN GIVULESCU, Resturi de palmieri din paleogenul Bazinului Transilvaniei	743
GR. ALEXANDRESCU și P. ȘOIGAN, Observații geologice în bazinul văii Largului (valea Bistriței — Carpații Orientali)	749

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

CÎTEVA FORMULE PRACTICE DE CVADRATURĂ

DE

D. V. IONESCU

Comunicare prezentată de academician T. POPOVICIU în şedinţa din 18 mai 1963

G. C o u l m y [1] a considerat următoarea formulă de cvadratură

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \, dx = \frac{13h}{36} [f(x_0) + f(x_n)] + \frac{7h}{6} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + h[f(x_2) + f(x_{n-2})] + \\ + \frac{35h}{36} [f(x_3) + f(x_{n-3})] + h[f(x_4) + f(x_5) + \dots + f(x_{n-4})], \quad (C)$$

unde nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$ sînt în progresie aritmetică cu raţia h , şi a aplicat această formulă în problema marelui.

Este bine să se compare formula (C) cu următoarele formule de cvadratură, bine cunoscute :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \, dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n)] + h[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})], \quad (T)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \, dx = \frac{5h}{12} [f(x_0) + f(x_n)] + \frac{13h}{12} [f(x_1) + f(x_{n-1}) + h[f(x_2) + f(x_3) + \dots \\ \dots + f(x_{n-2})]], \quad (D)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \, dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + f(x_n)] + \frac{7h}{6} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \\ + \frac{23h}{24} [f(x_2) + f(x_{n-2})] + h[f(x_3) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-3})]. \quad (L)$$

Formula (T) se deduce din formula clasică a trapezului. Formulele (D) şi (L) sînt citate în cartea lui H. M i n e u r [2] şi sînt numite formulele lui Durand şi Lacroix.

În această lucrare vom da expresiile restului în formule (C), (D) și (L) din care vom trage concluzii cu privire la aplicarea uneia sau altelea în practică.

1. RESTUL ÎN FORMULA (C)

Pentru a găsi restul ei, se presupune că funcția $f(x)$ este de clasă $C^3[x_0, x_n]$ și se aplică metoda întrebuitată în mod constant în lucrarea [3]. Se găsește

$$R_C = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x) dx, \quad (1)$$

unde funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... cu următoarele polinoame de gradul al doilea, pe care le scriem numai pentru prima jumătate a intervalului $[x_0, x_n]$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)^2}{2} - \frac{13h}{36}(x-x_0), & \varphi_2(x) &= \frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{19h}{36}(x-x_1) + \frac{5h^2}{36}, \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x-x_2)^2}{2} - \frac{19h}{36}(x-x_2) + \frac{4h^2}{36}, & \varphi_4(x) &= \frac{(x-x_{k-1})^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_{k-1}) + \\ & & + \frac{h^2}{12} \quad (k=4, 5, \dots). \end{aligned}$$

Se constată că

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1(x) dx &= -\frac{h^3}{72}, & \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2(x) dx &= \frac{3h^3}{72}, & \int_{x_2}^{x_3} \varphi_3(x) dx &= \frac{h^3}{72}, \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x) dx &= 0 \quad (k=4, 5, \dots). \end{aligned}$$

Gradul de exactitate al formulei (C) este 1, deoarece în formula (1) avem

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx = \frac{h^3}{12}.$$

Din formula (1) se deduce o evaluare a lui R_C și anume

$$|R_C| \leq K_C M_2 h^3, \quad (2)$$

unde s-a notat

$$M_2 = \sup_{[x_0, x_n]} |f''(x)| \quad (3)$$

iar

$$K_C h^3 = \int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)| dx. \quad (4)$$

Facind calculele se găsește

$$\int_{x_0}^{x_1} |\varphi_1(x)| dx = \frac{1711}{34992} h^3, \quad \int_{x_1}^{x_2} |\varphi_2(x)| dx = \frac{1459}{34992} h^3$$

$$\int_{x_2}^{x_3} |\varphi_3(x)| dx = \frac{486 + 73\sqrt{73}}{34992} h^3, \quad \int_{x_3}^{x_4} |\varphi_4(x)| dx = \frac{\sqrt{3}}{54} h^3.$$

Ținând seama de simetria curbei $y = \varphi(x)$ față de dreapta $x = \frac{x_0 + x_4}{2}$, avem

$$\int_{x_0}^{x_4} |\varphi(x)| dx = \left[2 \frac{1711}{34992} + 2 \frac{1459}{34992} + 2 \frac{486 + 73\sqrt{73}}{34992} + (n-6) \frac{\sqrt{3}}{54} \right] h^3$$

și prin urmare

$$K_c = \frac{3650 + 73\sqrt{73} - 1944\sqrt{3}}{17496} + \frac{n\sqrt{3}}{54} \quad (5)$$

2. RESTUL ÎN FORMULA (D)

Presupunind că funcția $f(x)$ este de clasa $C^2[x_0, x_n]$ se deduce că restul R_D are forma

$$R_D = \int_{x_0}^{x_n} \psi(x) f''(x) dx, \quad (6)$$

unde funcția $\psi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... cu polinoamele $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... date de ecuațiile

$$\psi_1(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - \frac{5h}{12}(x-x_0), \quad \psi_k(x) = \frac{(x-x_{k-1})^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_{k-1}) + \frac{h^2}{12}$$

$$(k = 2, 3, \dots).$$

Se constată că

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi_1(x) dx = -\frac{h^3}{24}, \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi_k(x) dx = 0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

și de aici rezultă că

$$\int_{x_0}^{x_n} \psi(x) dx = -\frac{h^3}{12},$$

ceea ce înseamnă că gradul de exactitate al formulei (D) este 1.

Din formula (6) se deduce că

$$|R_D| \leq K_D M_2 h^3 \quad (7)$$

unde

$$K_D h^3 = \int_{x_0}^{x_n} |\psi(x)| dx.$$

Făcînd calculele se găseşte

$$\int_{x_0}^{x_1} |\psi_1(x)| dx = \frac{71}{1296} h^3, \quad \int_{x_1}^{x_2} |\psi_2(x)| dx = \frac{\sqrt{3}}{54} h^3$$

şi ţinînd seamă de simetria curbei $y = \psi(x)$ faţă de dreapta $x = \frac{x_0 + x_n}{2}$ avem

$$\int_{x_0}^{x_n} |\psi(x)| dx = \left[2 \frac{71}{1296} + (n-2) \frac{\sqrt{3}}{54} \right] h^3 = \left(\frac{71 - 12\sqrt{3}}{648} + \frac{n\sqrt{3}}{54} \right) h^3$$

Avem deci

$$K_D = \frac{71 - 12\sqrt{3}}{648} + \frac{n\sqrt{3}}{54}. \quad (8)$$

3. RESTUL ÎN FORMULA (1)

Presupunînd că funcţia $f(x)$ este de clasă O^2 $[x_0, x_n]$ putem scrie restul ei sub forma

$$R_L = \int_{x_0}^{x_n} \theta(x) f''(x) dx \quad (9)$$

unde funcţia $\theta(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... cu polinoamele

$$\theta_1(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - \frac{3h}{8}(x-x_0), \quad \theta_2(x) = \frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{13h}{24}(x-x_1) + \frac{h^2}{8}$$

$$\theta_k(x) = \frac{(x-x_{k-1})^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_{k-1}) + \frac{h^2}{12} \quad (k = 3, 4, \dots).$$

Avem

$$\int_{x_0}^{x_1} \theta_1(x) dx = -\frac{h^3}{48}, \quad \int_{x_1}^{x_2} \theta_2(x) dx = \frac{h^3}{48}, \quad \int_{x_1}^{x_2} \theta_3(x) dx = 0.$$

Rezultă că

$$\int_{x_0}^{x_n} \theta(x) dx = 0$$

ceea ce înseamnă că gradul de exactitate al formulei (1) este mai mare ca 1. Fără greutate se constată că gradul de exactitate al formulei (1) este 3.

din formula (9) se deduce că

$$|R_L| \leq K_L M_2 h^3 \quad (10)$$

$$K_L h^3 = \int_{x_0}^{x_n} |\theta(x)| dx.$$

Făcînd calculele se găsește

$$\int_{x_0}^{x_1} |\theta_1(x)| dx = \frac{19}{384} h^3, \quad \int_{x_1}^{x_2} |\theta_2(x)| dx = \frac{341}{10368} h^3, \quad \int_{x_2}^{x_3} |\theta_3(x)| dx = \frac{\sqrt{3}}{54} h^3.$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} |\theta(x)| dx &= 2 \left(\frac{19}{384} + \frac{341}{10368} \right) h^3 + (n-4) \frac{\sqrt{3}}{54} h^3 = \frac{427}{2592} h^3 + \\ &+ (n-4) \frac{\sqrt{3}}{54} h^3 \end{aligned}$$

și deci

$$K_L = \frac{427 - 192\sqrt{3}}{2592} + n \frac{\sqrt{3}}{54}. \quad (11)$$

4. COMPARAREA NUMERELOR K_C , K_D , K_L , CU NUMĂRUL K_T CORESPUNZĂTOR FORMULEI (T)

După cum se știe în formula (T), presupunînd că funcția $f(x)$ este de clasa $C^2[x_0, x_n]$, avem

$$R_T = \int_{x_0}^{x_n} \chi(x) f''(x) dx, \quad (12)$$

unde funcția $\chi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... cu polinoamele

$$\chi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2}, \quad \chi_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2}, \dots$$

Se constată că

$$(R_T) \leq K_T M_2 h^3 \quad (13)$$

unde

$$K_T = \frac{n}{12}. \quad (14)$$

Se constată că avem

$$K_C - K_L = \frac{3\,095 + 292\sqrt{73} - 2\,592\sqrt{3}}{69\,984} = 0,0157\dots,$$

$$K_D - K_C = \frac{1\,620\sqrt{3} - 73\sqrt{73} - 1\,739}{17\,496} = 0,0253.$$

De asemenea, se constată că avem

$$K_T - K_D = \frac{(54 - 12\sqrt{3})(n-2) + (37 - 12\sqrt{3})}{648} > 0 \quad (n \geq 2)$$

de unde rezultă că avem

$$K_L < K_C < K_D < K_T. \quad (15)$$

În concluzie, am determinat și evaluat resturile în formulele (C), (D), (L). Din inegalitățile (15) rezultă că cea mai avantajoasă este formula (L), după care urmează imediat, cu o foarte mică diferență pentru coeficientul K , formula (C). Cea mai neavantajoasă dintre toate formulele considerate în această notă este formula (T).

Vom da într-o nouă notă o metodă pentru a se construi formulele (C), (D), (L) precum și altele analoge.

Academia R.P.R. Filiala Cluj,
Institutul de calcul

НЕСКОЛЬКО ПРАКТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ КВАДРАТУРЫ

РЕЗЮМЕ

В этой заметке определяются остатки формул квадратуры (C), (D), (L), (T) формулами (1), (6), (9), (12) и расценки (2), (7), (10), (13), характеризуемые числами K_C, K_D, K_L, K_T данными формулами (5), (8), (11), (14).

Доказываются неравенства (15), из которых вытекает, что формула (L) является самой выгодной, за ней следует формула (C), и что формула (T) является самой невыгодной.

QUELQUES FORMULES PRATIQUES DE QUADRATURE

RÉSUMÉ

On détermine les restes des formules de quadrature (C), (D), (L), (T), par les formules (1), (6), (9), (12), et les évaluations (2), (7), (10), (13), caractérisées par les nombres K_C, K_D, K_L, K_T donnés par les formules

(5), (8), (11), (14). On démontre les inégalités, (15), d'où il résulte que la formule (1) est la plus avantageuse, suivie de la formule (C), et que la formule (T) est la plus désavantageuse.

BIBLIOGRATIE

1. G. COULMY, *Opérations sur les courbes expérimentales*, C.R. Acad. Sci. Paris, 1858, 246, 1799-1800.
2. H. MINOUR, *Technique de Calcul numérique*, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1952, 244.
3. D. V. IONESCU, *Cvadraturi numerice*, Edit. tehnică, București, 1957.