REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TOME IX, N° 3 1964

VOLUME OFFERT EN HOMMAGE AU PROFESSEUR
MIRON NICOLESCU
POUR SON SOIXANTIÈME ANNIVERSAIRE

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

TOME IX, N° 3
1964

REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

SOMMAIRE

RÉDACTION: BUCAREST, 47, MIHAIL EMINESCU

QUELQUES FORMULES PRATIQUES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

D. V. IONESCU

Désignons par $y(x)$ la solution de l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

qui satisfait à la condition $y(x_0) = y_0$ et supposons qu'elle existe sur l'intervalle $[x_0,\ x_0 + a]$.

Nous supposons que la fonction $f(x, y)$ soit continue, ainsi que ses dérivées partielles successives par rapport à x et à y, dans le rectangle D, définie par les inégalités

$$0 \leqslant x - x_0 \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b, \tag{2}$$

jusqu'à l'ordre qui sera nécessaire pour les formules que nous avons en vue dans ce travail. Nous supposons aussi que

$$|f[x, y(x)] - y_0| \leqslant b, \quad \text{lorsque} \quad x \in [x_0,\ x_0 + a].$$

Dans ces conditions, on déduit de l'équation (1)

$$y'' = f_1(x,\ y), \qquad y''' = f_2(x,\ y), \ldots \tag{3}$$

toutes les fonctions $f_1(x, y)$, $f_2(x, y), \ldots$ étant continues dans D. Nous désignons, en général, par

$$F_k = \sup_{(D)} | f_k(x, y |. \tag{4}$$

Désignons par $x_0, x_1, \ldots, x_6$ une suite de nœuds en progression arithmétique dont la raison est h. Lorsque la solution $y(x)$ a été calculée sur les nœuds $x_1, x_2, \ldots, x_5$, on calcule $y(x_6)$ par la *formule d'Adams*

$$y(x_6) = y(x_5) + h\left[g(x_5) + \frac{1}{2}\Delta^1 g(x_4) + \frac{5}{12}\Delta^2 g(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 g(x_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{251}{720}\Delta^4 g(x_1) + \frac{95}{288}\Delta^5 g(x_0)\right] + R, \tag{5}$$

où

$$g(x) = f[x, y(x)]. \tag{6}$$

On peut encore écrire la formule (5) sous la forme

$$y(x_6) = y(x_5) + \frac{h}{1440}[4277\, g(x_5) - 7923\, g(x_4) + 9982\, g(x_3) - 7298\, g(x_2) +$$

$$+ 2877\, g(x_1) - 475\, g(x_0)] + R. \tag{7}$$

Nous avons démontré [1] que le reste R de la formule d'Adams peut être mis sous la forme d'une intégrale définie

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f_6[x, y(x)]\, \mathrm{d}x, \tag{8}$$

d'où il résulte l'évaluation

$$|R| \leqslant \frac{19087}{60480} F_6 h^7 < 0{,}3156\, F_6 h^7. \tag{9}$$

L'inégalité (9) montre que le reste R est de l'ordre de h^7, [3], et nous avons précisé [1] le coefficient de $F_6 h^7$, ce qui est très important pour les applications.

Nous avons donné [2] d'autres formules d'intégration numérique analogues à la formule d'Adams, ayant le reste de l'ordre de h^p, où $p > 7$. Par exemple, nous avons donné la formule

$$y(x_6) = 28{,}4\, y(x_0) + 426\, y(x_1) + 825\, y(x_2) - 400\, y(x_3) - 750\, y(x_4) -$$

$$- 128{,}4\, y(x_5) + 6\, h[g(x_0) + 30\, g(x_1) + 150\, g(x_2) + 200\, g(x_3) +$$

$$+ 75\, g(x_4) + 6\, g(x_5)] + R \tag{10}$$

qui présente des avantages visibles par rapport à la formule d'Adams, et dont le reste R, mis sous la forme

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_{11}[x, y(x)]\, \mathrm{d}x, \tag{11}$$

est de l'ordre de h^{12}, ce qui résulte de l'inégalité

$$|R| \leqslant \frac{1}{924} F_{11} h^{12} < 0{,}001083\, F_{11} h^{12}. \tag{12}$$

Parmi les formules que nous avons données, signalons encore la formule

$$y(x_6) = y(x_0) + 101[y(x_1) - y(x_5)] + 425[y(x_2) - y(x_4)] + \\ + 30\,h\{[g(x_1) + g(x_5)] + 10[g(x_2) + g(x_4)] + \\ + 20\,g(x_3)\} + R, \tag{13}$$

qui présente une certaine symétrie pour ses coefficients. Le reste de cette formule est de la forme

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_{10}[x,\, y(x)]\, \mathrm{d}x \tag{14}$$

et il est de l'ordre de h^{11}, ce qui résulte de l'inégalité

$$|R| \leqslant \frac{1}{462} F_{10} h^{11} < 0{,}002165\, F_{10} h^{11}. \tag{15}$$

Les particularités de la formule (13) nous conduisent à donner, dans ce travail, des formules d'intégration numérique analogues à la formule (13), dont les restes soient de l'ordre de h^7, h^8, h^9 et h^{10}. Nous donnons seulement les formules et leurs restes, sans donner des démonstrations qui paraîtront dans un autre travail.

1. **Formules dont le reste est de l'ordre de h⁷.** Nous avons d'abord la formule

$$y(x_6) = \frac{1}{3}\{3\,y(x_0) - 32[y(x_1) - y(x_5)] - 5[y(x_2) - y(x_4)]\} + \\ + 20\,h[g(x_2) + g(x_4)] + R_1 \tag{16}$$

avec

$$R_1 = -\frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_6} \varphi_1(x)\, f_6[x,\, y(x)]\, \mathrm{d}x \tag{16'}$$

et

$$|R_1| \leqslant \frac{8}{21} F_6 h^7 < 0{,}3810\, F_6 h^7. \tag{16''}$$

Nous avons ensuite la formule

$$y(x_6) = \frac{1}{6}\{y(x_0) + 31[y(x_1) - y(x_5)] - 50[y(x_2) - y(x_4)]\} + \\ + 5\,h[g(x_1) + g(x_5)] + R_2 \tag{17}$$

avec

$$R_2 = -\frac{1}{6}\int_{x_0}^{x_6} \varphi_2(x)\, f_6[x,\, y(x)]\, \mathrm{d}x \tag{17'}$$

et

$$|R_2| \leqslant \frac{5}{21} F_6 h^7 < 0{,}2381\, F_6 h^7. \tag{17''}$$

Les formules (16) et (17) sont plus avantageuses que la formule (7) d'Adams. Pour les appliquer, il faut calculer au préalable les valeurs de la solution de l'équation différentielle (1) seulement sur *quatre* nœuds x_1, x_2, x_4, x_5, et les valeurs de la fonction $g(x)$ seulement sur *deux* nœuds x_2, x_4 ou x_1, x_5. Un autre avantage de la formule (17) est que le coefficient numérique de l'évaluation (17'') du reste R_2 est plus petit que le coefficient correspondant de la formule d'Adams.

Mais on peut donner aussi la formule

$$y(x_6) = y(x_0) + 2{,}953125[y(x_1) - y(x_5)] + \\ + 0{,}46875\; h\{9[g(x_1) + g(x_5)] + 20\, g(x_3)\} + R_3 \tag{18}$$

avec

$$R_3 = -\frac{1}{64}\int_{x_0}^{x_6} \varphi_3(x)\, f_6[x, y(x)]\, \mathrm{d}x \tag{18'}$$

et

$$|R_3| \leqslant \frac{15}{56} F_6 h^7 < 0{,}2679\, F_6 h^7. \tag{18''}$$

Cette formule a un grand avantage sur la formule (7) d'Adams et encore sur les formules (16) et (17). Pour l'appliquer, il faut calculer au préalable les valeurs de la solution $y(x)$ et de la fonction $g(x)$ seulement sur *trois* nœuds x_1, x_3, x_5.

Si la solution $y(x)$ a été calculée au préalable sur les *trois* nœuds x_2, x_3, x_4, on peut utiliser la formule d'intégration numérique

$$y(x_6) = y(x_0) + 135[y(x_2) - y(x_4)] + \\ + 6\, h\{9[g(x_2) + g(x_4)] + 28\, g(x_3)\} + R_4 \tag{19}$$

avec

$$R_4 = -\int_{x_0}^{x_6} \varphi_4(x)\, f_6[x, y(x)]\, \mathrm{d}x \tag{19'}$$

et

$$|R_4| \leqslant \frac{24}{35} F_6 h^7 < 0{,}6858\, F_6 h^7. \tag{19''}$$

Lorsque la solution $y(x)$ a été calculée au préalable sur les *cinq* nœuds x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, nous avons la formule d'intégration numérique

$$y(x_6) = y(x_0) - 9[y(x_1) - y(x_5)] + 45[y(x_2) - y(x_4)] + \\ + 60\, hg(x_3) + R_5 \tag{20}$$

avec

$$R_5 = -\int_{x_0}^{x_4} \varphi_5(x)\, f_6[x, y(x)]\, \mathrm{d}x \qquad (20')$$

et

$$|R_5| \leqslant \frac{3}{7} F_6 h^7 < 0{,}4286\, F_6 h^7, \qquad (20'')$$

qui utilise la valeur de la fonction $g(x)$ seulement sur le nœud x_3.

2. **Formules dont le reste est de l'ordre de h⁸.** Si la solution de l'équation différentielle (1), avec la condition $y(x_0) = y_0$, a été calculée au préalable sur les *cinq* nœuds x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, nous avons les formules suivantes pour calculer $y(x_6)$:

$$y(x_6) = -y(x_0) + 16\, [y(x_1) + y(x_5)] + 65\, [y(x_2) + y(x_4)] - 160\, y(x_3) +$$
$$+ 60\, h\, [g(x_2) - g(x_4) + R_6 \qquad (21)$$

avec

$$R_6 = \int_{x_0}^{x_6} \varphi_6(x)\, f_7[x, y(x)]\, \mathrm{d}x \qquad (21')$$

et

$$|R_6| \leqslant \frac{1}{7} F_7 h^8 < 0{,}1429\, F_7 h^8 \qquad (21'')$$

et ensuite

$$y(x_6) = -y(x_0) - 11{,}5\, [y(x_1) + y(x_5)] + 25 [y(x_2) + y(x_4)] - 25\, y(x_3) -$$
$$- 7{,}5\, h [g(x_1) - g(x_5)] + R_7 \qquad (22)$$

avec

$$R_7 = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_6} \varphi_7(x)\, f_7[x, y(x)]\, \mathrm{d}x \qquad (22')$$

et

$$|R_7| \leqslant \frac{5}{56} F_7 h^8 < 0{,}08947\, F_7 h^8. \qquad (22'')$$

On remarque dans ces formules la simplicité des coefficients. Leurs restes sont de l'ordre de h^8 et les coefficients de $F_7 h^8$ dans les inégalités (21″) et (22″) sont petits.

3. **Formules dont le reste est de l'ordre de h⁹.** En supposant toujours que la solution $y(x)$ de l'équation différentielle (1) avec la condition $y(x_0) = y_0$ a été calculée au préalable sur les nœuds $x_1, x_2, x_3, x_4,$

x_5, nous avons les formules suivantes d'intégration numérique pour le calcul de $y(x_6)$:

$$y(x_6) = \frac{1}{9}\{9y(x_0) + 284\;[y(x_1) - y(x_5)] - 175\;[y(x_2) - y(x_4)]\} +$$
$$+ \frac{20h}{3}\{2\,[g(x_1) + g(x_5)] + 5\,[g(x_2) + g(x_4)]\} + R_8 \tag{23}$$

avec

$$R_8 = -\frac{1}{9}\int_{x_0}^{x_6} \varphi_8(x)\, f_8[x, y(x)]\,\mathrm{d}x \tag{23'}$$

et

$$|R_8| \leqslant \frac{5}{189}\,F_8 h^9 < 0{,}02646\,F_8 h^9 \tag{23''}$$

ou,

$$y(x_6) = y(x_0) - 24[y(x_1) - y(x_5)] - 375\;[y(x_2) - y(x_4)] -$$
$$- 60\,h\,\{3[g(x_2) + g(x_4)] + 8\,g(x_3)\} + R_9 \tag{24}$$

avec

$$R_9 = -\int_{x_0}^{x_6} \varphi_9(x)\, f_8[x, y(x)]\,\mathrm{d}x \tag{24'}$$

et

$$|R_9| \leqslant \frac{1}{21}\,F_8 h^9 < 0{,}04762\;F_8 h^9 \tag{24''}$$

ou encore

$$y(x_6) = y(x_0) + 22{,}875[y(x_1) - y(x_5)] - 75[y(x_2) - y(x_4)] +$$
$$+ 3{,}75\,h\,\{3\,[g(x_1) + g(x_5)] - 20\;g(x_3)\} + R_{10} \tag{25}$$

avec

$$R_{10} = -\frac{1}{8}\int_{x_0}^{x_6} \varphi_{10}(x)\, f_8[x, y(x)]\,\mathrm{d}x \tag{25'}$$

et

$$|R_{10}| \leqslant \frac{5}{168}\,F_8 h^9 < 0{,}02858\,F_8 h^9. \tag{25''}$$

Dans les formules (23), (24), (25) les restes sont de l'ordre de h^9, et les coefficients de $F_8 h^9$ dans les inégalités (23''), (24''), (25'') sont petits. Les coefficients des formules (24) et (25) sont des nombres entiers ou décimaux, ce qui est un grand avantage pour le calcul.

4. **Formules dont le reste est de l'ordre de h^{10}.** Pour finir, nous donnons encore la formule d'intégration numérique

$$y(x_6) = -\frac{1}{3}\{3\,y(x_0) + 172\,[y(x_1) + y(x_5)] + 125\,[y(x_2) + y(x_4)] -$$

$$- 600\,y(x_3)\} - 20\,h\,\{[g(x_1) - g(x_5)] + 5\,[g(x_2) - g(x_4)]\} + R_{11} \quad (26)$$

pour le calcul de $y(x_6)$ lorsque la solution $y(x)$ de l'équation différentielle (1) avec la condition $y(x_0) = y_0$ a été calculée au préalable sur les nœuds x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Dans la formule (26) nous avons

$$R_{11} = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_6} \varphi_{11}(x)\, f_9[x, y(x)]\, \mathrm{d}x \qquad (26')$$

et nous avons

$$|R_{11}| \leqslant \frac{1}{126} F_9 h^{10} < 0{,}007937\, F_9 h^{10}. \qquad (26'')$$

5. **Conclusions.** Les formules d'intégration numérique (16), (17), (18), (19), (20) ont leurs restes de l'ordre de h^7 comme dans la formule d'Adams. Mais toutes ces formules présentent des avantages notables sur la formule (7) d'Adams.

Nous avons donné aussi d'autres formules du type d'Adams : les formules (21) et (22) dont les restes sont de l'ordre de h^8, les formules (23), (24), (25) dont les restes sont de l'ordre de h^9 et la formule (26) dont le reste est de l'ordre de h^{10}.

Toutes ces formules sont utiles pour les applications et sont préférables à la formule d'Adams.

Manuscrit reçu le 10 octobre 1963

BIBLIOGRAPHIE

1. Д. В. Ионеску, *Остаточный член в формуле численного интегрирования*. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, **2**, 154—157.
2. D. V. Ionescu, *Metode practice de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale*. Studii și cercetări de matematică Acad. R.P.R., Cluj, 1961, **12**, 257—280.
3. W. Tollmien, *Über die Fehlerabschätzung beim Adamschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*. ZAMM, 1938, **18**, 83—90.