

SUR LE PROLONGEMENT D'UNE MESURE

par

PETRU PETRIȘOR

à Cluj

1. Introduction. Dans cette note on recherche les différentes propriétés des opérateurs τ_e et τ'_e , des propriétés qui découlent d'un théorème de prolongement de la partie absolument continue par rapport au σ -anneau $\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ de la mesure extérieure attachée à la variation d'une mesure $\mu: \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ positive et finie définie sur le σ -anneau $\mathfrak{B}$ de parties d'un ensemble X .

Pour obtenir les propriétés mentionnées on démontre d'abord que la mesure $\beta_{\mu*} \ll \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ est une mesure Radon dans le sens étudié par JEAN-PIERRE HENRY [1] et puis en employant une relation d'ordre définie sur la famille $(\mathfrak{L}, \mu)$ où $\mathfrak{L}$ est un σ -anneau sur lequel est définie la mesure Radon μ et un résultat de [1] on obtient le prolongement de la mesure $\beta_{\mu*}|\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ au σ -anneau $\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$. En employant la définition de l'opérateur τ_e et en tenant compte du fait que $\beta_{\mu*} \ll \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ ($\beta_{\mu*}$ est absolument continue par rapport au σ -anneau $\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$) on démontre que ce prolongement est une mesure complète.

2. Définitions et notations. Soit X une ensemble arbitraire et $\mathfrak{X}(X)$ la famille de ses parties. On note avec $\mathfrak{X}^2(X)$ la classe des parties de la famille $\mathfrak{X}(X)$. On définit sur la classe $\mathfrak{X}^2(X)$ les opérateurs τ_e et τ ayant des valeurs dans la même classe par :

$$\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \{Y: Y \subset X, \exists_{A \in \mathcal{A}, A \neq \emptyset} Y \cap A \in \mathfrak{B}\}$$

$$\tau(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \{Y: Y \subset X, \forall_{A \in \mathcal{A}} Y \cap A \in \mathfrak{B}\}$$

pour toute famille $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{B}$ de parties de l'ensemble X . Si $\mathcal{A} = \mathfrak{B}$ alors on notera $\tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ avec $\tau_e(\mathcal{A})$ et $\tau(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ avec $\tau(\mathcal{A})$.

On définit également l'opérateur τ'_e par :

$$\tau'_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \{Y : Y \subset X, \exists_{A \in \mathcal{A}, A \neq \emptyset} \theta \neq Y \cap A \in \mathfrak{B}\}.$$

Définition 1. Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de l'ensemble X . Par la fermeture borélienne de la famille $\mathcal{A}$ on entend la famille :

$$\bar{\mathcal{A}} = \left\{ Y : Y \subset X, \exists_{(A_n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{A}} Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

Définition 2. Par l'opérateur $\bar{\tau}_e$ on entend l'opérateur défini par l'égalité :

$$\bar{\tau}(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \overline{\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})}$$

pour toutes les familles $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{B}$ de parties de l'ensemble X .

Définition 3. Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de l'ensemble X . Par application canonique attachée à la famille $\mathcal{A}$ on entend l'application $T_{\mathcal{A}} : \mathfrak{A}(X) \rightarrow \mathfrak{A}(X)$ définie par :

$$T_{\mathcal{A}}(B) = \bigcap \{A : A \in \mathcal{A}, A \supset B\}$$

pour tout sous-ensemble $B \subset X$.

Définition 4. Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de l'ensemble X et $A \in \mathcal{A}$ et $\Omega_A = \{Y : Y \subset X, Y \cap A \neq \emptyset\}$. La famille $\mathfrak{B}_c = \{\Omega_A : A \in \mathcal{A}\}$ est nommée famille totale engendrée par la famille $\mathcal{A}$.

3. Propriétés des opérateurs τ_e , τ'_e , $\bar{\tau}_e$.

Proposition 1. Si $\mathcal{A}$ est une famille non-vide de parties de l'ensemble X , alors pour toute famille $\mathfrak{B}$ de parties de l'ensemble X qui contient $\emptyset$, la famille $\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ contient l'ensemble vide.

Démonstration. Puisque $\mathcal{A} \neq \emptyset$ il en résulte qu'il existe l'ensemble $A \in \mathcal{A}$ non-vide. De $A \cap \emptyset = \emptyset \in \mathfrak{B}$ il résulte de la définition de l'opérateur τ_e que $\emptyset \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$.

Proposition 2. Si les familles $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{B}$ de parties de l'ensemble X sont des σ -anneaux, alors la famille $\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ est un σ -anneau.

Démonstration. Soit $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ une famille dénombrable d'ensembles

$Y_n \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$. De la définition de l'opérateur τ_e il résulte qu'il existe l'ensemble $A_m \in \mathcal{A}$ tel que $Y_n \cap A_m \in \mathfrak{B}$. De la relation :

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} (A_m \cap Y_n)$$

et du fait que $\mathfrak{B}$ est un σ -anneau on déduit :

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \right) \in \mathfrak{B}.$$

La famille $\mathcal{A}$ étant un σ -anneau et A_m appartenant à cette famille il résulte que : $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}$ et de la définition de l'opérateur τ_e on obtient :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$$

et donc $\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ est un σ -anneau.

Proposition 3. Si $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et $\mathfrak{B}$ sont des familles de parties de l'ensemble X et $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}$ alors $\mathcal{A} \subset \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{A}$. De $A \cap A = A \in \mathcal{A} \subset \mathfrak{B}$ il résulte $A \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$.

Proposition 4. Si $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et $\mathfrak{B}$ sont des familles de parties de l'ensemble X telles que $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}$ alors $X \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$.

Démonstration. La famille $\mathcal{A}$ étant non-vide il existe l'ensemble $A \neq \emptyset$, $A \in \mathcal{A}$. De $A \cap X = A \in \mathcal{A} \subset \mathfrak{B}$ il résulte $X \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$.

Proposition 5. Si $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et $\mathfrak{B}$ sont des familles de parties de l'ensemble X telles que pour deux ensembles arbitraires A et $B \in \mathcal{A}$ on ait $A \cap B \in \mathfrak{B}$, alors $\mathcal{A} \subset \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{A}$. Par hypothèse $A = A \cap A \in \mathfrak{B}$ et de la définition de l'opérateur τ_e on obtient que $A \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$.

Proposition 6. Pour toutes les familles $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ de parties de l'ensemble X on a $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B} \neq \emptyset$ si et seulement si $X \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$.

Démonstration. Si $X \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$, alors il existe l'ensemble $A \in \mathcal{A}$, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ tel que $A \cap X \in \mathfrak{B}$ et donc $A \in \mathfrak{B}$ c'est-à-dire $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B} \neq \emptyset$. Si $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B} \neq \emptyset$ et $A \in \mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ alors $X \cap A = A \in \mathfrak{B}$ et de $A \in \mathcal{A}$ il résulte $X \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$.

THÉORÈME 1. Si $\mathcal{A}, \mathfrak{B}, J$ sont des σ -anneaux de parties de l'ensemble X , $\mathfrak{B} \subset J' \subset \mathfrak{B}$ et $J \subset \mathfrak{A}(X)$ est une famille quelconque alors :

$$\tau_e(\bar{\mathcal{A}}, \mathfrak{B}) \subseteq \tau_e[\tau_e(J', J), J', J].$$

Démonstration. Soit $Y \in \tau_e(\bar{\mathcal{A}}, \mathfrak{B})$. De la définition de l'opérateur τ_e il résulte qu'il existe l'ensemble $A \in \bar{\mathcal{A}}$, $A \neq \emptyset$ tel que $Y \cap A \in \mathfrak{B}$ et de la définition de la famille $\bar{\mathcal{A}}$ on en déduit l'existence d'une famille dénombrable $(A_n : n \in \mathbb{N})$ d'ensembles $A_n \in \bar{\mathcal{A}}$ telle que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Donc $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$. De $A_n \in \bar{\mathcal{A}}$ on déduit l'existence de l'ensemble $Y_n \in \tau_e(\bar{\mathcal{A}}, \mathfrak{B})$ tel que $A_n \cap Y_n \in \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}$ étant un σ -anneau il résulte que :

$$\bigcup_{n,m=1}^{\infty} (A_n \cap Y_m) \in \mathfrak{B}.$$

Donc $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m) \in \mathfrak{B}$. Mais $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ et $A_n \in \bar{\mathcal{A}}$ c'est-à-dire

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m) \in \bar{\mathcal{A}}.$$

Puisque $A \in \bar{\mathcal{A}}$ il en résulte que :

$$A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) \in \bar{\mathcal{A}}$$

et de là $A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) \in \bar{\mathcal{A}}$ ce qui montre qu'il existe l'ensemble $Z \in \tau_e(\bar{\mathcal{A}}, \mathfrak{B})$ tel que :

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) \cap A \cap Z \in \mathfrak{B}.$$

L'ensemble $Y \cap A$ appartient au σ -anneau $\mathfrak{B}$ et donc : $(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) \cap A \cap Z \cap Y \cap A \in \mathfrak{B}$ c'est-à-dire l'ensemble $(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) \cap A \cap Z \cap Y \in \mathfrak{B}$. Cette relation peut être écrite sous la forme :

$$(1) \quad Y \cap \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \cap A \cap Z \right] \in \mathfrak{B} \subset J'$$

tenant compte de l'hypothèse du théorème.

Puisque $(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) \cap A \cap Z \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ et $Y_n \in \tau_e(\bar{\mathcal{A}}, \mathfrak{B})$ il résulte que :

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) \cap A \cap Z \in \tau_e(\bar{\mathcal{A}}, \mathfrak{B}).$$

Soit $\mu : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une mesure positive et finie. La mesure extérieure μ^* est définie sur le σ -anneau $\mathfrak{B}$. On note avec β_{μ^*} la partie absolument continue pour la mesure μ^* par rapport au σ -anneau J' et l'on écrit : $\beta_{\mu^*} \ll J'$. De la définition de la mesure β_{μ^*} on a l'égalité :

$$\beta_{\mu^*} \left(Y \cap \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \cap A \cap Z \right] \right) = 0$$

et il en résulte qu'il existe l'ensemble $S \in J'$ tel que :

$$\mu^* \left[Y \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \cap A \cap Z \cap (\sim S) \right] = 0.$$

Il existe l'ensemble $F \in \mathfrak{B}$ tel que :

$$Y \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \cap A \cap Z \cap (\sim S) \subset F, \mu(F) = 0.$$

La mesure μ étant complète on en déduit :

$$Y \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \cap A \cap Z \cap (\sim S) \in \mathfrak{B}$$

et donc :

$$(Y - S) \cap \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \cap A \cap Z \right] \in \mathfrak{B} \subset J'.$$

De $S \in J'$ et $(Y - S) \cap S = \emptyset \in J$ il résulte que $Y - S \in \tau_e(J', J)$ et donc :

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \cap A \cap Z \in \tau_e(\tau_e(J', J), J').$$

De cette relation et de (1) on conclut :

$$Y \in \tau[\tau_e(\tau_e(J', J), J'), J']$$

c'est-à-dire :

$$\tau_e(\bar{\mathcal{A}}, \mathfrak{B}) \subseteq \tau_e[\tau_e(\tau_e(J', J), J'), J']$$

et le théorème est démontré.

THÉORÈME 2. Pour toutes les familles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de parties de l'ensemble X on a :

$$\bar{\tau}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subseteq \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Leftrightarrow \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \supseteq \mathfrak{E}(\sim \bigcup_{A \in \tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \sim A).$$

$$\text{Démonstration. } \bar{\tau}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Leftrightarrow \exists_{Y \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B})} Y \not\subset A \Leftrightarrow \exists_{Y \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$$

$$\bigcap_{A \in \tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \sim(\sim A) \not\subset Y \Leftrightarrow \exists_{Y \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \sim(\bigcup_{A \in \tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \sim A) \not\subset Y \Leftrightarrow Y \notin \mathfrak{E}(\sim [\bigcup_{A \in \tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \sim A]) \Leftrightarrow \mathfrak{E}(\sim [\bigcup_{A \in \tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \sim A]) \subset \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

THÉORÈME 3. Soit $\mathcal{B}$ un σ -anneau de parties de X , $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}_+$ une mesure positive et finie définie sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ un σ -anneau de parties de l'ensemble X tel que :

$$\mathfrak{E}(\sim [\bigcup_{A \in \tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \sim A]) \subset \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

alors il existe une mesure $m: \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{R}_+$ positive et finie qui prolonge la mesure $\bar{\mu}^* \ll \tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Démonstration. La mesure μ étant définie sur $\mathcal{B}$ il en résulte que $\bar{\mu}$ est définie sur $\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. La famille $\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est un σ -anneau contenu dans $\bar{\tau}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et $\bar{\mu}^*$ est définie sur le σ -anneau $\bar{\tau}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et donc la mesure $\bar{\mu}^*$ est définie sur le σ -anneau $\bar{\tau}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Soient A et B deux ensembles qui appartiennent au σ -anneau $\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. De la définition de la variation d'une mesure on peut écrire :

$$\bar{\mu}^*(A \cup B) + \bar{\mu}^*(A \cap B) \geq \bar{\mu}^*(A \cup B) \geq \bar{\mu}^*(A) + \bar{\mu}^*(B)$$

et à l'aide de la relation $\bar{\mu}^* \ll \tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ on trouve :

$$\bar{\mu}^*(A \cup B) + \bar{\mu}^*(A \cap B) = \bar{\mu}^*(A \cup B) \leq \bar{\mu}^*(A) + \bar{\mu}^*(B) = \bar{\mu}^*(A) + \bar{\mu}^*(B)$$

et donc :

$$(2) \quad \forall_{A, B \in \tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \bar{\mu}^*(A \cup B) + \bar{\mu}^*(A \cap B) = \bar{\mu}^*(A) + \bar{\mu}^*(B).$$

La relation (2) démontre que la mesure $\bar{\mu}^*: \bar{\tau}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{R}_+$ est une mesure Radon dans le sens de JEAN-PIERRE HENRY [1].

L'application canonique : $T_{\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})}: \mathfrak{E}(x) \rightarrow \mathfrak{E}(x)$ définie par :

$$T_{\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(P) = \bigcap \{B: B \in \tau(\mathcal{A}, \mathcal{B}), B \supset P\}$$

définit une topologie γ sur X telle que $\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est la famille des ensembles γ -fermés [2]. De la définition des opérateurs τ et τ_e on trouve : $\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset$

$\tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et de la définition de la mesure $\bar{\mu}^*$ il résulte que $\nu = \bar{\mu}^*|_{\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ est une mesure définie sur le σ -anneau $\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. La mesure ν étant définie sur un σ -anneau qui contient la famille des ensembles γ -fermés de [1] on déduit que ν peut être prolongée à une mesure ν_1 définie sur le σ -anneau $\mathfrak{E}$ qui contient le σ -anneau des ensembles boréliens $\mathcal{B}$. Mais $\mathcal{B}$ est le plus petit (par rapport à la relation $\subseteq$) σ -anneau qui contient la famille $\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et donc :

$$\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset \mathfrak{E} \subset \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

La mesure ν_1 est définie sur le σ -anneau $\mathfrak{E}$ qui contient la famille des ensembles γ -fermés et donc ν_1 peut être prolongée à une mesure ν_2 définie sur le σ -anneau $\mathfrak{E}_1$ qui contient le σ -anneau $\mathcal{B}$ des ensembles boréliens. Le plus petit σ -anneau qui contient la famille des ensembles fermés est $\mathcal{B}$ et donc $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}_1 \subset \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Ainsi on peut construire la famille $\{\mathfrak{E}_l: l \in \Gamma\}$ des σ -anneaux qui contiennent le σ -anneau $\mathcal{B}$ et une famille $\{\nu_l: l \in \Gamma\}$ de mesure telle que $\nu_{l+1}: \mathfrak{E}_{l+1} \rightarrow \mathbf{R}_+$ est une mesure définie sur $\mathfrak{E}_{l+1}$ qui prolonge ν_l . Sur la famille $\{(\mathfrak{E}_l, \nu_l): l \in \Gamma\}$ on définit la relation d'ordre :

$$(\mathfrak{E}_l, \nu_l) < (\mathfrak{E}_q, \nu_q) \Leftrightarrow \mathfrak{E}_l \subset \mathfrak{E}_q \text{ et } \nu_q|_{\mathfrak{E}_l} = \nu_l$$

En appliquant à la famille $\Omega = \{(\mathfrak{E}_l, \nu_l): l \in \Gamma, <\}$ le lemme de Zorn on trouve l'élément maximal $(\mathfrak{E}, m)$ de la famille considérée. Si $\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset \mathfrak{E} \subset \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, alors en employant un raisonnement analogue à celui ci-dessus on déduit l'existence de la paire $(\mathfrak{E}', \mu') \in \Omega$ telle que :

$$\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}' \subset \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

et $\mu'|_{\mathfrak{E}} = m$, c'est-à-dire $(\mathfrak{E}, m) < (\mathfrak{E}', \mu')$ ce qui contredit le fait que $(\mathfrak{E}, m)$ est un élément maximal de la famille Ω . Donc $\mathfrak{E} = \tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et m est une mesure définie sur $\tau_e(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ qui prolonge la mesure $\nu = \bar{\mu}^*|_{\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$.

THÉORÈME 4. Soit $\mathcal{A}$ un σ -anneau de parties de l'ensemble X et $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}_+$ une mesure positive et finie définie sur $\mathcal{A}$, alors on a :

$$\tau_e(\mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A})) = \mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A}).$$

Démonstration. De la définition de l'opérateur τ_e on trouve :

$$\tau(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A}) \subset \tau_e(\mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A})).$$

Soit $Y \in \tau_e(\mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A}))$ et donc on a :

$$Y \in \tau_e(\mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A})) = \tau_e(\tau(\mathcal{A})) \subseteq \tau_e(\tau_e(\mathcal{A})) = \tau_e^2(\mathcal{A}) = \tau_e(\mathcal{A})$$

et donc $\tau_e(\mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A})) \subseteq \tau_e(\mathcal{A})$. Des inclusions $\mathcal{A} \subset \tau_e(\mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A})) \subset \tau_e(\mathcal{A})$ et de la définition du σ -anneau des ensembles μ -mesurables on déduit

$$\mathfrak{M}_\mu(\tau_e(\mathcal{A})) \subseteq \mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A})$$

et de là que si $Z \in \tau_e(\mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A}))$ alors $Z \in \mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A})$ c'est-à-dire :

$$\tau_e(\mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A})) \subseteq \mathfrak{M}_\mu(\mathcal{A})$$

et le théorème est démontré.

THÉOREME 5. Pour toutes les familles $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{B}$ de parties de l'ensemble X on a :

$$\tau'_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})] = \tau'_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})].$$

Démonstration. La mesure μ étant définie sur le σ -anneau $\mathcal{A}$ il résulte que le prolongement m de la mesure $\beta_{\mu^*}|\tau(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ où $\beta_{\mu^*} \ll \tau(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$, est défini sur le σ -anneau $\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$. De la définition de la famille $\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ il résulte que pour tout $Y \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ il existe un ensemble B tel que $Y \subset B$, $m^*(B) = m^*(Y)$. Soit $Y \in \tau'_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})]$. De la définition de l'opérateur τ'_e il résulte l'existence de l'ensemble $\Omega \in \tau(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ tel que $\emptyset \neq Y \cap \Omega \in \mathfrak{B}$. De l'observation précédente on déduit l'existence de l'ensemble $B \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ tel que $B \supset Y$ et donc $Y \cap B \neq \emptyset$, ce qui montre que $Y \in \tau'_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})]$ c'est-à-dire qu'on a l'inclusion :

$$\tau'_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})] \subseteq \tau'_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})].$$

De l'inclusion $\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \subseteq \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ et de la définition de l'opérateur : on trouve :

$$\tau'_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})] \subseteq \tau'_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})]$$

et de là on déduit :

$$\tau'_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})] = \tau'_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})].$$

THÉOREME 6. Pour toute famille $\mathcal{A}$ de parties de l'ensemble X on a :

$$\tau_e^2(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c) = \tau_e^2(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c).$$

Démonstration. Soit $Y \in \tau_e^2(\mathcal{A})$. De la définition de l'opérateur τ_e on déduit l'existence de la famille dénombrable $(B_n : n \in \mathbb{N})$ d'ensembles $B_n \in \tau_e(\mathcal{A})$ et de la définition de l'opérateur τ_e il résulte qu'il existe l'ensemble $A_m \in \mathcal{A}$ tel que $B_n \cap A_m \in \mathcal{A}$. L'ensemble $\Omega = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} (B_n \cap A_m)$ appartient à la famille $\mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}$ est un σ -anneau. Mais $\mathcal{A}$ est une famille héréditaire et de $Y \cap \Omega \subset \Omega$ il résulte que $Y \cap \Omega \in \mathcal{A}$ et donc $Y \in \tau_e(\mathcal{A})$ c'est-à-dire on a :

$$(3) \quad \tau_e(\mathcal{A}) \subseteq \tau_e(\mathcal{A}).$$

De $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$ il résulte $\tau_e(\mathcal{A}) \subset \tau_e(\bar{\mathcal{A}})$ et donc $\tau_e(\mathcal{A}) \subseteq \tau_e(\bar{\mathcal{A}})$ et en employant la relation (3) on trouve :

$$\tau_e(\mathcal{A}) \subseteq \tau_e(\bar{\mathcal{A}})$$

c'est-à-dire :

$$(4) \quad \tau_e(\bar{\mathcal{A}}) = \tau_e(\mathcal{A}) \subseteq \tau_e(\bar{\mathcal{A}}).$$

De la manière dont on a choisi la famille $\mathfrak{B}^c$ et du théorème 5 on déduit :

$$\tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)] \subseteq \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)] \subseteq \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)].$$

Mais $\tau_e(\mathcal{A}) = \tau_e(\bar{\mathcal{A}})$ et en appliquant la relation (4) on trouve :

$$\tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)] \subseteq \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)].$$

On a donc la relation :

$$(5) \quad \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)] = \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)].$$

En employant les relations (3), (4), (5) on peut démontrer la relation de l'énoncé du théorème 6.

En appliquant la relation (4) on est conduit aux inclusions :

$$\tau_e^2(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c) = \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)] \subseteq \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)].$$

Puisque pour tout $Y \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ il existe un ensemble $B \in \tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ tel que $Y \subset B$, la dernière inclusion nous conduit aux inclusions :

$$\tau_e^2(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c) \subseteq \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)] \subseteq \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})] = \tau_e^2(\mathcal{A}, \mathfrak{B}).$$

On a également :

$$\begin{aligned} \tau_e^2(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c) &= \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)] \subseteq \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)] = \\ &= \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)] \subseteq \tau_e[\tau_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c)] = \tau_e^2(\mathcal{A}, \mathfrak{B}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\tau_e^2(\mathcal{A}, \mathfrak{B}^c) = \tau_e^2(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Jean-Pierre Henry, *Prolongement des mesures Radon*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 19, 1, 237-247 (1969).
- [2] Petru Petrișor, *Sur un certain type de topologie définie sur la famille $\mathfrak{Q}(X)$* (sous presse).

Reçu le 15. VI. 1970.