

On distingue les cas :

$$(1) \quad \mathcal{V}_\alpha \cap O_\alpha \in \tau(N'', N').$$

De $O_\alpha \in N''$ il résulte $\mathcal{V}_\alpha \cap O_\alpha \in \tau(N'', N' \cup N'')$. De $O_\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}_1}$ il résulte $O_\alpha \in N''$, donc :

$$(\mathcal{V}_\alpha \cap O_\alpha) \cap O_\alpha \in N'.$$

On a :

$$Q_\alpha = A \cup \{O_\alpha \cap [(\mathcal{V}_\alpha \cap O_\alpha) \cap O_\alpha]\}$$

donc $Q_\alpha \in \mathcal{V}_2([7])$

$$(2) \quad O_2 \cap \mathcal{V}_\alpha \in \tau(N'').$$

De $O_\alpha \in N''$ il résulte :

$$O_\alpha \cap (\mathcal{V}_\alpha \cap O_\alpha) \in N''.$$

La famille N'' étant σ -anneau il en résulte : $O_\alpha \cap (\mathcal{V}_\alpha \cap O_\alpha) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}_1}$.
Donc $O_\alpha \cap (\mathcal{V}_\alpha \cap O_\alpha) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}_1} \subset \mathcal{D}_{\mathcal{V}_2}$. De $Q_\alpha = A \cup [(O_\alpha \cap \mathcal{V}_\alpha) \cap O_\alpha]$ on déduit : $Q_\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}_2}$. Par conséquent $\mathcal{V}_1 < \tau < \mathcal{V}_2$.
La théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Gall S. A., *Point set topology*. Academic Press (1964).
- [2] Kelley J. L., *Decomposition and representation theorems in measure theory*. Math. Ann. 163, 89-94 (1966).
- [3] Kelley J. L., Namioka I. and co-authors. *Linear spaces* Van Nostrand (1963).
- [4] Kelley J. L., *General topology*. Van Nostrand (1955).
- [5] Ray K. C., *On extension of measures*. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R. 11 (59), 4, 79-82 (1967).
- [6] Vasiliu C., *Asupra teoremei de descompunere a lui Lebesgue*. Com. Acad. R.P.R., XIII 10, 863-870 (1963).
- [7] Dacič R., *On a enlargement of topologies*. Publications de L'institut Mathématique. Nouvelle série 7 (21) 47-50 (1967).

Reçu le 24. 1. 1970.

SUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES DOUÉS D'UNE MESURE

par

PETRU PETRIȘOR

à Cluj

Dans cette note on recherche quelques propriétés des espaces topologiques doués d'une mesure en étroit rapport avec la notion d'espace d'interpolation de type (i, j) introduite en [5].

Nous rappellerons que si μ est une mesure définie sur la σ -algèbre $\mathcal{A}$ de parties de l'ensemble X , alors une sous-base pour la topologie $\mathcal{T}_\mu$ est la famille des ensembles :

$$(A, B)_\mu = \{Q : A \overset{\mu}{<} Q \overset{\mu}{<} B\}$$

où $B \in \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A})$ (la famille des sous-ensembles $Y \subset X$ localement μ -mesurables) et $\overset{\mu}{<}$ est une relation d'ordre sur la famille $\mathcal{Q}(X)$ des sous-ensembles de X définie de la sorte : $A \overset{\mu}{<} B$ si et seulement s'il existe un σ -anneau $\mathcal{S}$ de sous-ensembles de X tel que $B - A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A})$ et B est μ -mesurable. En ce qui suit on va montrer que la topologie $\mathcal{T}_\mu$ vérifie l'axiome de séparation T_2 si la mesure μ vérifie certaines conditions. A cette occasion l'importance de la notion de mesure complète-Dedekind [1], ressortra mieux.

THÉORÈME 1. Si tout prolongement $\bar{\nu}$ de la mesure $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ non-négative et finie est complet-Dedekind par rapport à l'ordre $\overset{\nu}{<}$ alors l'espace topologique $(X, \mathcal{T}_\mu)$ vérifie l'axiome de séparation T_3 .

Démonstration. Soit $\mathcal{G}$ la famille de ensembles $\mathcal{T}_\mu$ -ouvert de l'espace X et $\mathcal{V} = \{U_G : G \in \mathcal{G}\}$ où $U_G = (G \times G) \cup [(X - G) \times X]$.

La famille $\mathfrak{V}$ est la sous-base d'une structure sémi-uniforme $\mathfrak{U}$ définie sur X compatible avec la topologie $\mathfrak{T}_\mu$ c'est à dire $\mathfrak{T}_\mu = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}}$, où $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}}$ est la topologie induite par la structure sémi-uniforme $\mathfrak{U}$.

Soit O un ensemble $\mathfrak{T}_\mu$ -ouvert et $x \in O$. De la définition de la topologie il résulte l'existence d'un ensemble $G \in \mathfrak{G}$ tel que $U_G[x] \subseteq O$ et $U_G \circ U_G \subseteq U_G$ on déduit la condition: $x \in \text{int}_{\mathfrak{T}_\mu} U_G[x] \subset \overline{U_G[x]}^{\mathfrak{T}_\mu}$.

Soit $\mathfrak{A} = \{A : A \subset X, A - U_G[x] \in \mathfrak{A}\}$ et $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$. De la définition de la famille $\mathfrak{A}$ il résulte qu'on a: $A_1 - U_G[x] \in \mathfrak{A}$ et $A_2 - U_G[x] \in \mathfrak{A}$. La famille $\mathfrak{A}$ étant un σ -anneau, on obtient: $(A_1 - U_G[x]) \cap (A_2 - U_G[x]) \in \mathfrak{A}$. Cet ensemble peut être écrit sous forme:

$$(A_1 - U_G[x]) \cap (A_2 - U_G[x]) = [(A_1 - A_2) - U_G[x]] \cup [(A_1 \cap U_G[x]) - U_G[x]].$$

De $A_1 \cap U_G[x] \subset U_G[x]$ et de l'égalité précédente il résulte: $(A_1 - A_2) - U_G[x] \in \mathfrak{A}$ c'est-à-dire $A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$.

Soit $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, $A_n \in \mathfrak{A}$. De la définition de la famille $\mathfrak{A}$ on obtient $A_n - U_G[x] \in \mathfrak{A}$. La famille $\mathfrak{A}$ étant un σ -anneau il résulte qu'on a:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - U_G[x]) \in \mathfrak{A}.$$

De cette relation on obtient:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - U_G[x] \in \mathfrak{A}$$

et donc:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

La famille $\mathfrak{A}$ est donc un σ -anneau.

On considère la famille $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} = \{A \cup B : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$ et soit $\mathfrak{D}_n$ tel que $\mathfrak{D}_n \in \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$. De la définition de la famille $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ on déduit que: $\mathfrak{D}_n = A_n \cup B_n$ où $A_n \in \mathfrak{A}$ et $B_n \in \mathfrak{B}$ et on en obtient:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \in \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}.$$

puisque $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des σ -anneaux.

Soient A et B les éléments de $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ et donc $A = A_1 \cup B_1$, $B = A_2 \cup B_2$ où A_1 et A_2 sont de la famille $\mathfrak{A}$ et B_1 et B_2 de la famille $\mathfrak{B}$. On a l'égalité:

$$A - B = (A_1 \cup B_1) - (A_2 \cup B_2) = [(A_1 - A_2) \cap \mathfrak{C}B_2] \cup [(B_1 - B_2) \cap \mathfrak{C}A_2].$$

Puisque B_1 et B_2 sont des éléments de la famille $\mathfrak{B}$ il en résulte que $B_1 - B_2 \in \mathfrak{B}$ et donc l'ensemble $(B_1 - B_2) - U_G[x] \in \mathfrak{A}$. De $(B_1 - B_2) \cap \mathfrak{C}A_2 \subset B_1 - B_2$ on trouve:

$$[(B_1 - B_2) \cap \mathfrak{C}A_2] - U_G[x] \subset (B_1 - B_2) - U_G[x] \in \mathfrak{A}.$$

La partie absolument continue β_μ de la mesure μ par rapport au σ -anneau générée par l'ensemble $[(B_1 - B_2) \cap \mathfrak{C}A_2] - U_G[x]$ étant non-négative et finie et $\mathfrak{A}$ étant un σ -anneau on peut supposer que la mesure β_μ est complète. Donc on a: $[(B_1 - B_2) \cap \mathfrak{C}A_2] - U_G[x] \in \mathfrak{A}$ et $(B_1 - B_2) \cap \mathfrak{C}A_2 \in \mathfrak{B}$. On procédera à présent à l'analyse des cas possibles à savoir:

(1) $(A_1 - A_2) \cap \mathfrak{C}B_2 = \emptyset$, donc $(A_1 - A_2) \cap \mathfrak{C}B_2 \in \mathfrak{A}$.

(2) $(A_1 - A_2) \cap B_2 = \emptyset$, donc $(A_1 - A_2) \cap \mathfrak{C}B_2 = A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$.

(3) $(A_1 - A_2) \cap B_2 \neq \emptyset$. Dans ce cas, si $A_1 - A_2 \subset B_2$, alors $(A_1 - A_2) \cap \mathfrak{C}B_2 = \emptyset$ donc $(A_1 - A_2) \cap \mathfrak{C}B_2 \in \mathfrak{A}$. On peut supposer donc que $A_1 - A_2 \not\subset B_2$ c'est-à-dire $(A_1 - A_2) \cap \mathfrak{C}B_2 \neq \emptyset$. Soit $\mathfrak{S}$ le σ -anneau généré par l'ensemble $A_1 - A_2$ et $\beta_\mu \ll \mathfrak{S}$ (la partie absolument continue de la mesure μ par rapport au σ -anneau $\mathfrak{S}$).

De la définition de la mesure β_μ on déduit:

$$\beta_\mu[(A_1 - A_2) \cap \mathfrak{C}B_2] = 0$$

et de $(A_1 - A_2) \cap \mathfrak{C}B_2 \subset (A_1 - A_2) \in \mathfrak{A}$ il résulte $(A_1 - A_2) \cap \mathfrak{C}B_2 \in \mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ est un σ -anneau.

On définit la mesure $\nu : \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $\nu(A \cup B) = \mu(A)$. La mesure ν prolonge la mesure μ au σ -anneau $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ puisque pour $A \in \mathfrak{A}$ on a $A \cup \emptyset \in \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ et donc $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$. La famille $\mathfrak{A}$ étant un σ -anneau on a $\emptyset \cup B \in \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$ et de la définition de la mesure ν on obtient $\nu(A \cup B) = 0$ c'est-à-dire ν est une mesure complète. Les familles $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ étant des σ -anneaux on déduit que $\tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ est un σ -anneau. La mesure ν étant définie sur $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ peut être prolongée à une mesure $\bar{\nu}$ définie sur le σ -anneau $\tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$. Soit $A \in \mathfrak{B}$. De la définition de la famille $\tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ il résulte:

$$\mathfrak{C}U_G[x] \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$$

et $\bar{\nu}$ étant un prolongement de la mesure μ est complet-Dedekind, c'est-à-dire il existe un ensemble $\mathfrak{D}$ mesurable par rapport à $\bar{\nu}$ tel que: $\mathfrak{C}U_G[x] < \bar{\nu} \mathfrak{D}$.

De la définition de l'ensemble $U_G[x]$ on déduit $U_G[x] \subseteq G$ et de la définition de la topologie $\mathfrak{T}_\mu$ suivie de la condition $G \in \mathfrak{T}_\mu$ on obtient $U_G[x] \subseteq G \overset{\mu}{<} B$ où $B \subset X$ μ -mesurable. Donc $U_G[x] \overset{\mu}{<} B$ c'est-à-

dire $\mathcal{C}B <^{\mu} \mathcal{C}U_G[x]$. Tenant compte du raisonnement précédent et du fait que $\bar{v}$ est un prolongement de la mesure μ on obtient :

$$\mathcal{C}B <^{\bar{v}} \mathcal{C}U_G[x] <^{\bar{v}} \mathcal{O}$$

De cette condition, il résulte que l'ensemble $\mathcal{C}U_G[x]$ est $\mathfrak{F}_{\bar{v}}$ -ouvert et donc $U_G[x]$ est $\mathfrak{F}_{\bar{v}}$ -fermé. Puisque tout ensemble μ -mesurable est $\bar{v}$ -mesurable, il résulte que $\mathfrak{F}_{\mu} < \mathfrak{F}_{\bar{v}}$. De cette condition il s'en suit que :

$$x \in \text{int}_{\mathfrak{F}_{\mu}}[x] = \text{int}_{\mathfrak{F}_{\bar{v}}} U_G[x] \subseteq \overline{U_G[x]}^{\mathfrak{F}_{\bar{v}}} = U_G[x] \subseteq O.$$

En désignant par Q l'ensemble $\text{int}_{\mathfrak{F}_{\mu}} U_G[x]$ on trouve la propriété : pour tout ensemble O ouvert et tout $x \in O$ il existe un ensemble ouvert Q tel que : $x \in Q \subset \bar{Q} \subset O$, ce qui montre que l'espace topologique $(X, \mathfrak{F}_{\mu})$ vérifie l'axiome de séparation T_3 . La théorie est démontrée.

THÉOREME 2. Si la mesure $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie sur le σ -anneau $\mathcal{A}$ de parties de X est non-négative, finie et tout prolongement est complet Dedekind, alors l'espace topologique $(X, \mathfrak{F}_{\mu})$ vérifie l'axiome de séparation T_0 .

Démonstration. Soient a et b des éléments de X , $a \neq b$ et $b \in U_G[a]$. Il existe un ensemble ouvert $G \subset X$ tel que $b \in U_G[q]$, $q \in X$, puisque la structure $\{U_G : G \text{ ouvert}\}$ est précompacte. De $U_G \circ U_G \subseteq U_G$ on obtient : $U_G[b] \subseteq U_G[q]$ et de là $b \in \text{int } U_G[q] = O$.

L'espace $(X, \mathfrak{F}_{\mu})$ vérifie l'axiome T_3 et il existe donc un ensemble O_1 ouvert tel que : $b \in O_1 \subset \bar{O}_1 \subset O$. Après r étapes on obtient le plus petit ensemble ouvert O_r qui contient b et est contenu dans O , $b \in O_r \subseteq \bar{O}_r \subseteq O$. On peut écrire :

$$O_r = \bigcap_{j=1}^r O_j, \quad O_1 \supseteq O_2 \supseteq O_3 \supseteq \dots \supseteq O_r.$$

On définit la relation R par : ARB si et seulement si $A \cap B = \emptyset$. On en déduit :

$$(1) \quad O_{h+1} \subset O_h, \quad 1 \leq h \leq r$$

$$(2) \quad O_h \subset O_h \text{ et de la } O_h \cap \mathcal{C}O_h = \emptyset. \text{ Donc } O_h \cap (X - O_h) = \\ = O_h \cap X \cap \mathcal{C}O_h = \emptyset$$

c'est-à-dire $Q_h R(X - O_h)$.

(3) $O_{h+2} \subset O_{h+1}$ et donc $O_{h+2} \cap \mathcal{C}O_{h+1} = \emptyset$. On en déduit :

$$(O_h - O_{h+1}) \cap O_{h+2} = O_{h+2} \cap O_h \cap \mathcal{C}O_{h+1} = O_{h+2} \cap \mathcal{C}O_{h+1} = \emptyset,$$

c'est-à-dire : $(O_h - O_{h+1}) R O_{h+2}$.

Des propriétés 1, 2, 3 il résulte que l'ensemble Q_r est μ -mesurable. L'ensemble Q_r étant ouvert on a : $A <^{\mu} Q_r <^{\mu} B$ où $B \in \mathfrak{M}^{\mu}(\mathcal{A})$. De $A <^{\mu} Q_r$ il résulte que l'ensemble A est $\mathfrak{F}_{\mu}$ -ouvert puisque Q_r est mesurable. On suppose que : $a \in Q_r$.

(1) $a \in A$. De $A <^{\mu} Q_r$ il résulte $A \subset Q_r$. L'ensemble A étant ouvert, il résulte qu'il existe $G \in \mathfrak{F}_{\mu}$ tel que $U_G[a] \subseteq A$. De $b \in U_G[a]$ on déduit : $b \in A \subset O_r$, ce qui est en contradiction avec la définition de l'ensemble Q_r .

(2) $a \in Q_r - A$.

Dans ce cas $a \in Q_r \cap \mathcal{C}A$, donc $Q_r \cap \mathcal{C}A \neq \emptyset$. L'espace $(X, \mathfrak{F}_{\mu})$ vérifie l'axiome de séparation T_3 et il existe donc un ensemble G_1 ouvert tel que : $a \in G_1 \cap \mathcal{C}A$ et $\bar{G}_1 \subset Q_r$. De $a \in G_1$ on déduit : $U_G[a] \subseteq G_1 \subset Q_r$ et donc $b \in G_1 \subset Q_r$, ce qui contredit la définition de l'ensemble Q_r . Il en résulte $a \notin Q_r$ et donc $(X, \mathfrak{F}_{\mu})$ est T_0 -espace.

Corollaire. Si tout prolongement $\bar{v}$ de la mesure $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}_+$ non-négative, finie est complet-Dedekind par rapport à l'ordre $<$, alors l'espace topologique $(X, \mathfrak{F}_{\mu})$ vérifie l'axiome T_2 de séparation.

THÉOREME 3. Si la mesure $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie sur la σ -algèbre $\mathcal{A}$ de parties de X est non-négative, σ -finie et la partie atomique de la mesure μ est complète-Dedekind, alors $(X, \mathfrak{F}_{\mu})$ est F_{σ} -absolu.

Démonstration. La mesure μ étant σ -finie, il résulte que :

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n, \quad \mu(Y_n) < \infty.$$

On suppose qu'il y a une base $\mathfrak{B}(\mathfrak{F}, Y_n) = \{G'_{\alpha} : \alpha \in \Gamma\}$ de filtre ouverte en Y_n tel que :

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \bar{G}'_{\alpha} = \emptyset.$$

De la définition de la topologie induite sur Y_n il résulte qu'il existe un ensemble ouvert G_{α} en X tel que $G'_{\alpha} = Y_n \cap G_{\alpha}$. Donc :

$$\bar{Y}_n \cap \left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \bar{G}_{\alpha} \right) = \emptyset.$$

Soit $\xi \in Y_n$. Il y a un indice $\alpha_0 \in \Gamma$ pour lequel $\xi \notin \bar{G}_{\alpha_0}$. De $\xi \in \bar{G}_{\alpha_0}$ et du fait que $(X, \mathcal{F}_\mu)$ vérifie l'axiome de séparation T_3 , il résulte l'existence d'une ensemble ouvert O_1 , tel que: $\xi \in O_1 \subset \bar{O}_1 \subset \bar{G}_{\alpha_0}$. Après r étapes on trouve l'ensemble ouvert Q_r minimal envers $\subset$ qui contient ξ : $\xi \in O_r \subset \bar{O}_r \subset \bar{O}_{r-1} \subset \dots \subset \bar{G}_{\alpha_0}$. L'ensemble:

$$Q_r = \bigcap_{j=1}^r O_j$$

est ouvert et μ -mesurable.

De la définition de la topologie $\mathcal{F}_\mu$ il résulte $A \stackrel{\mu}{<} Q_r \stackrel{\mu}{<} B_r$, où B_r est μ -mesurable.

L'ensemble A est $\mathcal{F}_\mu$ -ouvert et $A \subset Q_r$. De la définition de l'ensemble Q_r , il résulte $\xi \notin A$. De $A \stackrel{\mu}{<} Q_r$, il résulte qu'il existe un σ -anneau $\mathcal{S}'$ tel que $Q_r - A \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A})$. On prolonge la mesure μ à la mesure $\nu: \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ et soit β_ν la partie absolument continue par rapport au σ -anneau $\mathcal{S}' \cap \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A})$. De $Q_r - A \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A})$ on déduit $\beta_\nu(Q_r - A) = 0$. De $Q_r - A \subset Q_r \in \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A})$ on obtient $Q_r - A \in \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A})$ puisque β_ν est complète. De $\xi \in Q_r - A$ il résulte $\beta_\nu(\{\xi\}) = 0$. Il en résulte que β_ν est diffuse. En désignant γ la partie singulière de la mesure ν par rapport à $\mathcal{S}' \cap \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A})$ on peut écrire $\nu = \beta_\nu + \gamma$ ce qui prouve $\gamma = \nu_a$ (la partie atomique de la mesure ν). La mesure γ étant singulière par rapport $\mathcal{S}' \cap \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A})$ on a:

$$E \in \mathcal{M}^\nu(\mathcal{A}) \quad E_0 \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A}) \quad \gamma(E - E_0) = 0$$

et donc $E_0 \stackrel{\gamma}{<} E$. La mesure γ étant complète-Dedekind par rapport à l'ordre $\stackrel{\gamma}{<}$ il en résulte que $E_0 = E$, c'est à dire $\mathcal{S}' \subset \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A})$, ce qui contredit la définition de $\mathcal{S}$. La théorème est démontré.

THÉOREME 4. Tout espace X F_σ -absolu et faible est un espace d'interpolation par rapport à la famille $\mathcal{F}_\mu \times \mathcal{F}_\mu$, où μ est une mesure non-négative, borélienne et finie tel que tout prolongement de μ est une mesure complète-Dedekind.

Démonstration. Soit $\mu: \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ une mesure borélienne, σ -finie telle que la partie atomique de prolongement de la mesure μ est complète-Dedekind. Soit $B_0 \in \mathcal{B}_0$ tel que $\mu(B_0) = 0$. L'ensemble B_0 étant borélien il existe les ensembles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de I -ième catégorie tels que l'ensemble $(B_0 - \mathcal{C}) \cup \mathcal{D}$ est ouvert. La famille des sous-ensembles de l'espace X de I -ième catégorie est un σ -anneau. On désigne ce σ -anneau par $\mathcal{U}$. De $B_0 -$

$- \mathcal{C} \subset B_0$ il résulte $\mu(B_0 - \mathcal{C}) = 0$. Soit $\mathcal{S}_0^\mu$ le σ -anneau des ensembles μ -négligeables et $\mathcal{V}$ la somme directe des σ -anneaux $\mathcal{U}$ et $\mathcal{S}_0^\mu$. La famille $\mathcal{U}$ étant un σ -anneau il résulte que $\mathcal{V}$ est un σ -anneau. On définit une mesure ν par $\nu: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\nu(A \cup B) = \mu(A)$ et on observe que cette mesure est complète. L'ensemble $G = (B_0 - \mathcal{C}) \cup \mathcal{D}$ est ν -mesurable, puisque $G \in \mathcal{V}$. De $B_0 - \mathcal{C} \subset G$, $G - (B_0 - \mathcal{C}) = \mathcal{D} \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ on obtient $B_0 - \mathcal{C} \stackrel{\nu}{<} G$. La mesure ν étant complète-Dedekind (puisque μ est complète-Dedekind) on en déduit:

$$B_0 - \mathcal{C} = (B_0 - \mathcal{C}) \cup \mathcal{D}$$

c'est-à-dire $\mathcal{D} \subset B_0 - \mathcal{C}$ donc $G = B_0 - \mathcal{C}$.

De $B_0 \in \mathcal{M}^\nu(\mathcal{V})$, $B_0 - \mathcal{C} \in \mathcal{M}^\nu(\mathcal{V})$, $B_0 - \mathcal{C} \in \mathcal{S}_0^\mu \subset \mathcal{V}$ il résulte $\mathcal{C} \stackrel{\nu}{<} B_0$. De $\mathcal{C} \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ on déduit que l'ensemble $\mathcal{C}$ est ν -mesurable, c'est-à-dire $\mathcal{C} = B_0$. La dernière égalité montre que les ensembles boréliens négligeables par rapport à une mesure complet-Dedekind sont des ensembles de I -ième catégorie.

On désigne par $\mathcal{M}$ le σ -anneau des ensembles μ -mesurables déterminé par la propriété de la mesure μ d'être complète-Dedekind et soit μ^* le prolongement de la mesure μ à $\mathcal{M}^\mu(\mathcal{A})$. La partie absolument continue de la mesure μ^* désignée par β_{μ^*} possède la propriété: $\beta_{\mu^*}(N) = 0$ pour tout $N \in \mathcal{M}$. À l'aide du résultat précédent il en résulte que N est de I -ième catégorie. Du théorème 3 on déduit que X est un espace F_σ -absolu. Soit T sa topologie. La mesure μ étant σ -finie et borélienne on trouve:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n, \quad Y_n \in \mathcal{B}_0, \quad \mu(Y_n) < \infty.$$

Il existe les ensembles B_n et $\mathcal{D}_n$ de I -ième catégorie, tel que l'ensemble $\mathcal{S}_n = (Y_n - B_n) \cup \mathcal{D}_n$ est $\mathcal{F}_\mu$ -ouvert. De la définition de $\mathcal{F}_\mu$ on déduit la relation:

$$U_n \stackrel{\mu}{<} (Y_n - B_n) \cup \mathcal{D}_n \stackrel{\mu}{<} V_n \in \mathcal{M}^\mu(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A} = \mathcal{B}_0.$$

La relation $\stackrel{\mu}{<}$ étant topogène on obtient: $\mathcal{C}_n - B_n \stackrel{\mu}{<} V_n$ et de là $Y_n \stackrel{\mu}{<} B_n \cup \mathcal{U}_n$. La dernière relation nous conduit à:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \stackrel{\mu}{<} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \right) = \Omega$$

où Ω est ensemble de I -ième catégorie. La relation d'inclusion étant moins fine que la relation $\stackrel{\mu}{<}$ on déduit $X = \Omega$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_\mu$ est une

topologie faible et F_σ -absolue. Puisque μ^* est complete-Dedekind on déduit à l'aide de theorems 1, 2, 3 et du theoreme de [7] que tout espace F_σ -absolu et faible est un espace d'interpolation par arpport à la classe $\mathcal{F}_\mu \times \mathcal{F}_\mu$. Le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Gall. S. A., *Point set topology*. Academic Press (1964).
 [2] Kelley J. L., *Decomposition and representation theorms in mesure theory*. Math. Ann. 163, 89-94 (1966).
 [3] Kelley J. L., Namioka I. and co-authors. *Linear spaces* Van Nostrand (1963).
 [4] Kelley J. L., *General topology*. Van Nostrand (1955).
 [5] Petrișor P., *Sur un type d'interpolation topologique*, (sous presse)
 [6] Ray K. C., *On extension of measures*. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R., 11 (59), 4, 79-82 (1967).
 [7] Vasiliu C., *Asupra teoremei de descompunere a lui Lebesgue*. Com. Acad. R.P.R., XIII, 10, 863-870 (1963).

Reçu le 24. I. 1970.

UN ANALOGUE DE L'ALGÈBRE BOOLEENNE

(SUITTE)

par

VIOLETTE ZELMER

à Cluj

§ 1. Sousalgèbre

Dans [1] on a introduit la notion d'algèbre pseudobooléenne, définie comme un ensemble A muni de deux opérations binaires „+” et „.” et une opération unaire (la complèmentation) „'” satisfaisant aux axiomes :

$$(1) \quad (a + b) + c = (a + c) + b \quad (1') \quad (ab)c = (ac)b$$

$$(2) \quad a + (b + c) = [(a + b) + c] + c \quad (2') \quad a(bc) = [(ab)c]c$$

(3) $\exists 0, 1, e \in A$, pour lesquelles on a

+	0	1	e
0	0	e	1
1	1	0	e
e	e	1	0

.	0	1	e
0	1	0	e
1	e	1	0
e	0	e	1

$$(4) \quad a + 0 = a \quad (4') \quad a \cdot 1 = a, \forall a \in A$$

$$(5) \quad bc + a = (b + a)c \quad (5') \quad a(b + c) = a + b(ce)$$

$$(6) \quad \forall a \in A, \exists ! \cdot a' \in A, \text{ tel que}$$

$$a' + a = 1, \quad aa' = 0, \quad a''' = a$$

Comme d'habitude, on introduit la notion de sousalgèbre par la

Définition 1.1. Un sousensemble B de l'algèbre A est une sousalgèbre de A si il est fermé par rapport aux trois opérations de A .