MATHEMATICA VOL. 12 (35), 2, 1970, pp. 217—222

# SUR LA CONDITION DE GOURSAT DE SÉPARATION DES VARIABLES AUX ÉQUATIONS À QUATRE VARIABLES.

par

L. BAL et M. MIHOC

à Cluj

Dans un travail de E. GOURSAT [3] on donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation à quatre variables de la forme:

$$F(x, y, z, u) = 0 \tag{1}$$

puisse être mise sous la forme:

$$f(x, y) = g(z, u), \tag{2}$$

ou sous une forme équivalente à celle-ci:

$$u = \Phi[\varphi(x, y), z]. \tag{2'}$$

Cette condition écrite pour l'équation (1) est:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial z}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial u} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Dans certains cas particuliers cette condition peut s'obtenir en imposant des conditions de nature nomographique qui ont trait à la représentation de l'équation (1).

Considérons l'équation à quatre variables, linéaire par rapport à chaque variable:

$$\begin{aligned} A_0xyz + A_1xyu + A_2xzu + A_3yzu + B_0xy + B_1xz + B_2xu + \\ + B_3yz + B_4yu + B_5zu + C_0x + C_1y + C_2z + C_3u + D_0 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Pour que l'équation (4) puisse se représenter par un nomogramme composé de deux nomogrammes à points alignés à échelles rectilignes régulières de la forme : 2

(5)
$$\begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & x + a & 1 \\ by + c & dy + e & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ fz + g & z + h & 1 \\ iu + j & lu + m & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

où l'échelle $w$ est l'échelle commune, et $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m, \rho, \varepsilon$, sont les paramètres des échelles du nomogramme, il faut que ces coefficients remplissent les conditions :

(6)
$$\frac{A_1}{A_0} \cdot \frac{A_2B_4 - A_3B_2}{A_2B_3 - A_3B_1} = \frac{A_2C_3 - B_2B_5}{A_2C_2 - B_1B_5}$$

$$\frac{B_0}{A_0} \cdot \frac{A_2C_1 - A_3C_0}{A_2B_3 - A_3B_1} = \frac{A_2D_0 - B_5C_0}{A_2C_2 - B_1B_6}.$$

Ces conditions résultent de la compatibilité d'un certain système d'équations nonlinéaires dans lequel interviennent comme inconnues les paramètres des échelles du nomogramme [4].

L'équation (4), étant linéaire par rapport à la variable $u$, elle peut s'écrire explicitement par rapport à cette variable :

(4′)
$$u = -\frac{A_0xyz + B_0xy + B_1xz + B_3yz + C_0x + C_1y + C_2z + D_0}{A_1xy + A_2xz + A_3yz + B_2x + B_4y + B_5z + C_3}.$$

Si on écrit la condition (3) pour l'équation (2′) à cause du fait que le second membre s'annule, elle devient :

(7)
$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}}{\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}}.$$



3 D'autre part, on voit que le deuxième membre de l'équation (4′) est une fonction rationnelle des variables $x, y, z$ :

(8)
$$u = \frac{R(x, y, z)}{S(x, y, z)}.$$

Par suite, les dérivées partielles par rapport à $x$ et $y$ sont :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P_1(y, z)}{P(x, y, z)}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{Q_1(x, z)}{P(x, y, z)};$$

où $P(x, y, z) = S^2(x, y, z)$.

Les dérivées mixtes du deuxième ordre par rapport à $x, z$ respectivement à $y, z$ sont d'après les notations ci-dessus :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\dfrac{\partial P_1}{\partial z} P - \dfrac{\partial P}{\partial z} P_1}{P^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\dfrac{\partial Q_1}{\partial z} P - \dfrac{\partial P}{\partial z} Q_1}{P^2}.$$

Avec ces notations la condition (7) devient :

$$\frac{P(x, y, z)\dfrac{\partial P_1(y, z)}{\partial z} - P_1(y, z)\dfrac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}}{P(x, y, z)\dfrac{\partial Q_1(x, z)}{\partial z} - Q_1(x, z)\dfrac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}} = \frac{P_1(y, z)}{Q_1(x, z)},$$

ou après simplifications possibles :

(9)
$$\frac{\dfrac{\partial P_1(y, z)}{\partial z}}{\dfrac{\partial Q_1(x, z)}{\partial z}} = \frac{P_1(y, z)}{Q_1(x, z)}.$$

À cause de la condition nomographique particulière imposée, selon laquelle l'équation (4) doit être représentable par un nomogramme composé de deux nomogrammes à points alignés (et que par conséquent elle doit s'écrire sous la forme (2′)), le quotient $\dfrac{\partial u}{\partial x} \Big/ \dfrac{\partial u}{\partial y}$ est une fonction des seules variables $x$ et $y$ ; par suite le quotient $\dfrac{P_1(y, z)}{Q_1(x, z)}$ sera lui aussi une fonction de ces seules variables. En tenant compte de (9), il résulte que le quotient des dérivées des termes de cette fraction par rapport à la variable $z$ sera une fonction de ces deux variables : 4

$$\frac{\dfrac{\partial P_1(y,z)}{\partial z}}{\dfrac{\partial Q_1(x,z)}{\partial z}} = F_1(x,y).$$

Donc, nous avons :

$$(10) \qquad \frac{\dfrac{\partial P_1}{\partial z}}{\dfrac{\partial Q_1}{\partial z}} = \frac{2[A_0A_3y^2 + (A_0B_5 - A_2B_3 + A_3B_1)\,y + (B_1B_5 - A_2C_2)]\,z +}{2[A_0A_2x^2 + (A_0B_5 + A_2B_3 - A_3B_1)x + (B_3B_5 - A_3C_2)]\,z +}$$

$$\frac{+\,[(A_0B_4 - A_1B_3 + A_3B_0)\,y^2 + (A_0C_3 - A_1C_2 - A_2C_1 + A_3C_0 + B_0B_5 + B_1B_4 - B_2B_3)\,y +}{+\,[(A_0B_2 - A_1B_1 + A_2B_0)\,x^2 + (A_0C_3 - A_1C_2 + A_2C_1 - A_3C_0 + B_0B_5 - B_1B_4 + B_2B_3)\,x +}$$

$$\frac{+\,(B_1C_3 - B_2C_2 + B_5C_0 - A_2D_0)]}{+\,(B_3C_3 - B_4C_2 + B_5C_1 - A_3D_0)]}.$$

Pour que ce quotient soit une fonction de $x$ et $y$ il faut que ces termes soient indépendents de la variable $z$, par conséquent que les coefficients de cette variable soient proportionnels :

$$\frac{A_0A_3}{A_0B_4 - A_1B_3 + A_3B_0} = \frac{A_0B_5 - A_2B_3 + A_3B_1}{A_0C_3 - A_1C_2 - A_2C_1 - A_3C_0 + B_0B_5 + B_1B_4 - B_2B_3} =$$

$$(11) \qquad = \frac{B_1B_5 - A_2C_2}{B_1C_3 - B_2C_2 + B_5C_0 - A_2D_0} = \frac{A_0A_2}{A_0B_2 - A_1B_1 + A_2B_0} =$$

$$= \frac{A_0B_5 + A_2B_3 - A_3B_1}{A_0C_3 - A_1C_2 + A_2C_1 - A_3C_0 + B_0B_5 - B_1B_4 + B_2B_3} =$$

$$= \frac{B_3B_5 - A_3C_2}{B_3C_3 - B_4C_2 + B_5C_1 - A_3D_0}.$$



5 Ces cinq égalités sont équivalentes aux égalités :

$$(12) \qquad \begin{aligned} \frac{A_1}{A_0} &= \frac{A_2B_4 - A_3B_2}{A_2B_3 - A_3B_1} = \frac{A_2C_3 - B_2B_5}{A_2C_2 - B_1B_5} \\ \frac{B_0}{A_0} &= \frac{A_2C_1 - A_3C_0}{A_2B_3 - A_3B_1} = \frac{A_2D_0 - B_5C_0}{A_2C_2 - B_1B_5}. \end{aligned}$$

On remarque cependant que ces égalités, qui sont les conditions de Goursat pour l'équation (4) coïncident avec les égalités (6), qui sont des conditions imposées aux coefficients d'une équation linéaire à quatre variables, pour qu'elle puisse être représentée par un nomogramme composé à points alignés.

Des conditions analogues à celle de (6) s'obtiennent si l'on requiert qu'une équation à quatre variables, linéaire et de la forme :

$$(13) \qquad \begin{gathered} A_0xyzu + A_1xyz + A_2xyu + A_3xzu + A_4yzu + \\ + B_0xy + B_1xz + B_2xu + B_3yz + B_4yu + B_5zu + \\ + C_0x + C_1y + C_2z + C_3u + D_0 = 0, \end{gathered}$$

puisse se représenter par un nomogramme composé de deux nomogrammes à points alignés, à échelles rectilignes régulières et projectives, ou seulement projectives, et à une échelle commune.

Ces conditions sont :

$$(14) \qquad \begin{aligned} A_0(B_1C_3 - B_2C_2) - A_1(A_3C_3 - B_2B_5) + A_2(A_3C_2 - B_1B_5) &= 0 \\ A_0(B_1B_4 - B_2B_3) - A_1(A_3B_4 - A_4B_2) + A_2(A_3B_3 - A_4B_1) &= 0 \\ A_0(B_1D_0 - C_0C_2) - A_1(A_3D_0 - B_5C_0) + B_0(A_3C_2 - B_1B_5) &= 0 \\ A_0(B_1C_1 - B_3C_0) - A_1(A_3C_1 - A_4C_0) + B_0(A_3B_3 - A_4B_1) &= 0. \end{aligned}$$

Les égalités (14) coïncident avec les égalités qui résultent de l'application de la condition de Goursat à l'équation (13).

Institut de calcul
de l'Académie de la République Socialiste Roumanie
Cluj.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bal L., Rusu I., *Asupra unei grupări de variabile în vederea construirii nomogramelor compuse*. Studii şi cercetări ştiinţifice, V, *3–4*, 45–49 (1954).
[2] Глаголев Н. А., *Курс номографии*, Изд. 2-е, М. Гос. изд-во. ,,Высщая школа'', Москва, (1961).
[3] Goursat E., Bull. de la Soc. Math. de France, **27**, 27 (1899).
[4] Mihoc M., *Asupra reprezentării ecuaţiilor cu patru variabile prin nomograme compuse cu puncte aliniate*. Studii şi cercetări matematice **21**, *9*, 1393–1401 (1969).

Reçu 6. II. 1970.

MATHEMATICA VOL. 12 (35), 2, 1970, pp. 223–226

# NOEUDS ET CERCLES TOPOLOGIQUES SUR LES SURFACES FERMÉES ORIENTABLES

par

G. CĂLUGĂREANU

à Cluj

Dans ce travail, nous reprenons des résultats de [1], en énonçant explicitement certaines conséquences de ces résultats, lesquelles, dans [1], sont passées inaperçues ou insuffisamment éclaircies. Nous renvoyons le lecteur à [1] pour le détail de certaines constructions géométriques et pour les figures à leur appui.

Soit $N$ un noeud de type fini dans $R^3$ (noeud que l'on peut concevoir comme un polygone à un nombre fini de cotés, sans points multiples). En employant une projection de $N$ sur un plan, nous avons indiqué une construction ([1], 393–394) qui permet de présenter $N$ comme le bord d'un *doublet* ([1], 396). Un tel doublet, dans la terminologie de [1], consiste en deux disques dont les frontières ont un arc en commun (*bc* sur la fig. 6 de [1]), et qui se coupent suivant un nombre fini d'arcs, ces arcs ne rencontrant pas l'arc commun aux deux frontières. Pour le noeud $N$, l'arc commun aux frontières est donc une transversale $KT$ de $N$ qui décompose $N$ en deux cercles[1]). Par une modification de la surface-doublet aux voisinages des arcs d'intersection des deux disques, nous avons obtenu une surface orientable sans singularités ([1], 397) dont le bord coïncide avec le noeud $N$. Ceci constitue donc une démonstration de l'existence des surfaces de Seifert pour un noeud quelconque.

De plus, par les modifications qui, à partir de la surface-doublet, conduisent à la surface orientable, sans singularités, ayant le bord $N$, la transversale $KT$ n'aura subi aucun changement ; elle subsiste donc sur la surface finale sans singularités. Donc :

---

[1]) Transversale $KT$ = transversale de Kinoshita-Terasaka.