

LA SIMPLICITÉ DU RESTE DANS CERTAINES FORMULES DE QUADRATURE

par

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

§ 1.

1. Considérons la formule de quadrature

$$(1) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{i,j} f^{(j)}(z_i) + R[f]$$

où $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont $p (\geq 1)$ points distincts de l'axe réel, ces sont les *noeuds* de la formule, $k_1, k_2, \dots, k_p$ sont p nombres naturels et $c_{i,j}$ des coefficients indépendants de la fonction f .

La fonction f est définie, continue et admet une dérivée continue d'ordre égal à $\max(k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_p - 1)$ sur un intervalle E contenant les points $-1, 1$ et les noeuds $z_i, i = 1, 2, \dots, p$. La dérivée d'ordre 0 est la fonction elle-même.

Nous désignerons par $\mathcal{F}$ l'ensemble de ces fonctions. $\mathcal{F}$ est un ensemble linéaire et contient, en particulier, tous les polynomes.

Les accents dans le second membre de (1) désignent des dérivations successives.

Dans la suite, sauf si on ne dit pas expressément le contraire, nous supposons que E se réduise au plus petit intervalle fermé contenant les noeuds et les points $-1, 1$.

L'intégrale du premier membre de (1) pourrait être prise entre deux limites finies quelconques, mais on ne restreint pas la généralité en prenant ces limites égales à -1 et 1 respectivement. Le passage de l'intervalle $[-1, 1]$ à l'intervalle fini quelconque d'intégration $[A, B]$ se fait par la

formule de transformation linéaire $x = \frac{2y - A - B}{B - A}$. Une telle transformation conserve la continuité, la dérivabilité de tout ordre et aussi tout caractère de convexité des fonctions.

2. Le deuxième terme $R[f]$ du second membre de la formule (1) est le *reste* de cette formule. Il est une fonctionnelle linéaire (additive et homogène) définie sur l'ensemble $\mathcal{F}$.

La formule (1) et le reste $R[f]$ correspondant ont un *degré d'exactitude*. C'est le nombre entier $n \geq -1$ complètement déterminé par la condition que $R[f]$ soit nul sur tout polynôme de degré n et que $R[x^{n+1}] \neq 0$. On dit aussi que la formule (1) ou le reste $R[f]$ de cette formule est de degré d'exactitude n . Dans la suite on peut toujours supposer $n \geq 0$, le cas $n = -1$, n'intervenant pas. La condition $n \geq 0$ est, d'ailleurs, équivalente à $2 = \sum_{i=1}^p c_{i,0}$.

Le reste $R[f]$ est dit *de la forme simple* s'il existe un entier $n (\geq 0)$ indépendant de la fonction f , tel que l'on ait

$$(2) \quad R[f] = M [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f],$$

où M est $\neq 0$ et indépendant de la fonction $f \in \mathcal{F}$, les points $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}$ étant distincts, à l'intérieur de l'intervalle E et dépendants, en général, de la fonction f . Dans ce cas le nombre n est complètement déterminé (est unique) et est précisément le degré d'exactitude de $R[f]$.

La notation $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f]$ désigne la différence divisée (d'ordre $n+1$) de la fonction f sur les points, ou les noeuds, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}$. Nous supposons connues la définition et les principales propriétés des différences divisées sur des noeuds distincts ou non.

On voit facilement que, sous les hypothèses précédentes, le nombre M est égal à $R[x^{n+1}] = R[x^{n+1} + P]$, où P est un polynôme quelconque de degré n .

Si nous convenons de désigner par $D_k[f]$ une différence divisée d'ordre k de la fonction f sur $k+1$ noeuds *distincts*, d'ailleurs non spécifiés, de l'intérieur de l'intervalle E , la formule (2) peut s'écrire

$$(3) \quad R[f] = R[x^{n+1}] D_{n+1}[f].$$

Nous avons introduit la notion de simplicité d'une fonctionnelle linéaire, de la nature de reste $R[f]$ (d'abord sous un autre nom) dans d'autres travaux [5, 6]. Nous avons complété et précisé ces recherches dans un mémoire plus détaillé [9]. Nous prions le lecteur de se reporter à ce mémoire pour nos résultats antérieurs et qui seront souvent tacitement utilisés dans la suite.

Ce travail est consacré à l'étude de la simplicité du reste dans certaines formules de quadrature de la forme (1) (§§ 1-3). Ces sont, en somme, des applications de nos résultats antérieurs. Dans le dernier § (§ 4) nous ferons quelques remarques sur la simplicité du reste dans certaines formules de quadrature relative à des intégrales étendues à un intervalle infini.

3. Les nombres $k_1, k_2, \dots, k_p$ sont les *ordres de multiplicité* des noeuds $z_1, z_2, \dots, z_p$ respectifs. Nous posons $k_1 + k_2 + \dots + k_p = m$ et nous avons alors $m \geq p \geq 1$. Nous pouvons supposer que k_i noeuds soient confondus dans le point z_i , donc que z_i est un noeud d'ordre k_i de multiplicité (simple si $k_i = 1$, double si $k_i = 2$, etc.). Le nombre total des noeuds, *distincts ou non*, est donc égal à m et nous pouvons désigner ces noeuds par $x_1, x_2, \dots, x_m$, en choisissant les notations, par exemple, de manière que l'on ait $x_{k_1+k_2+\dots+k_{i-1}+j} = z_i$, $j = 1, 2, \dots, k_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ (la somme $k_1 + k_2 + \dots + k_{i-1}$ étant remplacée par 0 pour $i = 1$).

4. Dans la suite nous supposons toujours que le degré d'exactitude de la formule (1) soit au moins égal à $m-1$. Avec les données précédentes, cette condition détermine complètement la formule (1) dont le second membre s'obtient alors en approximant la fonction f par son polynôme de Lagrange-Hermite sur les noeuds x_i , $i = 1, 2, \dots, m$ [7]. Si donc nous désignons par n le degré d'exactitude de la formule (1) et si $n \geq m-1$, les coefficients $c_{i,j}$ sont complètement déterminés. Quels que soient les noeuds donnés $x_1, x_2, \dots, x_m$, il existe donc toujours une formule (1) et une seule ayant un degré d'exactitude $\geq m-1$.

D'ailleurs pour des noeuds donnés ayant des ordres de multiplicité donnés, le calcul des coefficients $c_{i,j}$ est, en général, assez compliqué. La formule (11) qui sera donnée plus loin (no. 7), nous donne

$$(4) \quad c_{i,k_i-1} = \frac{1}{(k_i-1)! \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p (z_i - z_j)^{k_j}} \int_{-1}^1 \frac{l(x)}{x - z_i} dx, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

où $l(x)$ est le polynôme (6) de plus loin.

Pour $p = 1$ cette formule devient

$$(5) \quad c_{1,k_1-1} = \frac{1}{(k_1-1)!} \int_{-1}^1 (x - z_1)^{k_1-1} dx = \frac{(1-z_1)^{k_1} - (-1)^{k_1} (1+z_1)^{k_1}}{k_1!}$$

Le calcul des autres coefficients $c_{i,j}$ est plus compliqué. Nous ne le donnerons ici que dans certains cas très particuliers.

5. On peut facilement délimiter supérieurement le degré d'exactitude n de la formule (1) (de degré d'exactitude $n \geq m - 1$). Posons $n = m + q - 1$, alors l'hypothèse $n \geq m - 1$ revient à $q \geq 0$. Considérons le polynôme

$$(6) \quad l(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i) = \prod_{i=1}^p (x - z_i)^{k_i}$$

Le polynôme $Q(x) = l(x) \prod_{i=1}^p (x - z_i)^{\frac{1-(-1)^{k_i}}{2}}$ est de degré $m + p$, est nonnégatif (sur E) et on a $R[Q] = \int_{-1}^1 Q(x) dx > 0$. Nous avons donc nécessairement $q \leq p$.

On peut raffiner cette délimitation en tenant compte, en une certaine mesure, de la distribution des noeuds. Si nous désignons par p_1 le nombre ($\leq p$) des noeuds z_i appartenant à l'intervalle ouvert $(-1, 1)$, on a $q \leq p_1$. On démontre de la même manière cette propriété en prenant, au lieu de

$Q(x)$, le polynôme $l(x) \prod_{z_i \in (-1, 1)} (x - z_i)^{\frac{1-(-1)^{k_i}}{2}}$ où le produit est étendu seulement à ces noeuds.

6. Nous avons le

THÉORÈME 1. Pour que la formule (1) (de degré d'exactitude $\geq m - 1$) soit de degré d'exactitude égal à $n = m + q - 1$, il faut et il suffit que le polynôme $l(x)$ soit orthogonal à tout polynôme de degré $q - 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et que l'on ait

$$(7) \quad R[x^{n+1}] = \int_{-1}^1 x^q l(x) dx = \int_{-1}^1 Q(x) l(x) dx \neq 0$$

où $Q(x) = x^q + P(x)$, $P(x)$ étant un polynôme quelconque de degré $q - 1$.

La condition est nécessaire. Cette propriété résulte de la formule

$$R[Ql] = \int_{-1}^1 Q(x) l(x) dx$$

si $Q(x)$ est un polynôme quelconque.

La condition est suffisante. Cette propriété résulte du fait que si Q, S sont respectivement le quotient et le reste de la division du polynôme quelconque P par le polynôme (6), nous avons $R[P] = R[Ql] + R[S] = R[Ql]$.

Nous pouvons mettre la propriété exprimée par le théorème 1 sous une autre forme. Posons

$$(8) \quad P_i(x) = \int_{-1}^x P_{i-1}(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, P_0(x) = l(x).$$

Nous avons alors

$$P_i(x) = \frac{1}{(i-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{i-1} l(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots$$

et

$$(9) \quad P_i(-1) = 0, \quad P_i^{(i)}(x) = l(x), \quad i = 1, 2, \dots$$

et on voit facilement que la propriété exprimée par le théorème 1 peut s'énoncer sous la forme équivalente suivante :

THÉORÈME 2. Pour que la formule (1) (de degré d'exactitude $\geq m - 1$) soit de degré d'exactitude égal à $n = m + q - 1$, il faut et il suffit que :

1. $P_1(1) \neq 0$ pour $q = 0$.
2. $P_1(1) = P_2(1) = \dots = P_q(1) = 0, \quad P_{q+1}(1) \neq 0$, pour $q > 0$.

Le nombre $R[x^{n+1}]$ est alors aussi donné par la formule

$$(10) \quad R[x^{n+1}] = (-1)^q q! P_{q+1}(1) = (-1)^q q! \int_{-1}^1 P_q(x) dx.$$

7. Le reste de la formule (1) (de degré d'exactitude $\geq m - 1$) est donné par

$$(11) \quad R[f] = \int_{-1}^1 l(x) [x_1, x_2, \dots, x_m, x; f] dx.$$

Si nous posons

$$(12) \quad \omega(x) = [x_1, x_2, \dots, x_m, x; f]$$

et si nous utilisons la formule d'intégration par parties, nous déduisons ($q > 0$)

$$(13) \quad R[f] = \sum_{i=1}^q (-1)^{i-1} P_i(1) \omega^{(i-1)}(1) + (-1)^q \int_{-1}^1 P_q(x) \omega^{(q)}(x) dx.$$

Nous en déduisons alors le

THÉORÈME 3. *S'il existe un nombre entier non-négatif q tel que :*

1. $P_0(x) = l(x)$ ne change pas de signe sur $[-1, 1]$, pour $q = 0$
2. $P_i(1) = 0$, $i = 1, 2, \dots, q$ et $P_q(x)$ ne change pas de signe sur $[-1, 1]$, pour $q > 0$,
alors le reste $R[f]$ de la formule (1) (supposée de degré d'exactitude $\geq m - 1$) est de degré d'exactitude égal à $n = m + q - 1$ et est de la forme simple.

Compte tenant de la formule bien connue

$$(14) \quad \omega^{(q)}(x) = q! [x_1, x_2, \dots, x_m, \underbrace{x, x, \dots, x}_{q+1}; f],$$

le théorème résulte, de la formule

$$(15) \quad R[f] = (-1)^q q! \int_{-1}^1 P_q(x) [x_1, x_2, \dots, x_m, \underbrace{x, x, \dots, x}_{q+1}; f] dx,$$

qui est vérifiée sous les hypothèses, admises, et du fait que $R[f]$ est de la forme simple si (et seulement si) $R[f] \neq 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ convexe d'ordre n sur E .

Une fonction est dite *convexe d'ordre n* sur E si toutes ses différences divisées (d'ordre $n + 1$) sur $n + 2$ points, non tous confondus, de E sont positives. La propriété exprimée par le théorème 3 est ce que nous pouvons appeler le *critère de simplicité de Steffensen*, en vertu de l'important théorème de J. E. STEFFENSEN [12] relatif au reste de la formule de quadrature de Cotes. J. E. STEFFENSEN suppose que la fonction f ait une dérivée d'ordre $n + 1$ continue, mais nous verrons que le reste dans la formule de Cotes est de la forme simple sous la seule hypothèse de la continuité de la fonction f .

8. Il faut préciser les conditions sous lesquelles le critère de Steffensen est applicable. Nous démontrerons dans ce travail que le critère de Steffensen s'applique sous la seule hypothèse que $f \in \mathcal{F}$. Cette propriété est exprimée par le théorème 5 de plus loin.

Remarquons, en passant, que le nombre q du théorème 3 peut ne pas exister. Par exemple, le reste de la formule de quadrature

$$(16) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{3} \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] + 0 \cdot f'(0) + R[f] = \\ = \frac{2}{3} \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] + R[f]$$

peut s'écrire

$$(17) \quad R[f] = \int_{-1}^1 x^2 \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \left[0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, x; f \right] dx,$$

Dans ce cas $R[x^4] = \frac{1}{15} \neq 0$. Le nombre q du théorème 3 n'existe pas, puisque dans le cas contraire il devrait être égal à 0. Mais le polynôme $l(x) = P_0(x) = x^2 \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)$ change de signe sur l'intervalle $[-1, 1]$. Nous verrons plus loin (no. 15) que le reste de la formule (16) est de la forme simple. On obtient ce résultat en interprétant la formule (16) avec la valeur 3 de m au lieu de la valeur 4.

9. Si nous nous rapportons à la façon dont nous avons obtenu la formule (15), on voit que pour que le critère de Steffensen soit applicable, il suffit que la fonction (14) soit continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. Si $q = 0$, cette hypothèse supplémentaire est même inutile puisque le produit $l(x) [x_1, x_2, \dots, x_m, x; f]$ est égal à la différence entre la fonction f et son polynôme de Lagrange-Hermite sur les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_m$. Il en résulte le

THÉORÈME 4. *Si nous avons $l(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, le reste de la formule (1) (supposé de degré d'exactitude $\geq m - 1$) est de degré d'exactitude $m - 1$ et est de la forme simple.*

Il en est ainsi, en particulier, si les noeuds $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont tous à l'extérieur de l'intervalle ouvert $(-1, 1)$, ou bien si tous les noeuds qui appartiennent à $(-1, 1)$, sont d'un ordre pair de multiplicité.

10. Posons

$$(18) \quad k_i = \begin{cases} k_i, & \text{si } z_i \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } z_i \notin [-1, 1] \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Pour la continuité sur $[-1, 1]$ de la fonction (14) il suffit que la fonction $f \in \mathcal{F}$ ait une dérivée, continue d'ordre $q + \max(k'_1, k'_2, \dots, k'_p)$ sur E . Ceci a évidemment lieu si

$$(19) \quad q + \max(k'_1, k'_2, \dots, k'_p) \leq \max(k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_p - 1)$$

d'après la définition de l'ensemble $\mathcal{F}$. Dans ce cas le critère de Steffensen est donc applicable. Mais nous démontrerons que ce critère est toujours applicable, indépendamment de la condition (19).

Considérons les fonctions $\varphi_{n+1,\lambda}(x) = \left(\frac{x-\lambda+|x-\lambda|}{2}\right)^n$ ($n \geq 1$) qui, pour toute valeur réelle du paramètre λ , admettent une dérivée continue d'ordre $n-1$ sur l'axe réel.

En vertu du théorème 15 de notre travail cité [9], le critère de Steffensen est certainement applicable si

$$(20) \quad m + q - 1 \geq 1, \quad m - 2 \geq \max(k'_1, k'_2, \dots, k'_p).$$

La première condition est toujours vérifiée pour $p \geq 2$ et, puisque $m - p + 1 \geq \max(k'_1, k'_2, \dots, k'_p)$, la seconde condition est aussi toujours vérifiée pour $p \geq 3$. Si $p = 2$, cette seconde condition (20) est vérifiée, sauf si l'un des noeuds z_1, z_2 est simple et l'autre (simple ou non) appartient à l'intervalle fermé $[-1, 1]$.

Nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 5. *Le critère de simplicité de Steffensen (théorème 3) est toujours applicable à la formule (1) (supposée de degré d'exactitude $\geq m-1$).*

D'après ce qui précède le théorème est démontré, sauf dans les cas d'exceptions signalés, donc sauf si les inégalités (20) ne sont pas simultanément vérifiées et si, en vertu du théorème 4, on a de plus $q > 0$.

11. On pourrait éliminer les cas d'exceptions signalés en utilisant, au lieu du théorème 15 du notre travail cité [9], un critère de simplicité plus puissant, mais nous ne nous occuperons pas de cette question ici. Nous continuerons par l'analyse des cas d'exceptions signalés. De cette manière nous aurons l'occasion d'établir l'existence et l'unicité de certaines formules du type (1). La démonstration du théorème 5 dans ces cas d'exceptions sera indirecte et consistera à montrer que si les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées, le reste est bien de la forme simple.

Compte tenant de la symétrie du problème par rapport à l'intervalle $[-1, 1]$ il suffit d'examiner les deux cas d'exceptions suivants :

Cas 1. $p = 1, -1 \leq z_1 < 1$

Cas 2. $p = 2, k_2 = 1, -1 \leq z_1 \leq 1, z_1 < z_2$

Il suffit aussi d'éliminer d'ici l'examen direct des cas où $q = 0$.

12. Cas 1 ($p = 1$). Pour simplifier un peu les notations, posons

$$(21) \quad z_1 = \alpha, \quad k_1 = k$$

et nous pouvons supposer $-1 \leq \alpha < 1$.

Nous avons

$$l(x) = P_0(x) = (x - \alpha)^k, \quad P_1(x) = \frac{(x - \alpha)^{k+1} + (-1)^k(1 + \alpha)^{k+1}}{k + 1}$$

Le polynôme $P_0(x)$ ne change pas de signe sur $[-1, 1]$ si, ou bien $\alpha = -1$, ou bien k est pair. Si k est impair et $-1 < \alpha < 1$, le polynôme $P_0(x)$ change de signe sur $[-1, 1]$ et la condition $P_1(1) = 0$, nous donne $\alpha = 0$. Nous avons alors $P_1(x) = \frac{x^{k+1} - 1}{k + 1} \leq 0$ sur $[-1, 1]$.

Il suffit donc de démontrer la simplicité du reste de la formule du type (1) :

$$(F_1) \quad p = 1, \quad k = \text{impair}, \quad \alpha = 0, \quad q = 1, \quad n = k.$$

Nous donnerons au § suivant la forme explicite de cette formule (formule (40)) et, en général, des formules (1) pour lesquelles $p = 1$.

13. Cas 2 ($p = 2, k_2 = 1$). Pour simplifier les notations nous posons dans ce cas

$$(22) \quad z_1 = \alpha, \quad z_2 = \beta, \quad 1 - \alpha = u, \quad 1 + \alpha = v, \quad k_1 = k.$$

Nous avons

$$l(x) = P_0(x) = (x - \alpha)^k(x - \beta),$$

$$P_1(x) = \frac{(x - \alpha)^{k+2} - (-1)^{k+2}v^{k+2}}{k + 2} - (\beta - \alpha) \frac{(x - \alpha)^{k+1} + (-1)^k v^{k+1}}{k + 1}$$

et le polynôme $P_0(x)$ ne change pas de signe sur $[-1, 1]$ dans les cas $\alpha = -1, \beta \geq 1; k = \text{pair}, -1 < \alpha < 1 \leq \beta$ et $\alpha = 1 < \beta$.

Il reste à démontrer la simplicité du reste dans les formules suivantes du type (1) :

- (F₂) $p = 2, -1 = \alpha < \beta < 1, P_1(1) = 0, q = 1, n = k + 1$
 (F₃) $p = 2, k = \text{pair}, -1 < \alpha < \beta < 1, P_1(1) = 0, q = 1, n = k + 1$
 (F₄) $p = 2, k = \text{impair}, -1 < \alpha < \beta = 1, P_1(1) = 0, q = 1, n = k + 1$
 (F₅) $p = 2, k = \text{impair}, -1 < \alpha < 1 < \beta, P_1(1) = 0, q = 1, n = k + 1$
 (F₆) $p = 2, k = \text{impair}, -1 < \alpha < \beta < 1, P_1(1) = P_2(1) = 0, q = 2, n = k + 2$

Dans les formules (F₂) – (F₅) la fonction $P_1(x)$ change de sens de monotonie sur $[-1, 1]$ une seule fois (au point β pour (F₂), (F₃) et au point α pour (F₄), (F₅)). De $P_1(1) = 0$ il résulte donc que $P_1(x)$ ne change pas de signe sur $[-1, 1]$.

L'égalité $P_1(1) = 0$, dans le cas de la formule (F₂), nous donne $\beta = \frac{k}{k+2}$ qui est bien compris dans $(-1, 1)$. Ceci démontre l'existence d'une unique telle formule.

Pour la formule (F₃) l'équation $P_1(1) = 0$ devient

$$(23) \quad \beta - \alpha = \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{u^{k+2} - v^{k+2}}{u^{k+1} + v^{k+1}}$$

d'où on déduit

$$(24) \quad 1 - \beta = \frac{u^{k+2} + (2k+3-\alpha)v^{k+1}}{(k+2)(u^{k+1} + v^{k+1})}$$

De (23) il résulte, en tenant compte de $-1 < \alpha < 1$, que nous avons $\beta - \alpha > 0$ respectivement $\beta - \alpha < 0$ suivant que $\alpha < 0$ respectivement $\alpha > 0$. De (23) il résulte que $1 - \beta > 0$. Il en résulte qu'il existe une formule unique (F₃) pour tout $\alpha \in (-1, 0)$.

Dans le cas des formules (F₄), (F₅), l'égalité $P_1(1) = 0$ devient

$$(25) \quad \beta - \alpha = \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{u^{k+2} + v^{k+2}}{u^{k+1} - v^{k+1}}$$

qui détermine β en fonction de α . La formule (25) nous montre que pour avoir $\alpha < \beta$ ($-1 < \alpha < 1$) il faut et il suffit que α soit négatif. La dérivée de β par rapport à α ,

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{u^{2k+2} + v^{2k+2} + 2(uv)^k(2k^2 + 4k + 1 + \alpha^2)}{(k+2)(u^{k+1} - v^{k+1})^2}$$

nous montre que β est une fonction croissante de α sur $[-1, 0)$. On voit facilement que si α varie de -1 à 0 ($-1 \leq \alpha < 0$), β croît de $\frac{k}{k+2}$ à $+$

Il existe donc une formule et une seule de la forme (F₄) et pour cette formule α est égal à un nombre a compris entre -1 et 0 ($-1 < a < 0$), bien déterminé. Pour tout $\alpha \in (a, 0)$ il existe une formule et une seule de la forme (F₅).

Il reste à démontrer qu'il existe une formule de la forme (F₆). En supposant $P_1(1) = 0$, le polynôme $P_1(x)$ change de signe sur l'intervalle $[-1, 1]$, dans ce cas, une seule fois. Si donc nous avons $P_2(1) = 0$, le polynôme $P_2(x)$ ne change pas de signe sur $[-1, 1]$. Compte tenant de (25), $P_2(1)$ est donné par la formule

$$P_2(1) = \frac{-u^{2k+4} - v^{2k+4} + 2(uv)^{k+1}(2k^2 + 8k + 7 + \alpha^2)}{(k+2)^2(k+3)(u^{k+1} - v^{k+1})}$$

et est une fonction de α . La dérivée de cette fonction est donnée par la formule

$$(k+2)^2(k+3)(u^{k+1} - v^{k+1})^2 \frac{dP_2(1)}{d\alpha} =$$

$$= (k+3)(u^{3k+4} + v^{3k+4}) -$$

$$- 4\alpha[2k^3 + 10k^2 + 3k + 3 + (k+3)\alpha^2](u^{k+1} - v^{k+1}) + \\ + (4k^3 + 20k^2 + 27k + 9 + (k+3)\alpha^2)uv(u^k + v^k).$$

La fonction $P_2(1)$ de α est donc croissante sur l'intervalle $[-1, 0)$.

Elle a la valeur négative $-\frac{2^{k+3}}{(k+2)^2(k+3)}$ pour $\alpha = -1$ et est certainement positive pour $\alpha \leq \alpha < 0$ (puisque alors $P_1(x)$ ne change pas de signe sur $[-1, 1]$).

Il en résulte qu'il existe un point et un seul $\alpha = a^*$ dans l'intervalle $(-1, a)$ pour lequel $P_2(1) = 0$. Si b^* est la valeur de β tirée de (25) pour $\alpha = a^*$, l'unique formule de la forme (F₆) s'obtient pour $\alpha = a^*, \beta = b^*$.

Nous avons donc démontré l'existence des formules (F₂) – (F₆) et même l'unicité des formules (F₂), (F₄), (F₆). L'existence de la formule (F₆) résulte aussi, autrement d'un autre de nos travaux [8].

Nous donnerons au § suivant la forme explicite de certaines de ces formules (formule (45)) et, en général des formules pour lesquelles $p = 2, k_2 = 1$ (formule (40)).

Pour les formules (F₁) – (F₆) (nos. 12, 13) nous avons indiqué aussi la valeur correspondante de q et leur degré d'exactitude n .

La démonstration de la simplicité des restes des formules (F₁) – (F₆) sera donnée dans le § suivant. De cette façon le théorème 5 sera démontré.

Pour terminer ce § nous allons faire quelques applications.

14. *Première application.* Les formules de Cotes sont des formules de quadrature de la forme (1) avec tous les noeuds simples et équidistants (et de degré d'exactitude $\geq m-1$).

Plus généralement considérons avec J. E. STEFFENSEN, la formule du type (1)

$$(26) \quad \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^m c_i f(z_i) + R[f],$$

où $m = s - 2r + 1$, s étant un nombre naturel, r un entier $\leq \frac{1}{2}s$ et les noeuds (simples) étant donnés par les formules

$$(27) \quad z_i = a + (r + i - 1) \frac{b-a}{s}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Les coefficients c_i , $i = 1, 2, \dots, m$ sont complètement déterminés par la condition que la formule (26) ait son degré d'exactitude $\geq m-1$.

Nous avons alors le

THÉORÈME 6. *Le reste de la formule de Cotes (26) est de degré d'exactitude $2\left[\frac{m-1}{2}\right] + 1$ et est de la forme simple.*

Pour démontrer ce théorème il suffit de modifier très peu la démonstration de J. E. STEFFENSEN [12] donnée par lui, en supposant que la fonction f ait une dérivée continue d'ordre $2\left[\frac{m-1}{2}\right] + 1$

Pour la démonstration on distingue deux cas suivant la parité du nombre m (ou de s)

1. Si m est impair, donc s est pair, on a $\int_a^b l(x)dx = 0$ et

$$(28) \quad (-1)^{\min(r,1)} \int_a^x l(x)dx \geq 0, \text{ pour } x \in [a, b].$$

C'est justement cette inégalité qui a été démontrée d'une façon très élégante par J. E. STEFFENSEN.

Le critère de Steffensen est applicable (on considère l'intervalle $[a, b]$ au lieu de $[-1, 1]$). Le reste $R[f]$ de la formule (26) est de degré d'exactitude m et est de la forme simple.

Remarquons, de plus, que, dans ce cas, nous avons

$$(29) \quad (-1)^{\min(r-1,0)} R[f] > 0$$

pour toute fonction (continue) f convexe d'ordre m .

2. Si m est pair, donc s est impair, toujours d'après J. E. STEFFENSEN nous décomposons le reste

$$(30) \quad R[f] = \int_a^b l(x) [z_1, z_2, \dots, z_m; x; f] dx$$

en la somme

$$(31) \quad R[f] = R_1[f] + R_2[f],$$

correspondante à la décomposition $\left[a, b - \frac{b-a}{s}\right] \cup \left[b - \frac{b-a}{s}, b\right]$ de l'intervalle d'intégration $[a, b]$ du second membre de (30). Nous avons [12],

$$R_1[f] = \int_a^{b - \frac{b-a}{s}} \frac{l(x)}{x - z_m} [z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, x; f] dx,$$

qui est le reste d'une formule de la forme (26) correspondante à $m-1$, donc à un nombre impair de noeuds, mais avec la même valeur de r . Il en résulte que nous avons

$$(32) \quad (-1)^{\min(r-1,0)} R_1[f] > 0$$

pour toute fonction (continue) f convexe d'ordre $m-1$.

Nous avons aussi

$$R_2[f] = \int_{b - \frac{b-a}{s}}^b l(x) [z_1, z_2, \dots, z_m, x; f] dx$$

Ici nous avons $(-1)^{\min(r-1,0)} l(x) \geq 0$ sur l'intervalle $\left[b - \frac{b-a}{s}, b\right]$ et, en vertu du théorème 3, $R_2[f]$ est de degré d'exactitude $m-1$ et de la forme simple. De plus nous avons

$$(33) \quad (-1)^{\min(r-1,0)} R_2[f] > 0$$

pour toute fonction (continue) f , convexe d'ordre $m-1$.

De (31) — (33) il résulte que l'inégalité (29) est encore vérifiée pour toute fonction (continue) f , convexe d'ordre $m-1$.

On voit que ce résultat est valable même si $s = 1$. On a alors $R[f] = R_2[f]$.

Le théorème 6 est donc démontré. On voit aussi que dans la formule (2) ou (3), dans ce cas, nous avons $\text{sg } M = \text{sg } R[x^{n+1}] = \text{sg}(-1)^{\min(r-1, 0)}$. Le signe du coefficient numérique M dépend uniquement du nombre r .

15. *Seconde application.* Une formule du type (1), avec des noeuds simples, des coefficients $c_{i,0}$, $i = 1, 2, \dots, p (= m)$ tous égaux et de degré d'exactitude $\geq m$, s'appelle une formule de quadrature de Tchebycheff. Une telle formule est donc de la forme

$$(34) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m f(z_i) + R[f],$$

où les noeuds $z_1, z_2, \dots, z_m$ sont déterminés (en dehors d'une permutation) par la condition que la formule considérée ait le degré d'exactitude $\geq m$.

On sait qu'une telle formule existe seulement pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 de m . Les noeuds sont alors à l'intérieur de l'intervalle $[-1, 1]$ et on peut prendre $E = [-1, 1]$.

Nous avons le

THÉORÈME 7. *Le reste de la formule de Tchebycheff (34) (pour les valeurs possibles de m) est de degré d'exactitude égal à $2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$ et est de la forme simple.*

La propriété résulte en appliquant le théorème 3.

Le polynôme $l(x) = P_0(x)$ se trouve être calculé, par exemple, dans le livre de V. I. KRILOV [2]. Ce polynôme est donné par le tableau

$$m = 1, x; m = 2, x^2 - \frac{1}{3}; m = 3, x^3 - \frac{x}{2}; m = 4, x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{15}$$

$$m = 5, x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7x}{72}; m = 6, x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{105};$$

$$m = 7, x^7 - \frac{7}{6}x^5 + \frac{119}{360}x^3 - \frac{149x}{6480};$$

$$m = 9, x^9 - \frac{3}{2}x^7 + \frac{27}{40}x^5 - \frac{57}{560}x^3 + \frac{53x}{22400}.$$

On en déduit les polynômes $P_1(x)$ correspondants,

$$m = 1, \frac{1}{2}(x^2 - 1); m = 2, \frac{x(x^2 - 1)}{3}; m = 3, \frac{x^2(x^2 - 1)}{4};$$

$$m = 4, \frac{1}{45}x(x^2 - 1)(9x^2 - 1); m = 5, \frac{x^2 - 1}{144} \left[24 \left(x^2 - \frac{1}{8} \right)^2 + \frac{5}{8} \right];$$

$$m = 6, \frac{x(x^2 - 1)(15x^4 - 6x^2 + 1)}{105};$$

$$m = 7, \frac{x^2 - 1}{12960} \left[1620x^2 \left(x^2 - \frac{5}{18} \right)^2 + 46x^2 + 22 \right];$$

$$m = 9, \frac{x^2 - 1}{44800} \left[4480 \left(x^4 - \frac{7}{16}x^2 + \frac{15}{512} \right)^2 + \frac{3035}{32}x^2 + \frac{59709}{2048} \right].$$

On voit que pour m impair $P_1(x)$ ne change pas de signe sur $[-1, 1]$. Le théorème 7 résulte donc pour ces valeurs de m . Pour m pair le polynôme $P_1(x)$ change de signe sur $[-1, 1]$, on déduit, pour ces valeurs de m , les polynômes $P_2(x)$ correspondants,

$$m = 2, \frac{(x^2 - 1)^2}{12}; m = 4, \frac{1}{90}(x^2 - 1)^2(3x^2 + 1);$$

$$m = 6, \frac{1}{840}(x^2 - 1)^2(15x^4 + 2x^2 + 3),$$

qui ne changent pas de signe sur $[-1, 1]$. Le théorème 7 résulte donc aussi pour ces valeurs de m .

Nous donnons aussi dans le tableau suivant la valeur du degré n d'exactitude et le coefficient $R[x^{n+1}]$ des formules de Tchebycheff,

m	1	2	3	4	5	6	7	9
n	1	3	3	5	5	7	7	9
$R[x^{n+1}]$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{32}{945}$	$\frac{13}{756}$	$\frac{16}{1575}$	$\frac{281}{48600}$	$\frac{163}{73920}$

Pour le calcul de $R[x^{n+1}]$ on peut utiliser la formule (7) et on peut contrôler les résultats obtenus par la formule

$$R[x^{n+1}] = \int_{-1}^1 x^{n+1} dx - \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m z_i^{n+1} = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m z_i^{n+1}, \quad n = 2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$$

et compte tenant de

$$\frac{1 - (-1)^{v+1}}{v+1} = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m z_i^v, \quad v = 1, 2, \dots, 2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$$

Pour $m = 3$ la formule (34) de Tchebycheff n'est autre que la formule (16) dont le reste est donc donné par la formule $R[f] = \frac{1}{15} D_4[f]$, quelle que soit la fonction f continue sur l'intervalle $[-1, 1]$, les noeuds de la différence divisée $D_4[f]$ qui figure dans cette formule étant à l'intérieur de cet intervalle (et dépendant en général de la fonction f).

16. Troisième application. Le théorème 3 permet aussi de construire des formules (1) ayant un reste de degré d'exactitude donné $m + q - 1$ ($q \geq 0$) et de la forme simple. Il suffit de prendre comme noeuds les racines (supposées toutes réelles) d'un polynôme de la forme $l(x) = [(x^2 - 1)^q Q(x)]^{(m)}$, où Q est un polynôme de degré $m - q$ dont le signe ne change pas sur $[-1, 1]$. Ce polynôme peut toujours être choisi de manière que $l(x)$ ait toutes ses racines réelles. Si, en particulier, nous prenons $m = q$, donc si Q est une constante ($\neq 0$), le polynôme l est donné par la formule

$$l(x) = \frac{m!}{(2m)!} [(x^2 - 1)^m]^{(m)}$$

et diffère seulement par un facteur constant (non nul) du polynôme de Legendre de degré m . Nous trouvons ainsi une nouvelle démonstration de la propriété bien connue [9] exprimée par le

THÉORÈME 8. *Le reste dans la formule de quadrature de Gauss avec m noeuds, est de degré d'exactitude $2m - 1$ et est de la forme simple, quelle que soit la fonction f , continue sur l'intervalle d'intégration.*

Le coefficient $R[x^{2m}]$ résulte, en appliquant la formule (15),

$$\begin{aligned} R[x^{2m}] &= \frac{m!}{(2m)!} \int_{-1}^1 x^{2m} [(x^2 - 1)^m]^{(m)} dx = -\frac{m! m!}{(2m)!} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^m dx = \\ &= \frac{2^{2m+1} (m!)^4}{(2m)! (2m-1)!} \end{aligned}$$

§ 2

17. Reprenons la formule (1). Si nous posons $R^*[f] = R[f']$, la fonctionnelle linéaire $R^*[f]$ est définie sur les fonctions dérivables f dont la dérivée appartient à $\mathcal{F}$.

D'après un résultat antérieur (voir le théorème 13 de notre travail cité [9]), pour que le reste $R[f]$ soit de degré d'exactitude n et de la forme simple, il faut et il suffit que $R^*[f]$ soit de degré d'exactitude $n + 1$ et de la forme simple.

Si nous supposons que $R^*[f]$ ait le degré d'exactitude $m + q$ où $q \geq 0$, nous avons

$$(35) \quad R^*[f] = \sum_{i=1}^{p'-q-1} \mu_i [y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+m+q+1}; f]$$

où :

1. $p' = p + 2$, $p + 1$ respectivement p , suivant que les points $-1, 1$ sont tous les deux distincts des noeuds z_i , l'un et un seul des points $-1, 1$ coïncide avec l'un des noeuds z_i , respectivement chacun des points $-1, 1$ coïncide avec l'un des p noeuds z_i .

2. L'inégalité $p' - q - 1 \geq 1$ est vérifiée. Elle résulte de l'inégalité $q \leq p' - 2$ qui est une conséquence des délimitations données à q au § précédent (no. 5).

3. $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{m+p'}$. Parmi ces points figurent $k_i + 1$ fois le noeud z_i , pour $i = 1, 2, \dots, p$ et chacun des points $-1, 1$ distincts des noeuds z_i .

4. Les coefficients μ_i , $i = 1, 2, \dots, p' - q - 1$ sont indépendants de la fonction f .

Le coefficient $R^*[x^{m+q+1}]$ est donné par la formule

$$(36) \quad R^*[x^{m+q+1}] = \sum_{i=1}^{p'-q-1} \mu_i$$

D'ailleurs les formules (35), (36) sont valables sous la seule hypothèse que $R^*[f]$ s'annule sur tout polynôme de degré $m + q$.

Nous en déduisons le

THÉORÈME 9. *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, si tous les coefficients μ_i , $i = 1, 2, \dots, p' - q - 1$ sont de même signe (tous ≥ 0 ou tous ≤ 0), le reste $R[f]$ de la formule (1) est de degré d'exactitude $n = m + q - 1$ et est de la forme simple.*

Il résulte des données du problème que les μ_i , $i = 1, 2, \dots, p' - q - 1$ ne sont jamais tous nuls. La formule (36) nous montre d'ailleurs que nous avons

$$(37) \quad R[x^{n+1}] = \frac{1}{m + q + 1} \sum_{i=1}^{p'-q-1} \mu_i$$

18. Première application. Dans le cas $p' - q - 1 = 1$, ou $q = p' - 2$, le second membre de (35) contient un seul terme et le reste $R[f]$ est nécessairement de la forme simple. Le coefficient μ_1 (qui est $\neq 0$) peut se calculer par identification des deux membres de l'égalité (35). Nous trouvons ainsi

$$(38) \quad \mu_1 = -k_i! c_{i,k_i} \prod_j (z_i - z_j)^{k_j+1}$$

où l'on a posé $z_0 = -1$, $z_{p+1} = 1$, $k_0 = k_{p+1} = 0$, $c_{0,0} = 1$, $c_{p+1,0} = -1$, dans le produit $\prod_j$ la valeur i de j est exceptée et où les indices i, j parcourent les valeurs :

1. $0, 1, \dots, p+1$ si les points $-1, 1$ sont tous les deux distincts des noeuds ($p' = p+2$).

2. $1, 2, \dots, p+1$, $z_1 = -1$ et le point 1 est différent des noeuds ($p' = p+1$).

3. $0, 1, \dots, p$, $z_p = 1$ et le point -1 est différent des noeuds ($p' = p+1$).

4. $1, 2, \dots, p$ et $z_1 = -1$, $z_p = 1$.

Il est facile de comparer la valeur de $R[x^{p+1}]$ déduite des formules (37), (38) avec celle qu'on obtient de (10).

19. Un cas particulier important s'obtient pour

$$l(x) = \frac{(\rho + \sigma + m)!}{(\rho + \sigma + 2m)!} [(x+1)^{\rho+m} (x-1)^{\sigma+m}]^{(m)},$$

où m, ρ, σ sont des entiers non-négatifs non tous nuls. Dans ce cas nous avons $p' = m+2$, $q = m$ et $m = 0$ la formule (1) correspondante est la formule d'Obrechhoff [3]. La formule de Gauss est aussi un cas particulier ($\rho = \sigma = 0$, $m > 0$).

Nous avons donc la généralisation suivante du théorème 8,

THÉORÈME 10. *Le reste dans la formule de quadrature considérée avec $\rho + \sigma + m$ noeuds (dont ρ coïncident avec -1 et σ avec 1) est de degré d'exactitude $n = \rho + \sigma + 2m - 1$ et est de la forme simple, quelle que soit la fonction f ayant sur $[-1, 1]$ une dérivée continue d'ordre $\max(\rho, \sigma)$.*

Le coefficient $R[x^{p+1}]$ se calcule comme dans le cas particulier de la formule de Gauss et on obtient

$$R[x^{\rho+\sigma+2m}] = \frac{(-1)^\sigma 2^{\rho+\sigma+2m+1} m! (\rho+m)! (\sigma+m)! (\rho+\sigma+m)!}{(\rho+\sigma+2m)! (\rho+\sigma+2m+1)!}.$$

20. Les formules (F_1) , (F_2) , (F_4) , (F_6) sont de la forme précédente ($p' - q - 1 = 1$) et ont donc des restes de la forme simple.

Lorsque $p = 1$, en utilisant les notations (21), la formule (1) devient

$$(39) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{u^{k-i} - (-v)^{k-i}}{(k-i)!} f^{(k-1-i)}(\alpha) + R[f],$$

Le degré d'exactitude est égal à $k-1$, sauf si k est impair et $\alpha = 0$, quand il est égal à k . Dans ce dernier cas nous retrouvons la formule (F_1) qui s'écrit donc

$$(40) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{(k-2i)!} f^{(k-1-2i)}(0) + \frac{2}{k+2} D_{k+1}[f] \quad (k = \text{impair}).$$

Lorsque, ou bien k est pair ou bien k est quelconque et $\alpha \in (-1, 1)$, le reste de la formule, en vertu du théorème 3, est de la forme simple et est donné par la formule

$$R[f] = \frac{u^{k+1} - (-v)^{k+1}}{k+1} D_k[f].$$

Lorsque k est impair et $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, le reste est bien de degré d'exactitude $k-1$ mais n'est pas de la forme simple. Cette propriété résulte de l'étude de la formule (62) du notre travail cité [9], formule que nous avons donnée comme une généralisation de la formule d'Obrechhoff [3]. Nous reviendrons plus loin sur cette formule (no. 23).

21. Lorsque $p = 2$ et $k_2 = 1$, en utilisant les notations (22), la formule (1) devient

$$(41) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(k-1-i)!} \left[\frac{u^{k-i} - (-v)^{k-i}}{k-i} - \frac{1}{(\beta-\alpha)^{i+1}} \cdot \frac{u^{k+1} - v^{k+1}}{k+1} \right] f^{(k-1-i)}(\alpha) + \frac{u^{k+1} - (-v)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{f(\beta)}{(\beta-\alpha)^k} + R[f].$$

Le degré d'exactitude de cette formule est égal à $k, k+1$ ou $k+2$ (q est respectivement égal à $0, 1$ ou 2). Nous avons

$$(42) \quad R[x^{k+1}] = \frac{u^{k+2} - (-v)^{k+2}}{k+2} + (\alpha - \beta) \frac{u^{k+1} - (-v)^{k+1}}{k+1}.$$

Si le degré d'exactitude est $> k$, la différence $\alpha - \beta$ est donnée par la formule

$$\alpha - \beta = -\frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{u^{k+2} - (-v)^{k+2}}{u^{k+1} - (-v)^{k+1}},$$

qui revient à (23) respectivement à (25) suivant que k est pair respectivement impair et dans ces cas on a

$$(43) \quad R[x^{k+2}] = \frac{u^{2k+4} + v^{2k+4} - 2(-uv)^{k+1} (2k^2 + 8k + 7 + \alpha^2)}{(k+2)^2 (k+3) [u^{k+1} - (-v)^{k+1}]}$$

$$(44) \quad R[x^{k+3}] = 2 \frac{u^{2k+5} - v^{2k+5} + 2\alpha(-uv)^{k+1} (2k^2 + 10k + 11 + \alpha^2)}{(k+2)(k+3)(k+4) [u^{k+1} - (-v)^{k+1}]}$$

Pour $\alpha = -1$, $\beta = \frac{k}{k+2}$ nous retrouvons, compte tenant de (41), (43), la formule (F₂) qui s'écrit donc

$$(45) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{2^{k-i}}{(k-1-i)!} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{(k+2)^{i+1}}{(k+1)^{i+2}} \right] f^{(k-1-i)}(\alpha) + \\ + \frac{2(k+2)^k}{(k+1)^{k+1}} f\left(\frac{k}{k+2}\right) + \frac{2^{k+3}}{(k+2)^2(k+3)} D_{k+2}[f].$$

La formule (F₄) s'obtient de (41), en supposant k impair, α égal au nombre a défini au no. 13 et $\beta = 1$. Le reste de cette formule est égal à

$$(46) \quad R[x^{k+2}] D_{k+2}[f]$$

où le coefficient $R[x^{k+2}]$ est donné par la formule (43), avec k impair et $\alpha = a$.

De même, la formule (F₆) s'obtient de (41) en supposant k impair et $\alpha = a^*$, $\beta = b^*$, où a^* , b^* sont les nombres définis au no. 13. Le reste de cette formule est égal à $R[x^{k+3}] D_{k+3}[f]$ où le coefficient $R[x^{k+3}]$ est donné par la formule (44) pour k impair et $\alpha = a^*$.

22. *Seconde application.* Supposons maintenant que $p' - q - 1 = 2$. Le second membre de (35) contient alors deux termes et le reste $R[f]$ est de la forme simple si et seulement si $\mu_1 \mu_2 \geq 0$. (donc si et seulement si les deux coefficients μ_1, μ_2 sont de même signe). Conformément à la définition du nombre q on doit d'ailleurs avoir $\mu_1 + \mu_2 = R^*[x^{m+q+1}] \neq 0$. Si donc $\mu_1 \mu_2 < 0$, le reste $R[f]$ est de degré d'exactitude $m + q - 1$ et n'est pas de la forme simple. La formule (35) est valable, bien entendu, sous la seule hypothèse que $R[f]$ s'annule pour tout polynôme de degré $m + q - 1$, mais lorsque $\mu_1 \mu_2 = 0$ ou $\mu_1 + \mu_2 = 0$ on revient, par une modification simple des notations, à la première application (quand il y a un seul terme dans le second membre de (35)).

Nous avons

$$(47) \quad R^*[f] = f(1) - f(-1) - \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{i,j} f^{(j+1)}(z_i).$$

Alors si $q = p - 1$, donc si le degré d'exactitude de $R[f]$ est $m + p - 2$ et si les noeuds z_i , $i = 1, 2, \dots, p$ sont tous dans l'intervalle ouvert $(-1, 1)$, la formule (35) peut s'écrire ($y_1 = -1$, $y_{m+p+2} = 1$)

$$(48) \quad R^*[f] = \mu_1 [y_1, y_2, \dots, y_{m+p+1}; f] + \mu_2 [y_2, y_3, \dots, y_{m+p+2}; f] = \\ = \mu_1 [-1, \underbrace{z_1, z_1, \dots, z_1}_{k_1+1}, \underbrace{z_2, z_2, \dots, z_2}_{k_2+1}, \dots, \underbrace{z_p, z_p, \dots, z_p}_{k_p+1}; f] + \\ + \mu_2 [\underbrace{z_1, z_1, \dots, z_1}_{k_1+1}, \underbrace{z_2, z_2, \dots, z_2}_{k_2+1}, \dots, \underbrace{z_p, z_p, \dots, z_p}_{k_p+1}, 1; f]$$

où les coefficients μ_1, μ_2 sont donnés par les formules

$$(49) \quad \mu_1 = (-1)^{m+p-1} \prod_{i=1}^p (1 + z_i)^{k_i+1}, \quad \mu_2 = \prod_{i=1}^p (1 - z_i)^{k_i+1}$$

et nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 11. *Le reste de la formule (1) où les noeuds z_i , $i = 1, 2, \dots, p$ sont tous dans l'intervalle $(-1, 1)$ et dont le degré d'exactitude est égal à $m + p - 2$, est de la forme simple respectivement n'est pas de la forme simple suivant que $m + p$ est un nombre impair ou un nombre pair.*

23. Reprenons la formule (39) pour k impair et $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Les hypothèses du théorème 11 sont vérifiées et nous avons $m = k$, $p = 1$ donc $m + p$ est pair. Il en résulte que la formule est de degré d'exactitude $k - 1$, mais son reste n'est pas de la forme simple.

Les hypothèses du théorème 11 sont vérifiées aussi pour la formule (F₃). Dans ce cas $m = k + 1$, $p = 2$ et la somme $m + p$ est impaire. Il en résulte que le reste de cette formule, de degré d'exactitude $k + 1$, est de la forme simple. Ce reste est donné par (46) où $R[x^{k+2}]$ est donné par la formule (43) où k est pair.

Un exemple de formule du type (F₃) est donné par ($k = 2$)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{25} \left[9f\left(-\frac{1}{3}\right) - 5f'\left(-\frac{1}{3}\right) + 16f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{34}{135} D_4[f] \right].$$

24. Pour terminer la démonstration du théorème 5 il nous reste encore à étudier la formule (F₅). Dans ce cas nous pouvons écrire

$$(50) \quad R^*[f] = \mu_1 [-1, \underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_{k+1}, 1, \beta; f] + \mu_2 [\alpha, \underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_{k+1}, 1, \beta, \beta; f].$$

Pour calculer les coefficients μ_1, μ_2 , nous identifions les coefficients de $f(-1)$ et de $f'(\beta)$ dans (47) et (50). Compte tenant de (4), nous déduisons,

$$\mu_1 = -2(1 + \beta)(1 + \alpha)^{k+1} < 0,$$

$$\mu_2 = -(\beta - \alpha)^{k+1}(\beta - 1)c_{2,0} = -(\beta - \alpha)(\beta - 1) \int_{-1}^1 (x - \alpha)^k dx = \\ = -(\beta - \alpha)(\beta - 1) \frac{u^{k+1} - v^{k+1}}{k+1} < 0.$$

Il en résulte bien que le reste de la formule (F₅) est de la forme simple. Ce reste est encore donné par la formule (43) où, cette fois, k est impair.

Le théorème 5 est donc complètement démontré.

La formule

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{13} \left[12f\left(-\frac{1}{6}\right) + f(2) \right] - \frac{11}{9} D_3[f]$$

est un exemple de formule du type (F₅).

25. Lorsque $p = 3$, $z_1 = -1$, $z_2 = \alpha$, $z_3 = 1$, nous avons $p' = 3$ et nous sommes toujours dans le cas $p' - q - 1 = 1$ ou dans le cas $p' - q - 1 = 2$. Pour $\alpha \in (-1, 1)$ nous avons étudié la simplicité du reste de cette formule dans un travail antérieur [9]. Dans ce cas, lorsque la formule est de degré d'exactitude $m - 1$, le reste est de la forme simple ou n'est pas de la forme simple suivant que $(-1)^{k_2+k_3+1} \operatorname{sg}(c_{1,k_1-1} c_{3,k_3-1})$ est égal à 1 ou à -1.

On retrouve la simplicité du reste de la formule de Simpson en prenant $k_1 = k_3 = 1$, $k_2 = 2$, $\alpha = 0$. Dans ce cas $q = 0$ et $c_{1,0} = c_{3,0} = \frac{1}{3}$ sont bien positifs. Remarquons que la simplicité du reste de la formule de Simpson s'obtient aussi du théorème 10 en prenant $\rho = \sigma = m = 1$. En effet, cette formule peut aussi être obtenue en prenant $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $\alpha = 0$, mais alors il faut prendre $q = 1$. Dans la première interprétation nous sommes dans le cas $p' - q - 1 = 2$, mais dans la seconde interprétation dans le cas $p' - q - 1 = 1$.

Pour la formule de Simpson on a, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} R^*[f] &= -\frac{2}{3} [-1, -1, 0, 0, 0, 1; f] - \frac{2}{3} [-1, 0, 0, 0, 1, 1; f] = \\ &= -\frac{4}{3} [-1, -1, 0, 0, 1, 1; f]. \end{aligned}$$

Comme un autre exemple considérons la formule de quadrature de D. G. SANIKIDZÉ [11],

$$(51) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{210} [-51f(-1) - 42f'(-1) - 6f''(-1) + 432f(0) - 48f'(0) + 40f''(0) + 39f(1)] + R[f].$$

Dans ce cas $k_1 = 3$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$, $\alpha = 0$, $c_{1,2} = -\frac{1}{35} < 0$, $c_{3,0} = \frac{13}{70} > 0$ et $(-1)^{k_2+k_3+1} \operatorname{sg}(c_{1,k_1-1} \cdot c_{3,k_3-1}) = 1$.

Le reste, égal à $-\frac{8}{35} D_7[f]$, de cette formule est donc de degré d'exactitude 6 et est de la forme simple.

Sur la formule donnée par D. G. SANIKIDZÉ (formule (11)) dans son travail [11], on ne peut pas assez clairement reconnaître le simplicité du reste*).

26. L'application du théorème 9 nécessite, en général, le calcul des coefficients μ_i de la formule (35).

En supposant toujours que la formule (1) ait un degré d'exactitude égal à $m + q - 1$ ($q \geq 0$), nous avons pour tout j vérifiant les inégalités

$$(52) \quad k = \max(k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_p + 1) \leq j \leq m + q + 1,$$

une égalité de la forme

$$(53) \quad R^*[f] = \sum_{i=1}^{m+q-j} \mu_i^{(j)} [y_1, y_2, \dots, y_{i+j}; f],$$

les $\mu_i^{(j)}$ étant indépendants de la fonction f .

Nous avons alors

$$(54) \quad \mu_i = \mu_i^{(m+q+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, p' - q - 1.$$

En partant des coefficients $\mu_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, m + p' - k$ on peut successivement calculer les coefficients $\mu_i^{(j)}$ pour $i = 1, 2, \dots, m + p' - k$, $j = k, k + 1, \dots, m + q + 1$, à l'aide des formules de récurrence

$$(55) \quad \mu_i^{(j+1)} = -(y_{j+i+1} - y_i) \sum_{v=1}^i \mu_v^{(j)}$$

$$i = 1, 2, \dots, m + p' - j - 1, \quad j = k, k + 1, \dots, m + q.$$

L'application de cette méthode nous donne, dans le cas de la formule (51), $k = 3$,

$$\begin{aligned} 70R^*[f] &= 12[-1, -1, -1, -1; f] - 28[-1, -1, -1, 0; f] - \\ &\quad - 11[-1, -1, 0, 0; f] + 76[-1, 0, 0, 0; f] - \\ &\quad - 80[0, 0, 0, 0; f] + 44[0, 0, 0, 1; f] - 13[0, 0, 1, 1; f]. \end{aligned}$$

*). Il résulte de ce qui précède que dans cette formule on peut toujours prendre $\xi = \eta$.

et, en utilisant les formules (55) nous trouvons

$$35R^*[f] = -12[-1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1; f] - \\ -52[-1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1; f].$$

Cette formule met clairement en évidence la simplicité du reste.

27. La méthode précédente peut être appliquée, en général, à des combinaisons linéaires $A[f]$ d'un nombre fini de valeurs de la fonction f et certaines de ses dérivées, en respectant, bien entendu, les hypothèses qui ont été mise en évidence dans notre travail antérieur [9]. Par exemple, la fonctionnelle linéaire

$$(56) \quad A[f] = f(1) - f(0) - f'''(0)$$

est de degré d'exactitude 0 mais, évidemment, ne peut pas se mettre sous la forme (35). La fonctionnelle linéaire (56) est définie pour toute fonction f ayant une dérivée continue d'ordre 3 sur un intervalle E contenant $[0, 1]$ mais n'est pas de la forme simple. Autrement pour tout f il existerait au moins un point ξ appartenant à l'intérieur de E tel que l'on ait

$$(57) \quad A[f] = f'(\xi).$$

Si nous prenons $f(x) = x^3 + x^2$ l'égalité (57) devient $3\xi^2 + 2\xi + 4 = 0$ qui n'est vérifiée par aucune valeur réelle de ξ .

§ 3

28. Si les coefficients μ_i de la formule (35) sont tous de même signe (et non pas tous nuls) on peut déduire la simplicité du reste $R[f]$ sans faire l'hypothèse 3 du no. 17 sur la monotonie de la suite $(y_i)_{i=1}^{m+p}$.

Ainsi, on peut énoncer des résultats analogues à celui exprimé par le théorème 11 lorsque les noeuds z_i , sans coïncider avec les points -1 et 1 , ne sont pas nécessairement tous dans $(-1, 1)$. Compte tenant de (18) et de (49), on déduit que $(z_i^2 \neq 1, i = 1, 2, \dots, p)$ $\text{sg}(\mu_1 \mu_2) =$

$= \text{sg}(-1)^{\sum_{i=1}^p (k_i + \text{sg } k_i) + 1}$. Si donc le degré d'exactitude est $m + p - 2$, le reste est de la forme simple ou n'est pas de la forme simple suivant que

la somme $\sum_{i=1}^p (k_i + \text{sg } k_i)$ est impaire ou paire.

29. Considérons la formule du type (1)

$$(58) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^p c_i f(z_i) + R[f],$$

les noeuds z_i étant simples, distincts et différents des points $-1, 1$. Pour fixer les idées supposons que $-1 < z_1 < z_2 < \dots < z_p < 1$. Alors si nous supposons que le reste de la formule (58) s'annule pour tout polynome de degré p , nous déduisons la formule

$$(59) \quad R^*[f] = - \sum_{i=1}^p (z_i^2 - 1) l'(z_i) c_i [-1, z_1, z_2, \dots, z_p, 1, z_i; f],$$

$$\text{où } l(x) = \prod_{i=1}^p (x - z_i).$$

La démonstration de la formule (59) ne présente pas de difficultés. La différence des deux membres de cette inégalité est une combinaison linéaire des valeurs aux points $-1, 1, z_1, z_2, \dots, z_p$ de la fonction f et qui s'annule sur tout polynome de degré $p + 1$, elle est donc nulle identiquement.

De la formule (59) nous déduisons le

THÉOREME 12. Si dans la formule de quadrature (58) les coefficients c_i sont alternativement positifs et négatifs ($c_i c_{i+1} < 0, i = 1, 2, \dots, p - 1$) et si le degré d'exactitude de cette formule est égal à p , son reste est de la forme simple.

On suppose toujours que $-1 < z_1 < z_2 < \dots < z_p < 1$.

Nous avons, en particulier,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right] + \frac{13}{45} D_4[f] \\ \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \left[f\left(-\sqrt{\frac{33}{60}}\right) - f\left(-\sqrt{\frac{13}{60}}\right) + f(0) - f\left(\sqrt{\frac{13}{60}}\right) + \right. \\ \left. + f\left(\sqrt{\frac{33}{60}}\right) \right] + \frac{3821}{37800} D_6[f]$$

qui sont valables pour toute fonction f continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. S. E. MIKELADZE a donné ces formules [4], en supposant que f admette une dérivée 4^{ème} respectivement une dérivée 6^{ème} continue sur $[-1, 1]$.

L'existence des formules de la forme considérée dans le théorème 12 a été étudiée par S. N. BERNSTEIN [1].

30. On peut facilement généraliser les résultats précédents. Nous nous contenterons d'énoncer le résultat suivant relativement à la formule (1): Si $p > 1, -1 \leq z_1 < z_2 < \dots < z_p \leq 1$, si la formule est de degré d'exac-

titude $m + p' - p - 2$ et si $(-1)^{k_i} c_{i,k_i-1} c_{i+1,k_{i+1}-1} > 0$ pour $i = 1, 2, \dots, p-1$, le reste est de la forme simple.

Par exemple, le reste de la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{8} \left[3f(-1) + 3f(1) + 16f(0) - 3f\left(-\frac{1}{3}\right) - 3f\left(\frac{1}{3}\right) \right] +$$

$$-\frac{46}{135} D_4[f]$$

est simple.

Dans le cas de la formule

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} [f(-1) + 2f(0) + f(1)] - \frac{1}{3} D_2[f]$$

nous avons $R^*[f] = -[-1, -1, 0, 1; f] + [-1, 0, 0, 1; f] - [-1, 0, 1, 1; f] = -\frac{1}{2} \{ [-1, -1, 0, 0; f] + [0, 0, 1, 1; f] \}$ et la simplicité du reste ne résulte pas de la remarque précédente, mais bien du théorème 9.

§ 4

31. Dans ce § nous ferons quelques remarques sur certaines généralisations du théorème 7. H. E. SALZER a étudié [10], comme une extension des formules de Tchebycheff (34), les formules

$$(60) \quad \int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(z_i) + R[f]$$

$$(61) \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m} \sum_{i=1}^m f(z_i) + R[f]$$

de degré d'exactitude $\geq m$. Ces sont les formules de Tchebycheff sur l'intervalle semi-infini et l'intervalle infini.

Nous prenons maintenant comme ensemble $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues f sur l'intervalle $E = [0, +\infty)$ respectivement sur l'intervalle $E = (-\infty, +\infty)$ et pour lesquelles l'intégrale du premier membre existe. $\mathcal{F}$ contient encore tous les polynômes et $R[f]$ est une fonctionnelle linéaire définie sur $\mathcal{F}$.

32. La formule (60) n'existe pas pour $m = 3$ et la formule (61) n'existe pas pour $m = 4$ (et pour des valeurs plus grandes de m)

Les formules de Tchebycheff (60) pour $m = 1, 2$ et les formules de Tchebycheff (61) pour $m = 1, 2, 3$, ont des restes de la forme simple et s'écrivent respectivement

$$(62) \quad \int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = f(1) + D_2[f]$$

$$(63) \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x) dx = \frac{1}{2} [f(0) + f(2)] + 2D_3[f]$$

$$(64) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2} D_2[f]$$

$$(65) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x) dx = \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] + \frac{1}{2} D_4[f]$$

$$(66) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x) dx = \frac{1}{3} \left[f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] + \frac{3}{8} D_4[f]$$

33. La démonstration des formules (62)–(65) ne présente pas de difficultés puisque ces formules ne changent pas si au second membre on leur ajoute les termes $0.f'(1)$, $0.f'(2)$, $0.f'(0)$, $0.f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0.f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ respectivement et le reste de ces formules peut donc s'écrire

$$R[f] = \int_0^\infty (x-1)^2 e^{-x} [1, 1, x; f] dx$$

$$R[f] = \int_0^\infty x(x-2)^2 e^{-x} [0, 2, 2, x; f] dx$$

$$\sqrt{\pi} R[f] = \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2} [0, 0, x; f] dx$$

$$\sqrt{\pi} R[f] = \int_{-\infty}^\infty \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 e^{-x^2} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, x; f\right] dx$$

respectivement.

On en déduit que les formules (62)–(65) sont valables pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ dérivable.

34. Sur la formule (66) nous allons établir seulement un résultat moins général. Le reste de cette formule peut s'écrire

$$\sqrt{\pi} R[f] = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(x^2 - \frac{3}{4} \right) e^{-x^2} \left[0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, x; f \right] dx$$

et de la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} R[f] = & - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{8} \right) e^{-x^2} \left[0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, x; f \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{8} \right) \left[0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, x, x; f \right] e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

il résulte que la formule (66) est vraie pour toute fonction f pour laquelle l'intégrale du second membre existe (en particulier pour tout polynôme).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bernstein S., *Quelques applications de la méthode paramétrique à l'étude des formules de quadrature*. Commun. Kharkov (4) 15, 1, 3–29 (1938).
- [2] Krilov V. I., *Približenoe vicislennie integralov*. 1959.
- [3] Obrechko N., *Neue Quadraturformeln*. Abh. preuss. Akad. Wiss., 4, 1–20 (1940).
- [4] Mikeladze J. F., *Cislenie metodî matematicheskovo analiza*. 1953.
- [5] Popoviciu T., *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX)*. Bulletin Math. Soc Roum. des Sci. 43, 85–141 (1942).
- [6] — *Asupra formei restului în unele formule de aproximatie ale analizei*. Lucrările Ses. Gen. Științifice ale Acad. R.P.R., 183–185 (1950).
- [7] — *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*. Studii și Cerc. Matem. 3, 53–122 (1952).
- [8] — *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*. Studii și Cerc. St. Iași, 6, 29–57 (1955).
- [9] — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. Mathematica 1 (24), 95–142 (1959).
- [10] Salzer Herbert E., *Equally weighted quadrature formulas over semi-infinite and infinite intervals*. Journal of Math. and Phys., XXXIV, 54–63 (1955).
- [11] Sanikidze D. G., *Interpolirovanie c razdelenimi raznostiami*. Sobsc. Acad. N. Gruzin SSR., XXV, 1, 3–10 (1960).
- [12] Steffensen J. F., *Interpolation*, 1950.

Reçu le 12. III. 1963.

ADRESELE AUTORILOR ALTEI LEI AUTOREI

- Căminul Academic Cămin, Universitatea din București, str. Academiei nr. 14, București
- C. Ciogăreanu, str. 20 August nr. 14, Cluj
- S. E. Chelaru, Department of Mathematics, Bangalore College, Calcutta — 8, India
- C. Ciocăreanu, str. 10, București nr. 7, Iași
- Mihail Ciocăreanu, str. Ciocăreanu nr. 1, Cluj
- I. Ciocăreanu, Universitatea din București, str. Academiei nr. 14, București
- S. Ciocăreanu, str. Ciocăreanu nr. 1, Iași
- Ciocăreanu Mihail, str. 20 August nr. 14, Cluj
- Dora T. Ciocăreanu, str. 20 August nr. 14, Cluj
- Elena Ciocăreanu, str. Ciocăreanu nr. 1, Cluj
- A. E. Ciocăreanu, str. Ciocăreanu nr. 1, Cluj
- Lucian Ciocăreanu, str. Ciocăreanu nr. 1, Cluj
- Valer Ciocăreanu, str. Ciocăreanu nr. 1, Cluj
- Valer Ciocăreanu, str. Ciocăreanu nr. 1, Cluj
- S. Ciocăreanu, str. Ciocăreanu nr. 1, Cluj
- S. Ciocăreanu, str. 20 August nr. 14, Cluj
- I. Ciocăreanu, Institutul Agronom, Cluj
- Valer Ciocăreanu, str. Ciocăreanu nr. 1, Cluj
- S. E. Ciocăreanu, Universitatea din București, str. Academiei nr. 14, București

Interpolarea Polinoilor (Cluj) — 573/1965