

UN ANALOGUE DANS L'ESPACE L^p DE L'INÉGALITÉ DE DE LA VALLÉE POUSSIN RELATIVE AU PROBLÈME POLYLOCAL

par

OLEG ARAMĂ

à Cluj

1. Considérons une équation différentielle linéaire et homogène

$$(1.1) \quad L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Nous désignons par Y l'ensemble des solutions de cette équation, solutions définies sur l'intervalle $[a, b]$.

Définition 1. Nous dirons que l'ensemble Y jouit de la propriété $I_n^*[a, a+h]$, où $0 < h \leq b-a$, si de quelque manière que l'on choisisse les nombres naturels $m, p_1, p_2, \dots, p_m$, tels que $m \leq n, p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$, et de quelque manière que l'on choisisse m noeuds $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ dans l'intervalle $[a, a+h]$ et les suites de nombres réels $\{y_k^{(0)}, \dots, y_k^{(p_k-1)}\}, k = 1, \dots, m$, l'ensemble Y contient une solution (et une seule) y , qui satisfait aux conditions

$$(1.2) \quad y(x_k) = y_k^{(0)}, y'(x_k) = y_k^{(1)}, \dots, y^{(p_k-1)}(x_k) = y_k^{(p_k-1)}.$$

Définition 2. Nous dirons que l'ensemble Y jouit de la propriété $J_n[a, a+h]$, si de quelque manière que l'on choisisse les noeuds $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ dans $[a, a+h]$, tels que $\xi_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_{n-1}$, ou $\xi_0 \geq \xi_1 \geq \dots \geq \xi_{n-1}$, et quelles que soient les valeurs réelles $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$, l'ensemble Y contient une solution (et une seule), y , qui satisfait aux conditions

$$(1.3) \quad y(\xi_0) = \eta_0, y'(\xi_1) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi_{n-1}) = \eta_{n-1}.$$

Considérons un nombre $p \geq 1$ et introduisons la notation

$$(1.4) \quad m_k(a, a+h) = m_k(h) = \left(\frac{1}{h} \int_a^{a+h} |a_k(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans le travail [3], en collaboration avec D. RIPIANU, nous avons obtenu des conditions de la forme

$$(1.5) \quad \lambda_n \cdot m_n(h) \cdot h^n + \lambda_{n-1} \cdot m_{n-1}(h) \cdot h^{n-1} + \dots + \lambda_1 \cdot m_1(h) \cdot h - 1 < 0,$$

qui assurent la propriété $I_n^*[a, a+h]$, respectivement $J_n[a, a+h]$ de l'ensemble Y . Dans ces conditions, les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ représentent des nombres réels, qui ne dépendent pas de l'opérateur L . Dans le travail cité, nous avons donné certaines évaluations numériques pour les coefficients λ_k . Nous ferons remarquer que le problème de la détermination des différents systèmes de valeurs des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, qu'on peut respectivement utiliser dans (1.5), pour obtenir des critères qui assurent des propriétés analogues à la propriété $I_n^*[a, a+h]$ ou $J_n[a, a+h]$ de l'ensemble Y , a fait l'objet de plusieurs recherches actuelles, dont nous citons ici celles de V. S. BEZDOMNIKOV et YU. V. KOMLENKO [5], A. M. FINK et D. F. ST. MARY [5a], M. HUKUHARA [6], Z. NEHARI [11], G. S. ZAIČEVA [13] dans le cas $p=1$, le travail de M. MARTELLI [10] dans le cas $p \geq 1$ et le travail [1] de l'auteur du présent article — dans le cas $p=2, n=4$.

Dans le présent travail, on donne pour le cas où p est un nombre réel quelconque ≥ 0 , des évaluations pour les coefficients λ_k de (1.4), autres que celles données dans les travaux [3] et [10]. Les inégalités (1.5) correspondant respectivement à ces déterminations des coefficients λ_k , constituent de nouvelles conditions suffisantes pour que l'ensemble Y possède la propriété $I_n^*[a, a+h]$, respectivement $J_n[a, a+h]$.

2. Les résultats concernant le problème mentionné ci dessus, s'appuient sur certaines délimitations des fonctions réelles, d'une variable réelle, qui s'annulent un certain nombre de fois dans un intervalle $[a, b]$ donné.

Nous désignerons par $A_n[a, b]$ l'ensemble des fonctions f , qui admettent une dérivée d'ordre n , continue sur l'intervalle $[a, b]$ et qui vérifient n conditions d'annulation sur $[a, b]$, de la forme

$$(2.1) \quad f(x_0) = f'(x_1) = \dots = f^{(n-1)}(x_{n-1}) = 0,$$

où les nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ dépendent de f et vérifient les inégalités

$$(2.2) \quad a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq b \quad (n > 1),$$

ou les inégalités

$$(2.2') \quad a \leq x_{n-1} \leq x_{n-2} \leq \dots \leq x_1 \leq x_0 \leq b \quad (n > 1).$$

En supposant que p est un nombre réel, vérifiant l'inégalité $p \geq 1$ nous nous proposons d'abord de déterminer la plus petite constante $\alpha_{n,p}$ qui vérifie l'inégalité

$$(2.3) \quad \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha_{n,p} \cdot (b-a)^{n+\frac{1}{p}} \cdot \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)|,$$

quelque soit $f \in A_n[a, b]$.

Dans le cas $p = \infty$, un problème analogue a été étudié par S. N. BERNSTEIN [4], sans imposer aucune autre restriction concernant les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, que la supposition d'être situés dans l'intervalle $[a, b]$. Ultérieurement, A. YU. LEVIN [9], en s'appuyant sur le théorème de M. G. KREIN et D. P. MILMAN [8], théorème concernant les ensembles convexes, a précisé le résultat en question, de S. N. Bernstein, dans le cas particulier où les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont soumis à des conditions de la forme (2.2) où (2.2').

Dans le présent §, en utilisant une méthode proposée par A. YU. LEVIN [9], on détermine la plus petite valeur de la constante $\alpha_{n,p}$, pour laquelle l'inégalité (2.3) est vérifiée quelque soit la fonction f appartenant à la classe $A_n[a, b]$.

Nous tiendrons compte de l'égalité suivante:

$$(2.4) \quad \alpha_{n,p} = (b-a)^{-n-\frac{1}{p}} \cdot \sup_{f \in A_n[a, b]} \left\{ \left(\max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)| \right)^{-1} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} = \\ = (b-a)^{-n-\frac{1}{p}} \cdot \sup_{f \in A_n^*[a, b]} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $A_n^*[a, b]$ représente le sousensemble de fonctions de $A_n[a, b]$, qui vérifient la condition supplémentaire

$$(2.5) \quad \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)| = 1.$$

Sans restreindre la généralité du problème, nous pouvons supposer $a = 0, b = 1$. Alors la formule (2.4) nous donne

(2.6)

$$\alpha_{n,p} = \sup_{f \in A_n^*[0,1]} \mathfrak{F}[f],$$

où

$$(2.7) \quad \mathfrak{F}[f] = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in C_n[a, b].$$

On constate aisément que la fonctionnelle $\mathfrak{F}$ est continue sur $A_n[a, b]$, par rapport à la norme

$$(2.8) \quad \|f\| = \max_{0 \leq k \leq n} \{ \max_{x \in [0,1]} |f^{(k)}(x)| \} \quad (f \in C_n[a, b])$$

et que le sousensemble $A_n^*[0, 1]$ de $A[0, 1]$ est borné relatif à la métrique $\|\cdot\|$. De plus, la fonctionnelle $\mathfrak{F}$ est sousadditive et positivement homogène sur l'espace $C_n[a, b]$, d'où il résulte qu'elle est convexe sur $C_n[a, b]$, c'est-à-dire qu'on a l'inégalité suivante

$$(2.9) \quad \mathfrak{F}\left[\sum_{(i)} \lambda_i f_i\right] \leq \sum_{(i)} \lambda_i \mathfrak{F}[f_i],$$

quellesque soient les fonctions $f_i \in C_n[a, b]$ et les constantes positives λ_i , vérifiant la condition $\sum_{(i)} \lambda_i = 1$.

Nous considérons la décomposition de l'ensemble $A_n^*[0, 1]$ en classes d'équivalence, d'après le critère suivant: deux fonctions f et $g \in A_n^*[0, 1]$ appartiennent à la même classe, si et seulement si $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ pour chaque $x \in [0, 1]$. Si $g \in A_n^*[0, 1]$, nous désignerons par $A_{n,g}^*[0, 1]$ la classe qui contient la fonction g . Alors nous pouvons écrire

$$(2.10) \quad A^*[0, 1] = \bigcup_{g \in \{\varphi\}} A_{n,g}^*[0, 1],$$

où $\{\varphi\}$ constitue un ensemble complet de représentants de la décomposition de $A_n^*[0, 1]$, en classes d'équivalence. De cette relation, en tenant compte de (2.6) il résulte l'égalité

$$(2.11) \quad \alpha_{n,p} = \sup_{g \in \{\varphi\}} \left\{ \sup_{f \in A_{n,g}^*[0,1]} \mathfrak{F}[f] \right\} = \sup_{g \in \{\varphi\}} \beta_{n,p,g},$$

où on a utilisé la notation

$$(2.12) \quad \beta_{n,p,g} = \sup_{f \in A_{n,g}^*[0,1]} \mathfrak{F}[f].$$

Pour calculer les constantes $\alpha_{n,p}$ données par (2.11), nous nous proposons de calculer d'abord les constantes $\beta_{n,p,g}$ moyennant la formule (2.12). Nous allons voir plus loin, que ces constantes $\beta_{n,p,g}$ ne dépendent pas de la classe $A_{n,g}^*[0, 1]$ considérée, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de la fonction g ($g \in \{\varphi\}$). En vertu de ce résultat, et en utilisant la formule (2.11), on obtiendra aisément les valeurs numériques des constantes $\alpha_{n,p}$.

Compte tenu que la fonctionnelle $\mathfrak{F}$ est continue et bornée sur chaque classe $A_{n,g}^*[0, 1]$ de décomposition de l'ensemble $A_n^*[0, 1]$, et que une telle classe représente un ensemble compact par rapport à la norme (2.8), il résulte que le suprémum qui figure en (2.12) est atteint (sur l'ensemble $A_{n,g}^*[0, 1]$). On peut alors écrire la formule (2.12) sous la forme (2.13)

$$(2.13) \quad \beta_{n,p,g} = \max_{f \in A_{n,g}^*[0,1]} \mathfrak{F}[f].$$

Nous nous proposons de calculer les constantes $\beta_{n,p,g}$. À cet effet, considérons l'enveloppe convexe de l'ensemble $A_{n,g}^*[0, 1]$ et désignons cette enveloppe par $K(A_{n,g}^*[0, 1])$. En tenant compte que l'ensemble $A_{n,g}^*[0, 1]$ représente une famille n -paramétrique de fonctions, compacte dans le sens de la norme (2.8), il résulte que l'ensemble $K(A_{n,g}^*[0, 1])$ est aussi compact dans le sens de la même norme. (Voir à cet égard le travail de S. KARLIN [7], lemme B. 2.1). Il en résulte que le suprémum des valeurs de la fonctionnelle $\mathfrak{F}$ sur l'ensemble $K(A_{n,g}^*[0, 1])$ est également atteint. Mais, compte tenu que la fonctionnelle $\mathfrak{F}$ est non-négative et convexe dans le sens de l'inégalité (2.9), il résulte la proposition suivante, que nous désignerons par (P):

La valeur maximale de la fonctionnelle $\mathfrak{F}$ sur l'enveloppe convexe d'un ensemble quelconque, compact Ω (contenu dans l'ensemble de définition de la fonctionnelle en question) est atteinte sur l'ensemble Ω , c'est-à-dire que le maximum de $\mathfrak{F}$ ne croît pas, quand on passe de l'ensemble Ω à son enveloppe convexe $K(\Omega)$.

En considérant en particulier pour Y , l'ensemble $A_{n,g}^*[0, 1]$, en vertu de la proposition (P), nous pourrions écrire l'égalité

$$(2.14) \quad \max_{f \in A_{n,g}^*[0,1]} \mathfrak{F}[f] = \max_{f \in K(A_{n,g}^*[0,1])} \mathfrak{F}[f].$$

Considérons maintenant la définition suivante:

Un élément f de l'ensemble $K(A_{n,g}^[0, 1])$ sera appelé „point intermédiaire” s'il existe une suite finie d'éléments distincts φ_i ($i = 1, \dots, N$) de l'ensemble $K(A_{n,g}^*[0, 1])$ et une suite finie de nombres réels λ_i , $0 < \lambda_i < 1$ ($i = 1, \dots, N$), tels que $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ et $f = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i$. Un élément de $K(A_{n,g}^*[0, 1])$ qui n'est pas intermédiaire, sera appelé „point extrémal”.*

Cette définition s'étend immédiatement à l'ensemble $A_{n,g}^*[0, 1]$, qui ne constitue pas un ensemble convexe.

Nous désignerons par $E[K(A_{n,g}^*[0, 1])]$, respectivement par $E[A_{n,g}^*[0, 1]]$, l'ensemble des points extrémaux de l'ensemble $K(A_{n,g}^*[0, 1])$, resp. de l'ensemble $A_{n,g}^*[0, 1]$. On peut remarquer qu'on a l'égalité

$$(2.15) \quad E[K(A_{n,g}^*[0, 1])] = E[A_{n,g}^*[0, 1]].$$

Conformément à un théorème bien connu de M. G. KREIN et D. P. MILMAN [8], d'après lequel un ensemble convexe et fermé est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux, il résulte que l'ensemble $K(A_{n,g}^*[0, 1])$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux, et en tenant compte de l'égalité (2.15), il résulte l'égalité

$$(2.16) \quad K(A_{n,g}^*[0, 1]) = K(E[A_{n,g}^*[0, 1]]).$$

En tenant compte des formules (2.13), (2.14) et (2.16), il résulte pour les constantes $\beta_{n,p,g}$ la formule

$$(2.17) \quad \beta_{n,p,g} = \max_{f \in K(E[A_{n,g}^*[0, 1]])} \mathfrak{F}[f].$$

Mais, en vertu de la proposition (P), dans l'énoncé de la quelle on considère pour Ω , l'ensemble $E[A_{n,g}^*[0, 1]]$, on peut écrire au lieu de (2.17), l'égalité

$$(2.18) \quad \beta_{n,p,g} = \max_{f \in E[A_{n,g}^*[0, 1]]} \mathfrak{F}[f],$$

qui réduit le problème posé, à la détermination des éléments extrémaux de l'ensemble $A_{n,g}^*[0, 1]$.

Dans le travail [9], A. YU. LEVIN a démontré que les éléments extrémaux de l'ensemble $A_{n,g}^*[0, 1]$ sont des fonctions f de $A_{n,g}^*[0, 1]$, qui satisfont aux conditions (2.1), dans lesquelles les noedus $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ vérifient des conditions de la forme (2.19) ou (2.20) :

$$(2.19) \quad x_0 = x_1 = \dots = x_{k-1} = 0, \quad x_k = x_{k+1} = \dots = x_{n-1} = c$$

$$(0 < c \leq 1, \quad 1 \leq k \leq n-1);$$

$$(2.20) \quad x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1} = d \quad (0 \leq d \leq 1).$$

Nous avons à considérer deux cas, selon que les noedus $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ vérifient la condition (2.19), ou la condition (2.20).

Premier cas: Les noeuds $x_0, \dots, x_{n-1}$ vérifient les conditions (2.19). Dans ce cas, la fonction f en question admet la, représentation intégrale

$$(2.21) \quad f(x) = \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}(t_k) dt_k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-s)^{k-1} \cdot \psi(s) ds,$$

où nous avons écrit $\psi(x) = f^{(k)}(x)$, $x \in (0, 1)$. De (2.1) et (2.19) il résulte pour la fonction ψ les conditions

$$\psi(c) = \psi'(c) = \dots = \psi^{(n-k-1)}(c) = 0,$$

d'où, en tenant compte aussi de (2.5), où $a = 0$ et $b = 1$, on obtient moyennant la formule de Taylor, la délimitation

$$(2.22) \quad |\psi(x)| \leq \frac{1}{(n-k)!} |x-c|^{n-k}.$$

De (2.21) et (2.22) on obtient la délimitation

$$|f(x)| \leq \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^x (x-s)^{k-1} |s-c|^{n-k} ds,$$

d'où, en tenant compte de (2.7), on obtient

$$(2.23) \quad \mathfrak{F}[f] \leq \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x (x-s)^{k-1} |s-c|^{n-k} ds \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \\ = \Phi_k(c) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

On observe que la fonction $\Phi_k(c)$ est convexe par rapport à la variable c . De cette remarque, en tenant compte de la propriété de non-négativité de la fonctionnelle $\mathfrak{F}$, il résulte la délimitation

$$(2.24) \quad \mathfrak{F}[f] \leq \max \{ \Phi_k(0), \Phi_k(1) \}.$$

On obtient

$$(2.25) \quad \Phi_k(0) = \frac{1}{n! (np+1)^{\frac{1}{p}}},$$

$$(2.26) \quad \Phi_k(1) = \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x (x-s)^{k-1} (1-s)^{n-k} ds \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Deuxième cas: Les noeuds $x_0, \dots, x_n$ vérifient les conditions (2.20). Dans ce cas, la fonction f en question admet la représentation intégrale

$$(2.27) \quad f(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f^{(n)}(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds,$$

où $d \in [0, 1]$.

De cette formule, en tenant compte de (2.5), résulte pour la fonction considérée f , la délimitation (2.28)

$$(2.28) \quad \mathfrak{F}[f] \leq \max \left\{ \frac{1}{(n-1)!} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x (x-s)^{n-1} ds \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \right. \\ \left. \frac{1}{(n-1)!} \left[\int_0^1 \left(\int_x^1 (s-x)^{n-1} ds \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \right\} = \frac{1}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}.$$

Finalement, tenant compte des relations (2.24), (2.25), (2.26), (2.28),

et du fait que le nombre $\left[n!(np+1)^{\frac{1}{p}} \right]^{-1}$, qui intervient dans (2.25) et (2.28) s'obtient de $\Phi_k(1)$, en prenant pour k la valeur $k=n$, on peut écrire la formule

$$(2.29) \quad \mathfrak{F}[f] \leq \max_{k=1, 2, \dots, n} \Phi_k(1),$$

valable quelle que soit la fonction f de la classe $A_{n,g}^*[0, 1]$. En tenant compte des relations (2.12) et (2.11), et en tenant compte de l'expression de $\Phi_k(1)$ donné par (2.26), nous obtenons l'égalité

$$(2.30) \quad \alpha_{n,p} = \max_{k=1, \dots, n} \left\{ \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x (x-s)^{k-1} (1-s)^{n-k} ds \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Remarque. 1. Nous pouvons obtenir une délimitation du coefficient $\alpha_{n,p}$, en tenant compte de (2.29) et en remarquant qu'on a les inégalités

$$\Phi_k(1) \leq \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 (1-s)^{n-1} ds \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(k-1)!(n-k)!n} \\ = \frac{1}{n!} \cdot \binom{n-1}{k-1} \leq \frac{1}{n!} \cdot \binom{n-1}{\left[\frac{n}{2} \right]} = \frac{1}{n \left[\frac{n-1}{2} \right]! \left[\frac{n}{2} \right]!}.$$

On obtient ainsi l'inégalité

$$(2.31) \quad \alpha_{n,p} \leq \frac{1}{n \left[\frac{n-1}{2} \right]! \left[\frac{n}{2} \right]!}.$$

2. On peut démontrer facilement, par une méthode directe, que l'inégalité (2.3) reste valable aussi dans le cas où $n=1$. Dans ce cas on obtient pour le coefficient $\alpha_{n,p}$ la valeur

$$(2.32) \quad \alpha_{1,p} = (p+1)^{-\frac{1}{p}},$$

qui s'obtient aussi de la formule (2.30), en prenant $n=1$.

3. En revenant au problème mentionné au no. 1, considérons l'équation différentielle (1.1), dont nous supposons les coefficients a_k être des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Soient p et q des nombres réels ≥ 1 , vérifiant la condition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nous introduisons les fonctions

$$(3.1) \quad M_{k,q}(a, b) = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |a_k(x)|^q \cdot \exp \left[q \int_a^x |a_1(s)| ds \right] dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ \bar{M}_{k,q}(a, b) = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |a_k(x)|^q \cdot \exp \left[q \int_x^b |a_1(s)| ds \right] dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

et les nombres

$$(3.2) \quad \alpha_{n,p} = \max_{k=1, \dots, n} \left\{ \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x (x-s)^{k-1} (1-s)^{n-k} ds \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Nous nous proposons de démontrer le

THÉORÈME 1. Pour que l'ensemble Y des solutions de l'équation (1.1) jouisse de la propriété $J_n[a, b]$, il suffit que le système suivant d'inégalités ait lieu :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \alpha_{n-1,p} \cdot h^n \cdot M_{n,q}(a, b) + \alpha_{n-2,p} \cdot h^{n-1} \cdot M_{n-1,q}(a, b) + \dots + \\ & \quad + \alpha_{1,p} \cdot h^2 \cdot M_{2,q}(a, b) < 1, \\ & \alpha_{n-1,p} \cdot h^n \cdot \bar{M}_{n,q}(a, b) + \alpha_{n-2,p} \cdot h^{n-1} \cdot \bar{M}_{n-1,q}(a, b) + \dots + \\ & \quad + \alpha_{1,p} \cdot h^2 \cdot \bar{M}_{2,q}(a, b) < 1. \end{aligned}$$

Dans ces inégalités on a écrit $h = b - a$.

Démonstration. Supposons par l'absurde, que sous les hypothèses du théorème, l'ensemble Y ne jouit pas de la propriété $J_n[a, b]$. Ceci signifie qu'il existe une solution non identiquement nulle, y_0 , de l'équation (1.1), et n nombres $\xi_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_{n-1}$ (ou $\xi_0 \geq \xi_1 \geq \dots \geq \xi_{n-1}$) dans $[a, b]$ tels que les conditions (1.3) soient vérifiées avec $\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-1} = 0$, c'est-à-dire

$$(3.4) \quad y_0(\xi_0) = y'_0(\xi_1) = \dots = y_0^{(n-1)}(\xi_{n-1}) = 0.$$

En vertu du résultat établi au § 2 du présent travail, on a pour cette solution la délimitation

$$(3.5) \quad \left(\int_a^b |y_0(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha_{n-1,p} \cdot (b-a)^{n-1+\frac{1}{p}} \cdot \max_{x \in [a, b]} |y_0^{(n-1)}(x)|.$$

Cette inégalité s'obtient de l'inégalité (2.3), en remplaçant le nombre n par $n-1$, ce qui revient à ne considérer que les premières $n-1$ conditions d'annulation (3.4) à la place des n conditions, c'est-à-dire, les conditions

$$(3.6) \quad y_0(\xi_0) = y'_0(\xi_1) = \dots = y_0^{(n-2)}(\xi_{n-2}) = 0, \\ (a \leq \xi_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_{n-2} < b, \text{ ou } b \geq \xi_0 \geq \xi_1 \geq \dots \geq \xi_{n-2} \geq a).$$

En tenant compte que la fonction $z(x) = y'_0(x)$ vérifie des conditions de la même forme que (3.6), notamment

$$z(\xi_1) = z'(\xi_2) = \dots = z^{(n-3)}(\xi_{n-2}) = 0$$

$$(a \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{n-2} \leq b \text{ ou } b \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_{n-2} \geq a),$$

on peut écrire l'inégalité

$$(3.7) \quad \left(\int_a^b |y'_0(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha_{n-2,p} \cdot (b-a)^{n-2+\frac{1}{p}} \cdot \max_{x \in [a, b]} |y_0^{(n-1)}(x)|,$$

qui s'obtient de (2.3), en remplaçant f par z , et n par $n-2$.

De la même manière on obtient successivement, pour les dérivées de y_0 , les délimitations :

$$(3.8) \quad \left(\int_a^b |y_0^{(k)}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha_{n-k-1,p} \cdot (b-a)^{n-k-1+\frac{1}{p}} \cdot \max_{x \in [a, b]} |y_0^{(n-1)}(x)| \\ (k = 0, 1, \dots, n-2),$$

où les coefficients $\alpha_{n-k-1,p}$ ($k = 0, \dots, n-2$) sont donnés par les formules (2.30), resp. (2.32), c'est-à-dire par les formules (3.2).

Soit η un point de l'intervalle $[a, b]$ où la fonction $|y_0^{(n-1)}(x)|$ atteint son maximum μ dans l'intervalle $[a, b]$. En tenant compte que y_0 est une solution de l'équation (1.1), on peut écrire l'identité

$$(3.9) \quad \left(y_0^{(n-1)}(x) \cdot \exp \int_{\eta}^x a_1(s) ds \right)' = - \sum_{i=2}^n a_i(x) \cdot \left(\exp \int_{\eta}^x a_1(s) ds \right) \cdot y_0^{(n-i)}(x).$$

Nous intégrons les deux membres de cette identité par rapport à x , entre les limites $x = \eta$ et $x = \xi_{n-1}$, et prenons leurs valeurs absolues. Il est utile de distinguer deux cas, selon que $\eta < \xi_{n-1}$, ou que $\eta > \xi_{n-1}$.

Dans le cas $\eta < \xi_{n-1}$, on peut écrire :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \mu &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\eta}^{\xi_{n-1}} |a_i(x)| \cdot \left(\exp \int_{\eta}^x |a_1(s)| ds \right) \cdot |y_0^{(n-i)}(x)| dx \leq \\ &\leq \sum_{i=2}^n \int_{\eta}^{\xi_{n-1}} |a_i(x)| \cdot \left(\exp \int_a^x |a_1(s)| ds \right) \cdot |y_0^{(n-i)}(x)| dx \leq \\ &\leq \sum_{i=2}^n \int_a^b |a_i(x)| \cdot \left(\exp \int_a^x |a_1(s)| ds \right) \cdot |y_0^{(n-i)}(x)| dx. \end{aligned}$$

En appliquant à l'intégrale qui figure dans le dernier terme, l'inégalité de Hölder, on obtient l'inégalité

$$\mu \leq \sum_{i=2}^n \left(\int_a^b |y_0^{(n-i)}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |a_i(x)|^q \cdot \exp \left[q \int_a^x |a_1(s)| ds \right] dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Tenant compte des inégalités (3.8), et du fait que $\mu > 0$ (au cas contraire, y_0 serait un polynôme du degré $n-2$, qui vérifie les conditions (3.4), donc il serait identiquement nul), on obtient l'inégalité

$$1 \leq \alpha_{1,p} \cdot h^2 \cdot M_{2,q}(a, b) + \dots + \alpha_{n-1,p} \cdot h^n \cdot M_{n,q}(a, b),$$

qui contredit la première inégalité de (3.3).

Considérons maintenant le cas où les nombres η et ξ_{n-1} qui interviennent en (3.9), satisfont à l'inégalité $\eta > \xi_{n-1}$. Dans ce cas, au lieu des inégalités (3.10) il faut considérer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mu &\leq \sum_{i=2}^n \int_{\xi_{n-1}}^{\eta} |a_i(x)| \cdot \left(\exp \int_x^{\eta} |a_1(s)| ds \right) \cdot |y_0^{(n-i)}(x)| dx \leq \\ &\leq \sum_{i=2}^n \int_{\xi_{n-1}}^{\eta} |a_i(x)| \cdot \left(\exp \int_x^b |a_1(s)| ds \right) \cdot |y_0^{(n-i)}(x)| dx \leq \\ &\leq \sum_{i=2}^n \int_a^b |a_i(x)| \cdot \left(\exp \int_x^b |a_1(s)| ds \right) \cdot |y_0^{(n-i)}(x)| dx. \end{aligned}$$

En procédant d'une manière analogue à celle employée au cas précédent, on obtient finalement une inégalité, qui contredit la deuxième inégalité de (3.3). Le théorème est ainsi démontré.

4. Dans ce § nous nous proposons de démontrer le

THÉORÈME 2. Pour que l'ensemble Y des solutions de l'équation (1.1) jouisse de la propriété $I_n^*[a, b]$ il suffit que le système suivant d'inégalités ait lieu :

$$(4.1) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2^n} \cdot \alpha_{n-1,p} \cdot h^n \cdot M_{n,q} \left(a, a + \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \alpha_{n-2,p} \cdot h^{n-1} \cdot M_{n-1,q} \left(a, a + \frac{h}{2} \right) + \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2^2} \cdot \alpha_{1,p} \cdot h^2 \cdot M_{2,q} \left(a, a + \frac{h}{2} \right) < 1, \\ &\frac{1}{2^n} \cdot \alpha_{n-1,p} \cdot h^n \cdot \bar{M}_{n,q} \left(a, a + \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \alpha_{n-2,p} \cdot h^{n-1} \cdot \bar{M}_{n-1,q} \left(a, a + \frac{h}{2} \right) + \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2^2} \cdot \alpha_{1,p} \cdot h^2 \cdot \bar{M}_{2,q} \left(a, a + \frac{h}{2} \right) < 1, \\ &\frac{1}{2^n} \cdot \alpha_{n-1,p} \cdot h^n \cdot M_{n,q} \left(a + \frac{h}{2}, b \right) + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \alpha_{n-2,p} \cdot h^{n-1} \cdot M_{n-1,q} \left(a + \frac{h}{2}, b \right) + \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2^2} \cdot \alpha_{1,p} \cdot h^2 \cdot M_{2,q} \left(a + \frac{h}{2}, b \right) < 1, \\ &\frac{1}{2^n} \cdot \alpha_{n-1,p} \cdot h^n \cdot \bar{M}_{n,q} \left(a + \frac{h}{2}, b \right) + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \alpha_{n-2,p} \cdot h^{n-1} \cdot \bar{M}_{n-1,q} \left(a + \frac{h}{2}, b \right) + \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2^2} \cdot \alpha_{1,p} \cdot h^2 \cdot \bar{M}_{2,q} \left(a + \frac{h}{2}, b \right) < 1, \end{aligned}$$

Dans ces inégalités, nous avons utilisé les notations suivantes :

$$(4.2) \quad \begin{aligned} M_{k,q} \left(a, a + \frac{h}{2} \right) &= \left(\frac{2}{h} \int_a^{a+\frac{h}{2}} |a_k(x)|^q \cdot \exp \left[q \int_a^x |a_1(s)| ds \right] \cdot dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ \bar{M}_{k,q} \left(a, a + \frac{h}{2} \right) &= \left(\frac{2}{h} \int_a^{a+\frac{h}{2}} |a_k(x)|^q \cdot \exp \left[q \int_x^{a+\frac{h}{2}} |a_1(s)| ds \right] \cdot dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ M_{k,q} \left(a + \frac{h}{2}, b \right) &= \left(\frac{2}{h} \int_{a+\frac{h}{2}}^b |a_k(x)|^q \cdot \exp \left[q \int_{a+\frac{h}{2}}^x |a_1(s)| ds \right] \cdot dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ \bar{M}_{k,q} \left(a + \frac{h}{2}, b \right) &= \left(\frac{2}{h} \int_{a+\frac{h}{2}}^b |a_k(x)|^q \cdot \exp \left[q \int_x^b |a_1(s)| ds \right] \cdot dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad (h = b - a, k = 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous remarquerons que les deux premières inégalités de (4.1), s'obtiennent respectivement des inégalités (3.3), en remplaçant dans ces inégalités, partout, b par $a + \frac{h}{2}$ et h par $\frac{h}{2}$. C'est-à-dire que les deux premières inégalités (4.1) représentent des inégalités de la forme (3.3), écrites relativement à l'intervalle $[a, a + \frac{h}{2}]$. En vertu du théorème 1, il résulte que l'ensemble Y jouit de la propriété $J_n[a, a + \frac{h}{2}]$.

D'une manière analogue on démontre que, en vertu des deux dernières inégalités (4.1), il résulte que Y jouit aussi de la propriété $J_n[a + \frac{h}{2}, b]$.

Mais, il est facile de voir que les propriétés $J_n[a, a + \frac{h}{2}]$, $J_n[a + \frac{h}{2}, b]$ de l'ensemble Y , admises à la fois, impliquent la propriété $I_n^*[a, b]$ du même ensemble Y . En effet, en supposant par l'absurde que Y ne jouit pas de la propriété $I_n^*[a, b]$, il résulte l'existence d'une solution $y(x)$ non-identiquement nulle, de l'équation (1.1), qui satisfait à des conditions de la forme (1.2), dans lesquelles, $y_k^{(0)} = y_k^{(1)} = \dots = y_k^{(p_k-1)} = 0$ ($k = 1, \dots, m$), c'est-à-dire, que $y(x)$ s'annule n fois, au moins, dans l'intervalle $[a, b]$. En vertu du théorème de Rolle, il résulte l'existence d'une suite monotone de nombres

$$(4.3) \quad a \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} = \beta_{n-1} \leq \beta_{n-2} \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0 \leq b,$$

tels que

$$(4.4) \quad \begin{cases} y(\alpha_0) = y'(\alpha_1) = \dots = y^{(n-1)}(\alpha_{n-1}) = 0, \\ y(\beta_0) = y'(\beta_1) = \dots = y^{(n-1)}(\beta_{n-1}) = 0. \end{cases}$$

Il faut distinguer par la suite les deux cas suivants :

Cas 1. $\alpha_{n-1} \in [a, a + \frac{h}{2}]$. Dans ce cas, les relations (4.3) et (4.4) nous montrent que l'ensemble Y ne jouit pas de la propriété $J_n[a, a + \frac{h}{2}]$, ce qui constitue une contradiction.

Cas. 2. $\beta_{n-1} \in [a + \frac{h}{2}, b]$. Dans ce cas, les relations (4.3) et (4.4) nous montrent que l'ensemble Y ne jouit pas de la propriété $J_n[a + \frac{h}{2}, b]$, ce qui constitue une contradiction.

Ainsi, le théorème 2 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aramă, O., Sur un problème d'interpolation relatif aux solutions des équations différentielles linéaires du quatrième ordre. *Mathematica (Cluj)*, **10** (33), 1, 5—15 (1968).
- [2] Aramă, O., Asupra unor evaluări ale funcțiilor derivabile, cu aplicații la studiul problemei polilocale (II). *Studii și cercetări matem.* (Acad. R.S. România), **17**, 1263—1276 (1965).
- [3] Aramă, O., D. Răpianu, Sur l'équation de De la Vallée-Poussin relative au problème polylocal de la théorie des équations différentielles. Colloque sur la théorie de l'approximation des fonctions, Cluj, 15—20 septembre 1967.
- [4] Бернштейн, С. Н., О некоторых свойствах циклически монотонных функций. *Известия Акад. Наук СССР, серия матем.*, **14**, 381—404 (1950).
- [5] Бездомников, В. С., Ю. В. Комленко, К вопросу об оценке промежутка применимости теоремы Чаплыгина. *Дифференциальные уравнения*, **11**, 9, 1170—1175 (1966).
- [5 a] Fink, A. M. and D. F. St. Mary, On an inequality of Nehari, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21**, 3 (1969).
- [6] Hukuhara, M., Une propriété de l'application $f[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}]$. *Funkcialaj Ekvacioj*, **5**, 135—144 (1963).
- [7] Karlin, S., *Mathematical methods and theory in games, programming and economics*. Pergamon Press, London-Paris, 1959.
- [8] Krein, M. G., D. P. Milman, On extreme points of regular convex sets. *Studia math.*, **9**, 133—138 (1940).
- [9] Левин, А. Ю. Оценка для функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных. *Математический Сборник*, **64** (106), 3, 396—409 (1964).
- [10] Martelli, M., Sul criterio di unicità di De la Vallée Poussin. *Atti della Accad. Naz. dei Lincei, Rendiconti, classe fis. mat. nat.* **XLV**, 1—2, 7—12 (1968).
- [11] Nehari, Z., On an inequality of Lyapunov, in volume *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics*. Stanford Univ. Press, Stanford, California, pp. 256—261 (1962).
- [12] Vallée-Poussin, Ch. De la, Sur l'équation différentielle du second ordre. *J. Mat. Pures et Appl.*, **8**(9), 125—144 (1929).
- [13] Зайцева, Г. С., О многоточечной краевой задаче. *Доклады Акад. наук СССР*, **176**, 4, 763—765 (1967).

Institut de Calcul de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Reçu le 15. VII. 1969.