1964

DEUXIÈME SEMESTRE

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

GROUPE 1

MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

Tome 259 — N° 3 (20 Juillet 1964)

PUBLIÉS AVEC LE CONCOURS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & C^ie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1964

ANALYSE NUMÉRIQUE. — *Nouvelles formules pratiques de quadrature.* Note (*) de M. **Dimitru Ionesco**, présentée par M. René Garnier.

Formules de quadrature de degré de précision 3 généralisant les formules de G. Coulmy et de Lacroix. Évaluation des restes par des intégrales définies.

On connaît de nombreuses formules de quadrature de type

$$(1)\qquad I_n=\int_0^n f(x)\,dx=\sum_{m=0}^{n} A_m f(m)+R;\qquad A_{n-m}=A_m.$$

Les paramètres A_m peuvent être déterminés par diverses conditions. Par exemple, pour la formule de G. Coulmy (¹),

$$(2)\qquad A_0=A_n=\frac{13}{36},\qquad A_1=A_{n-1}=\frac{7}{6},\qquad A_2=A_{n-2}=\frac{35}{36},\qquad A_m=1 \text{ autrement};$$

pour la formule de Durand (²),

$$(3)\qquad A_0=A_n=\frac{5}{12},\qquad A_1=A_{n-1}=\frac{13}{12},\qquad A_m=1 \text{ autrement}:$$

la formule des trapèzes est de ce type.

Le degré de précision de ces trois formules est égal à 1. En supposant que $f(x)\in C_2[0, n]$, j'ai montré (³) que les restes de ces formules peuvent être représentés par des intégrales définies

$$(4)\qquad R=\int_0^n \varphi(x)f''(x)\,dx;\qquad |R|\leq KM_2;\qquad M_2=\max_{[0,n]}|f''(x)|;\qquad K=\int_0^n|\varphi(x)|\,dx.$$

L'intérêt de la formule de G. Coulmy provient du fait que la constante K correspondante est plus faible que dans le cas des formules de Durand ou des trapèzes.

D'autre part, on a

$$(5)\qquad \int_{m-1}^{m}\varphi(x)\,dx=0$$

si $m=4, 5, \ldots, n-3$ dans le cas de (2), $2, 3, \ldots, n-1$ dans le cas de (3).

Nous allons présenter quelques résultats sur les formules de type (1) dont le degré d'exactitude est de 3, quel que soit n; par exemple, sur la formule de Lacroix (²), avec $A_0=3/8$, $A_1=7/6$, $A_2=23/24$, $A_m=1$ si $3\leq m\leq n-3$. En supposant $f(x)\in C_4[0, n]$, nous avons déterminé le reste :

$$(6)\qquad R=\int_0^n \varphi(x)\,f^{(4)}(x)\,dx.$$

La fonction $\varphi(x)$ est symétrique par rapport à la droite $x = n/2$, négative sur $[0, n]$, et coïncide sur $m-1, m$, avec le polynome $\varphi_m(x)$ défini, si $x_m = x - m + 1$, par

$$(7)\quad \begin{cases} \varphi_1(x) = \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{3}{8}\dfrac{x^3}{3!}; \\ \varphi_2(x) = \dfrac{x_1^4}{4!} - \dfrac{13}{24}\dfrac{x_1^3}{3!} + \dfrac{1}{8}\dfrac{x_1^2}{2!} - \dfrac{1}{48}x_1 - \dfrac{1}{2.4!}; \\ \varphi_m(x) = \dfrac{x_m^4}{4!} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x_m^3}{3!} + \dfrac{1}{12}\dfrac{x_m^2}{2!} - \dfrac{2}{3.4!} \end{cases}$$

pour $3 \leqq m \leqq n-2$.

On a

$$(8)\quad |R| < \frac{K_1 M_4}{5!}, \qquad M = \max_{[0,n]} |f^{(4)}(x)|, \qquad K_1 = \frac{19n - 30}{6}.$$

Pour obtenir un degré d'exactitude de 3 quel que soit n, il faut qu'on ait, A_0 étant arbitraire,

$$(9)\quad A_1 = \frac{55}{24} - 3A_0, \qquad A_2 = -\frac{1}{6} + 3A_0, \qquad A_3 = \frac{11}{8} - A_0.$$

Le reste peut alors s'exprimer par

$$(10)\quad R_1 = \int_0^n \psi(x) f^{(4)}(x)\, dx;$$

$\psi(x)$ coïncide avec les polynomes

$$(11)\quad \begin{cases} \psi_1(x) = \dfrac{x^4}{4!} - A_0\dfrac{x^3}{3!}; \\ \psi_2(x) = \dfrac{x_1^4}{4!} + \left(2A_0 - \dfrac{31}{24}\right)\dfrac{x_1^3}{3!} + \left(\dfrac{1}{2} - A_0\right)\dfrac{x_1^2}{2!} + \left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{A_0}{2}\right)x_1 + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{A_0}{6}; \\ \psi_3(x) = \dfrac{x_2^4}{4!} + \left(A_0 + \dfrac{1}{8}\right)\dfrac{x_2^3}{3!} + \left(A_0 - \dfrac{7}{24}\right)\dfrac{x_2^2}{2!} + \left(\dfrac{3}{16} - \dfrac{A_0}{2}\right)x_2 + \dfrac{41}{144} - \dfrac{5A_0}{6}; \\ \psi_{m+1}(x) = \dfrac{x_m^4}{4!} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x_m^3}{3!} + \dfrac{1}{12}\dfrac{x_m^2}{2!} + \dfrac{25}{72} - A_0. \end{cases}$$

La formule (1) est une combinaison linéaire de la formule de quadrature correspondant à $A_0 = 0$ et de la formule

$$(12)\quad \Delta^3 f(0) - \Delta^3 f(x_{n-3}) + \int_0^3 \overline{\psi}(x) f^{(4)}(x)\, dx = 0,$$

où $\overline{\psi}(x)$ coïncide sur les intervalles $[0, 1]$, $[1, 2]$, ... avec les coefficients de A_0 dans $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ...

Si l'on prenait simplement $A_0 = 0$, on aurait

$$(13)\quad \begin{cases} I_n = \sum A_m f(m) + R'_1; \\ A_1 = \dfrac{55}{24}, \qquad A_2 = -\dfrac{1}{6}, \qquad A_3 = \dfrac{11}{8}, \qquad A_m = 1. \end{cases}$$

La fonction correspondante ψ^* dans (10) est positive sur $[0, n]$ et

$$(14)\qquad |R_1^*| < \frac{K_1^* M_5}{5!};\qquad K_1 = -130 + n\,\frac{251}{6}.$$

Mais on peut aussi choisir A_0 de manière à satisfaire

$$(15)\qquad \int_3^4 \psi_4(x)\,dx = 0.$$

On est ainsi conduit à la formule

$$(16)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^n f(x) = \sum A_m f(m) + R_2; \\ A_0 = \dfrac{251}{720},\qquad A_1 = \dfrac{897}{720},\qquad A_2 = \dfrac{633}{720},\qquad A_3 = \dfrac{739}{720},\qquad A_m = 1, \end{cases}$$

et

$$|R_2| < \frac{K_2 M_5}{5!},$$

avec

$$(17)\qquad K = 3{,}999\,464\,091\,944 + 0{,}097\,832\,777\,286\,n.$$

On peut aussi lier A_0, A_1, A_2, A_3 A_4 par un système de trois équations en sorte que le degré d'exactitude de (1) soit de 3 quel que soit n. En supposant $f(x) \in C_4[0, n]$, le reste R_3 de (1) est alors

$$(18)\qquad R_3 = \int_0^n \theta(x)\, f^{(4)}(x)\,dx,$$

$\theta(x)$ coïncidant avec les polynomes $\theta_m(x)$ sur $[m-1, m]$, et étant symétrique par rapport à la droite $x = n/2$.

Si l'on impose

$$(19)\qquad \int_4^5 \theta_5(x)\,dx = 0.$$

on a une nouvelle équation entre A_0, A_1, A_2, A_3, A_4; A_0 reste alors donc arbitraire et

$$(20)\qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{1901}{720} - 4A_0,\qquad A_2 = -\dfrac{873}{720} + 6A_0, \\ A_3 = \dfrac{1743}{720} - 4A_0,\qquad A_4 = \dfrac{469}{720} + A_0. \end{cases}$$

Les polynomes θ_m sont donnés par les formules

$$(21)\qquad \begin{cases} \theta_1\;(x) = \dfrac{x^4}{4!} - A_0\dfrac{x^3}{3!}; \\ \theta_2\;(x) = \dfrac{x_1^4}{4!} + \left(3A_0 - \dfrac{1181}{720}\right)\dfrac{x_1^3}{3!} + \left(\dfrac{1}{2} - A_0\right)\dfrac{x_1^2}{2!} + \left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{A_0}{2}\right)x + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{A_0}{6}; \\ \theta_3\;(x) = \dfrac{x_2^4}{4!} + \left(\dfrac{412}{720} - 3A_0\right)\dfrac{x_2^3}{3!} + \left(2A_0 - \dfrac{461}{720}\right)\dfrac{x_2^2}{2!} + \dfrac{19}{1440}x_2 + \dfrac{979}{4320} - \dfrac{2A_0}{3}; \\ \theta_4\;(x) = \dfrac{x_3^4}{4!} + \left(A_0 - \dfrac{611}{720}\right)\dfrac{x_3^3}{3!} + \left(\dfrac{311}{720} - A_0\right)\dfrac{x_3^2}{2!} + \left(\dfrac{A_0}{2} - \dfrac{251}{1440}\right)x + \dfrac{245}{4320} - \dfrac{A_0}{6}; \\ \theta_{m+1}(x) = \dfrac{x_m^4}{4!} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x_m^3}{3!} + \dfrac{1}{12}\,\dfrac{x_m^2}{2!} - \dfrac{1}{30}\,\dfrac{x_m}{4!}. \end{cases}$$

Pour $A_0 = 0$, on a

$$
(22) \qquad \begin{cases} I_n \sim \sum A_m f(m) ; \\ A_1 = \dfrac{1901}{720}, \quad A_2 = -\dfrac{873}{720}, \quad A_3 = \dfrac{1743}{720}, \quad A_4 = \dfrac{469}{720}. \end{cases}
$$

La fonction $\theta(x)$ correspondante est positive sur l'intervale $[0, 3]$ et pour le reste R_3^*, on a

$$
(23) \qquad |R_3^*| < \frac{K_3^* M_4}{5!},
$$

avec

$$
(24) \qquad K_3^* = 78,467\,900\,069\,131 + 0,097\,832\,777\,286\,n.
$$

On peut alors déterminer A_0 pour que le premier terme de la formule analogue à (24) soit petit. Par exemple, si l'on veut que $\theta(2) = 1/30 \times 41$, on a $A = 973/2\,880$, d'où la formule

$$
(25) \qquad \begin{cases} I_n = \sum A_m f(m) + R_4 ; \\ A_0 = \dfrac{973}{2\,880}; \quad A_1 = \dfrac{3\,712}{2\,880}, \quad A_2 = \dfrac{2\,346}{2\,880}, \\ A_3 = \dfrac{3\,080}{2\,880}, \quad A_4 = \dfrac{2\,849}{2\,880}, \quad A_5 = 1 \end{cases}
$$

et

$$
(28) \qquad |R_4| = \frac{K_4 M_4}{5!},
$$

avec

$$
K_4 = 3,324\,571\,252\,747 + 0,097\,832\,777\,286\,n.
$$

Les formules (16) et (25) peuvent être considérées comme des extensions des formules de G. Coulmy et de Durand pour le degré d'exactitude 3. La méthode suivie et les considérations qui nous ont conduit à ces formules peuvent être appliquées pour obtenir des formules d'un degré d'exactitude plus grand.

Je montrerai prochainement que toutes ces formules sont applicables à l'intégration numérique des équations différentielles.

(*) Séance du 6 juillet 1964.

(1) G. Coulmy, *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 1799.

(2) H. Mineur, *Technique de Calcul numérique*, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1952, p. 244.

(3) D. V. Ionesco, *Cîteva formule practice de cuadratura*, Comunicarile Acad. Republicii Populare Romîne, 13, 1963, p. 689-695.

(Faculté des Sciences de l'Université de Cluj, République populaire roumaine.)