

Popoviciu, T. ¹⁾

ÜBER DIE EINWERTIGKEIT UND DIE MEHRWERTIGKEIT
DER FUNKTIONEN EINER REELLEN VARIABLEN

1. In der Approximationstheorie der Funktionen und ihren Anwendungen wird eine besondere Aufmerksamkeit bestimmten speziellen Klassen von Funktionen geschenkt, für welche die entsprechenden Approximationsprobleme bestimmte spezielle Aspekte aufweisen. So erhebt z. B. die Approximation durch Polynome der stetigen, der differenzierbaren oder der integrierbaren Funktionen für jede dieser Funktionsklassen spezifische, in der Analysis gut bekannte Probleme. Ich werde mich in meiner Mitteilung besonders mit jenen Eigenschaften beschäftigen, welche bestimmte Verhalten der Funktionen charakterisieren. Es ist schwer, eine genaue Definition des Begriffes des Verhaltens oder eines bestimmten Verhaltens einer Funktion zu geben; trotzdem werden solche Eigenschaften auf Schritt und Tritt angetroffen. Unter dem Verhalten einer Funktion versteht man z. B. die Art, in der sie sich verändert, oder anschaulicher, ihr graphisches Bild. In dem nun Folgenden beschränken wir uns auf einige Beispiele für das oben Gesagte.

2. Es sei eine in dem Intervall I definierte Funktion gegeben. Eine Verhaltenseigenschaft ist die Nichtnegativität (im Besonderen die Positivität) dieser Funktion. Diese Funktionen haben die Eigenschaft, daß ihre Menge einen Keil bildet (oder eine nichtnegativ lineare Menge). Mit anderen Worten: jede lineare Kombination mit nichtnegativen Koeffizienten einer endlichen Anzahl von nichtnegativen Funktionen ist selber eine nichtnegative Funktion. Eine der Nichtnegativität verwandte Eigenschaft ist die Beschränktheit nach unten. Die in I nach unten beschränkten Funktionen bilden ebenfalls einen Keil. Damit eine Funktion f nach unten beschränkt sei, ist es notwendig und hinreichend, daß es eine Konstante C gibt, so daß die Funktion $f(x) - C$ nichtnegativ ist.

3. Ein anderer wichtiger Keil wird durch die in I nichtabnehmenden Funktionen gebildet. Einer ähnlichen Eigenschaft erfreuen sich die Funktionen f , für die es ein Polynom ersten Grades $ax + b$ gibt, so daß die Funktion $f(x) - ax - b$ nichtabnehmend ist. Dies sind jene Funktionen, für welche die Steigung

$$[x_1, x_2; f] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

nach unten beschränkt ist. Die Funktionen, die eine nach unten beschränkte Steigung besitzen, bilden ebenfalls einen Keil.

4. Ein Spezialfall der nichtabnehmenden Funktionen sind die (streng) zunehmenden Funktionen. Eine stetige zunehmende oder abnehmende, also im Intervall I streng monotone Funktion kann auch durch ihre Einwertigkeit charakterisiert werden, durch die Eigenschaft, daß jeder ihrer Werte ein einziges Mal angenommen wird. Folglich haben wir folgenden

Satz 1. Damit eine im Intervall I definierte und stetige Funktion streng monoton (zunehmend oder abnehmend) sei, ist es notwendig und hinreichend, daß sie einwertig ist.

Die Bedingung ist notwendig. Falls die Funktion f nicht einwertig wäre, würde es zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in I$ geben, so daß $f(x_1) = f(x_2)$, und dann hätten wir $[x_1, x_2; f] = 0$ und die Funktion könnte nicht streng monoton sein.

Die Bedingung ist hinreichend. Nehmen wir an, die Funktion sei stetig und einwertig. Wir werden zeigen, daß f streng monoton ist. Falls es nicht so wäre, hätten wir folgende zwei Fälle zu untersuchen.

1. Es gibt zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in I$, so daß $[x_1, x_2; f] = 0$. Es folgt $f(x_1) = f(x_2)$, was aber der Einwertigkeit der Funktion widerspricht.
2. Es gibt die voneinander verschiedenen Punkte $x'_1, x'_2 \in I$ und die voneinander verschiedenen Punkte $x''_1, x''_2 \in I$, so daß

$$[x'_1, x'_2; f] = A < 0 \quad [x''_1, x''_2; f] = B > 0$$

Wir nehmen an $x'_1 < x'_2$, $x''_1 < x''_2$ und setzen

$$x_1 = x_1(\lambda) = \lambda x'_1 + (1 - \lambda) x''_1, \quad x_2 = x_2(\lambda) = \lambda x'_2 + (1 - \lambda) x''_2.$$

Dann ist $[x_1, x_2; f]$ eine im Intervall $[0, 1]$ stetige Funktion von λ , welche den Wert A für $\lambda = 1$ und den

1) Prof. Dr., Cluj, Academia Republicii Socialiste Romania, Filiala Cluj, Institutul de calcul

Wert B für $\lambda = 0$ annimmt. Hieraus folgt, daß es einen Wert $\lambda \in (0,1)$ für ein $x_1 \neq x_2$ und $[x_1, x_2; f] = 0$ gibt, und somit gelangen wir wieder zum ersten Fall.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

5. Es stellt sich nun die Frage, wie man das Verhalten einer Funktion charakterisieren könnte, wenn sie einige ihrer Werte mehrere Male annehmen kann? Zur Vereinfachung werden wir sagen, daß eine im Intervall I definierte Funktion zweiwertig ist, wenn sie jeden ihrer Werte höchstens zweimal annimmt.

Wir haben folgenden

Satz 2. Ist eine in einem endlichen und abgeschlossenen Intervall I definierte und stetige Funktion zweiwertig, so ist es möglich, das Intervall I in höchstens 3 abgeschlossene aufeinanderfolgende Intervalle zu zerlegen so daß in jedem von ihnen die Funktion (streng) monoton ist.

Man sagt, das abgeschlossene Intervall I sei die Vereinigung der abgeschlossenen aufeinanderfolgenden Intervalle $I_1, I_2, \dots, I_k$, wenn für jedes $\alpha = 1, 2, \dots, k-1$ die Intervalle $I_\alpha, I_{\alpha+1}$ einen einzigen gemeinsamen Punkt haben und $x' \in I_\alpha, x'' \in I_{\alpha+1} \rightarrow x' \leq x''$, und wenn $I = \bigcup_{\alpha=1}^k I_\alpha$. Einige der Intervalle I_α können aus einem einzigen Punkt gebildet sein.

Wir werden nun Satz 2 beweisen. Es sei $I = [a, b]$, ($a < b$), und wir nehmen an, die Funktion f sei keine Konstante und sie sei zweiwertig in $[a, b]$. Aus der Stetigkeit von f folgt die Existenz eines $c \in [a, b]$ und eines $d \in [a, b]$ so daß $\inf f = f(c)$, $\sup f = f(d)$. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, können wir $a \leq c < d \leq b$ voraussetzen. Dann wird jeder Wert von f wenigstens einmal angenommen. Wir werden zeigen, daß die Funktion f in dem Intervall $[c, d]$ einwertig ist. Wäre dies nicht der Fall, würde es zwei Punkte x_1, x_2 geben, so daß $c \leq x_1 < x_2 \leq d$ und $f(x_1) = f(x_2)$, also $[x_1, x_2; f] = 0$. Auf Grund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung kann man 2 Punkte x'_1, x'_2 finden, so daß $x_1 < x'_1 < x'_2 < x_2$ und $[x'_1, x'_2; f] = 0$. Wir können nicht $f(x'_1) = f(x'_2) = f(x_1) = f(x_2)$ haben, da wir sonst in einen Widerspruch zur Zweideutigkeit der Funktion f gelangen. Wir haben folglich $f(x'_1) = f(x'_2) \neq f(x_1) = f(x_2)$. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, können wir $f(x'_1) = f(x'_2) < f(x_1) = f(x_2)$ setzen. Dann ist notwendigerweise $c < x_1$, und der Wert $f(x'_1)$ wird wenigstens in einem Punkte $x_0 \in [c, x_1]$ angenommen. Also ist $f(x_0) = f(x'_1) = f(x'_2)$, was wiederum der Zweideutigkeit der Funktion widerspricht. Ebenso wird der Fall

$$f(x'_1) = f(x'_2) > f(x_1) = f(x_2)$$

behandelt. Damit haben wir bewiesen, daß die Funktion f im Intervall $[c, d]$ einwertig ist. Auf Grund des Satzes 1 ist sie also monoton in $[c, d]$. Auf Grund der Definition der Punkte c, d und der Eigenschaft, daß die Funktion zweiwertig ist, folgt, daß die Funktion in jedem der Intervalle $[a, c]$, $[d, b]$ einwertig ist, und folglich ist sie in diesen Intervallen monoton.

Ebenso wird der Fall $a \leq d < c \leq b$ behandelt, und damit ist Satz 2 bewiesen.

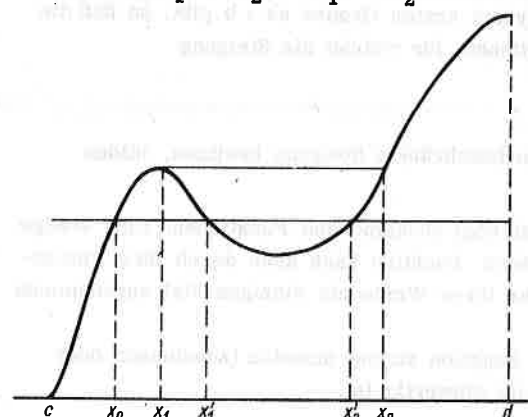


Bild 1

6. Eine Funktion wird dreiwertig genannt, wenn sie jeden ihrer Werte höchstens dreimal annimmt. Es gibt keinen dem Satz 2 entsprechenden Satz für die dreiwertigen Funktionen, in dem Sinne, daß für eine stetige und dreiwertige Funktion das Intervall I im allgemeinen nicht in eine endliche Anzahl von aufeinanderfolgenden Monotonie-Intervallen zerlegt werden kann.

Um das zu beweisen, genügt es, eine im Intervall $[0,1]$, definierte und stetige Funktion aufzuzeigen, für welche

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right); \quad f\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right) = \frac{3}{2^{n+2}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

gilt und die linear in den Intervallen

$$\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+2}}\right], \quad \left[\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}\right], \quad n = 0, 1, \dots \text{ ist.}$$

Diese Funktion ist dreiwertig und zunehmend in jedem der Intervalle und abnehmend in jedem der Intervalle

$$\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+2}}\right] \quad n = 0, 1, \dots$$

7. Die vorstehenden Ergebnisse können in mehrere Richtungen verallgemeinert werden, indem man eine entsprechende Verallgemeinerung der Monotonie-Eigenschaft einer Funktion sucht. Eine solche Verallgemeinerung erhält man durch die Einführung des Begriffes einer konvexen Funktion höherer Ordnung. Dazu führt man zuerst die Steigungen höherer Ordnung mittels der Rekursionsformel

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_1}$$

$$[x_1; f] = f(x_1)$$

ein. Dann ist $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$ die Steigung n-ter Ordnung in den $n+1$ Punkten $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ (die voneinander verschieden vorausgesetzt werden).

Eine Funktion f nennt man nichtkonvex, konvex, konkav bzw. nichtkonvex n-ter Ordnung, wenn die Steigungen (n+1)-ter Ordnung $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$ für jede Gruppe von $n+2$ verschiedenen Knotenpunkten $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$, $m \geq 1$, $>$, $<$ bzw. ≤ 0 bleiben.

Im Besonderen erhält man für $n = -1$ die Funktionen mit unveränderlichem Vorzeichen, nichtnegative, positive, negative bzw. nichtpositive Funktionen und für $n = 0$ die monotonen Funktionen, nichtabnehmende, zunehmende, abnehmende bzw. nichtzunehmende Funktionen. Für $n = 1$ haben wir die gewöhnlichen nichtkonvexen, konvexen, konkaven bzw. nichtkonvexen Funktionen.

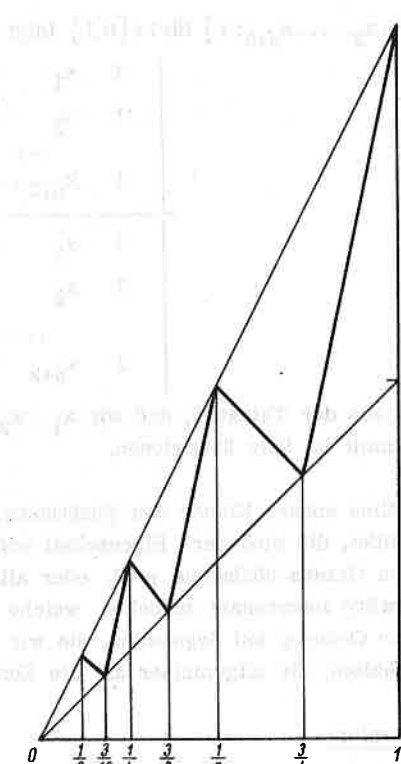


Bild 2

8. Für jede Funktion f gibt es Polynome P n-ten Grades, so daß die Gleichung $f(x) = P(x)$ in wenigstens $n+1$ verschiedenen Punkten gilt. Um das zu beweisen, genügt es, $n+1$ voneinander verschiedene Punkte $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ aus der Definitionsmenge der Funktion f zu wählen und das Lagrangesche Interpolationspolynom bezüglich der Funktion f in den Knotenpunkten x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n+1$ zu betrachten. Wenn P dieses Polynom ist, dann ist es n-ten Grades, und wir haben $f(x_\alpha) = P(x_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n+1$.

Die Funktionen f, für welche die Gleichung $f(x) = P(x)$ höchstens $n+1$ Nullstellen für jedes Polynom P n-ten Grades besitzt, verallgemeinern die einwertigen Funktionen (die Eigenschaft gilt für $n=0$). Dann haben wir folgende Verallgemeinerung des Satzes 1:

Satz 3. Damit die im Intervall I definierte und stetige Funktion f konvex oder konkav n-ter Ordnung sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die Gleichung $f(x) = P(x)$ für jedes Polynom n-ten Grades höchstens $n+1$ Nullstellen besitzt.

Die Bedingung ist notwendig, falls es ein Polynom P n-ten Grades geben würde, so daß $f(x_\alpha) = P(x_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n+2$, wobei die Punkte x_α voneinander verschieden sind, hätten wir $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = 0$, und die Funktion könnte nicht konvex oder konkav n-ter Ordnung sein.

Die Bedingung ist auch hinreichend. Nehmen wir an, die Bedingung aus Satz 3 sei erfüllt, dann können 2 Fälle eintreten.

1. Es gibt $n+2$ voneinander verschiedene Punkte $x_1, x_2, \dots, x_{n+2} \in I$, so daß $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = 0$. In diesem Falle erfüllt das durch die Bedingungen $P(x_\alpha) = f(x_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n+1$ bestimmte Polynom P n-ten Grades auch die Bedingung $P(x_{n+2}) = f(x_{n+2})$, was aber der Voraussetzung widerspricht.
2. Es gibt die voneinander verschiedenen Punkte $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+2} \in I$ und die voneinander verschiedenen Punkte $x''_1, x''_2, \dots, x''_{n+2} \in I$, so daß $[x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+2}; f] = A < 0$, $[x''_1, x''_2, \dots, x''_{n+2}; f] = B > 0$. Wenn wir voraussetzen, daß $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{n+2}$, $x''_1 < x''_2 < \dots < x''_{n+2}$ und $x_\alpha = \lambda x'_\alpha + (1-\lambda) x''_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, n+2$ nehmen, sieht man ebenso wie im Falle $n=0$ des Satzes 1, daß es ein $\lambda \in (0,1)$ gibt, für welches $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = 0$. Somit kehren wir zum Fall 1 zurück. Die Stetigkeit der Steigung

$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$ für $\lambda \in [0, 1]$ folgt aus ihrer Schreibweise in folgender Form

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n & f(x_2) \\ & & \dots & & & \\ 1 & x_{n+2} & \dots & & x_{n+2}^2 & f(x_{n+2}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n+1} \\ & & \dots & & \\ 1 & x_{n+2} & x_{n+2}^2 & \dots & x_{n+2}^{n+1} \end{vmatrix}$$

und aus der Tatsache, daß wir $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ haben, wenn $\lambda \in [0, 1]$.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

9. Eine andere Klasse von Funktionen, die untersucht werden müßte, wird von den stetigen Funktionen f gebildet, die sich der Eigenschaft erfreuen, daß die Gleichung $f(x) = P(x)$ für jedes beliebige Polynom n -ten Grades höchstens $n+2$, oder allgemeiner $n+k$ (k ist eine gegebene natürliche Zahl) Nullstellen hat. Es wäre interessant zu sehen, welche Beziehung zwischen diesen Funktionen besteht und den Funktionen n -ter Ordnung auf Segmenten, die wir in der Arbeit /1/ eingeführt haben, welche ebenfalls bestimmte Verhalten, die allgemeiner als die Konvexität höherer Ordnung sind, charakterisieren.

Literatur:

- /1/ Popoviciu, T.: Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur (II).
Bull. Acad. Roumanie, XXII (1940), 473-477.

Прудников, А. П.

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ В ДИСКРЕТНОМ АНАЛИЗЕ

Операционное исчисление функций двух целочисленных переменных можно построить /1/ не опираясь на общую теорию операционного исчисления по двум переменным /2/. Пусть S — множество всех комплексных или вещественных функций $f(x, y)$ двух дискретных переменных x, y , принимающих все целые неотрицательные значения. Если в множестве S наряду с обычным сложением функций ввести произведение по формуле, представляющей дискретный аналог двумерной свертки, то множество S превращается в коммутативное кольцо без делителей нуля. Расширение кольца S до поля отношений обозначим $R(S)$, элементы поля назовем операторами. Операторы $\frac{1}{x} = \sigma$, $\frac{1}{y} = \tau$ не принадлежат исходному кольцу S . В общем случае произведения $\sigma * f(x, y)$, $\tau * f(x, y)$ есть операторы. Для того, чтобы произведение $\sigma * f(x, y)$ приводилось к функции, необходимо и достаточно, чтобы $f(0, y) = 0$ для всех y ; аналогично, для того чтобы произведение $\tau * f(x, y)$ приводилось к функции, необходимо и достаточно, чтобы $f(x, 0) = 0$ для всех x . Для любой функции $f(x, y) \in S$ имеет место разложение

$$f(x, y) = \frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f(v, \mu)}{(1+\sigma)^v (1+\tau)^\mu} = \bar{f}(\sigma, \tau).$$

Операционные соотношения

$$\frac{\sigma\tau}{\sigma + \tau + \sigma\tau} \bar{f}(\sigma + \tau + \sigma\tau) = \begin{cases} 0, & x \neq y \\ f(x), & x = y \end{cases}$$

$$\bar{f}(\sigma + \tau + \sigma\tau) = f(m), \quad m = \min(x, y)$$

1) Dr., Moskau, Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Rechenzentrum