

Assume that $S = h(\bar{\Pi})$ where

$$\bar{\Pi} = \prod_{k=1}^n p_k^{c_k} \quad \text{with} \quad \sum_k c_k = 0.$$

$$\text{Then } \frac{\partial T}{\partial p_i} = h' \cdot \frac{c_i}{p_i} \bar{\Pi} + m \frac{b_i}{p_i} \prod_k p_k^{-b_k}.$$

The nonnegativity of $\frac{\partial T}{\partial p_i}$ leads to

$$c_i h' \prod_k p_k^{b_k + c_k} + m b_i \geq 0.$$

Suppose $h' \geq 0$. Then the necessary condition for q_i to be nonnegative is whenever c_i is nonpositive the corresponding b_i has to be nonnegative.

4. Examples

1) Let $h(\bar{\Pi}) = \bar{\Pi}$, i.e. $S = \prod_{k=1}^n p_k^{c_k}$ with $\sum_{k=1}^n c_k = 0$.

Then $\frac{\partial S}{\partial p_i} = \frac{c_i}{p_i} \prod_k p_k^{c_k}$ and

$$(24) \quad q_i = \frac{b_i}{p_i} m + \frac{c_i}{p_i} \prod_k p_k^{b_k + c_k}.$$

2) Suppose $h(\bar{\Pi}) = \ln \bar{\Pi}$.

In this case $\frac{\partial S}{\partial p_i} = \frac{c_i}{p_i}$ and

$$(25) \quad q_i = \frac{b_i}{p_i} m + \frac{c_i}{p_i} \prod_k p_k^{b_k}.$$

The parameters b_k and c_k in these examples have to be so chosen as to satisfy conditions $\sum_k b_k = 1$, $\sum_k c_k = 0$ and also provide for a given range of arguments $p_1, \dots, p_n$ and m , the nonnegativity of the q_i and negativity of (23).

Received 5. X. 1970

SUR LA REPRÉSENTATION NOMOGRAPHIQUE DES ÉQUATIONS SYMÉTRIQUES À QUATRE VARIABLES

par

MARIA MIHOC

Cluj

Dans ce travail nous donnerons une autre méthode de représentation nomographique des équations symétriques à quatre variables qui est complètement différente des méthodes étudiées par E. A. SILAEVA [2].

1. L'équation linéaire complète à quatre variables a la forme suivante :

$$(1) \quad \begin{aligned} & A_0 x y z u + A_1 x y z + A_2 x y u + A_3 x z u + A_4 y z u + \\ & + B_0 x y + B_1 x z + B_2 x u + B_3 y z + B_4 y z + B_5 z u + \\ & + C_0 x + C_1 y + C_2 z + C_3 u + D_0 = 0, \end{aligned}$$

où A_i ($i = \overline{0, 4}$), B_i ($i = \overline{0, 5}$), C_i ($i = \overline{0, 3}$), D_0 sont des coefficients numériques.

L'équation (1) admet une représentation nomographique à l'aide d'un nomogramme constitué de deux nomogrammes à points alignés et à échelles rectilignes régulières et projectives.

Si $A_0 \neq 0$, alors au moins une des échelles rectilignes, qui entrent dans la constitution du nomogramme est projective (c'est ainsi qu'il peut arriver des cas où une, deux, trois ou toutes les échelles rectilignes sont projectives).

Si $A_0 = 0$, alors ou bien toutes les échelles du nomogramme de l'équation (1) sont rectilignes et régulières, ou bien dans la constitution du nomogramme entrent des échelles rectilignes régulières et projectives en différentes proportions.

Les équations de Soreau correspondentes aux nomogrammes à points alignés à échelles rectilignes projectives qui entrent dans la constitution du nomogramme sont les suivantes :

$$(2) \begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & \frac{x+a}{bx+1} & 1 \\ \frac{cy+d}{ey+1} & \frac{fy+g}{ey+1} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ \frac{hz+i}{jz+1} & \frac{z+k}{jz+1} & 1 \\ \frac{lu+m}{nu+1} & \frac{pu+r}{nu+1} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

où l'échelle commune est celle de la variable w , et les constantes $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, r$ sont les paramètres des échelles du nomogramme. Annulant un des paramètres b, e, j, n l'échelle rectiligne projective qui contient le paramètre respectif devient une échelle régulière.

Mais les équations du type (1) n'admettent pas toutes une représentation nomographique de la forme (2). Pour que cette représentation soit possible, les coefficients de l'équation (1) doivent satisfaire au système suivant de conditions (voir [1]) :

$$(3) \begin{aligned} A_0(B_1C_3 - B_2C_2) - A_1(A_3C_3 - B_2B_5) + A_2(A_3C_2 - B_1B_5) &= 0 \\ A_0(B_1B_4 - B_2B_3) - A_1(A_3B_4 - A_4B_2) + A_2(A_3B_3 - A_4B_1) &= 0 \\ A_0(B_1C_1 - B_3C_0) - A_1(A_3C_1 - A_4C_0) + B_0(A_3B_3 - A_4B_1) &= 0 \\ A_0(B_1D_0 - C_0C_2) - A_1(A_3D_0 - B_5C_0) + B_0(A_3C_2 - B_1B_5) &= 0. \end{aligned}$$

Ces conditions assurent la compatibilité d'un système de seize équations nonlinéaires, dont les inconnues sont les seize paramètres des échelles du nomogramme composé.

2. Les équations symétriques linéaires à quatre variables ont la forme :

$$(4) \quad Axyz + B(xyz + xyu + yzu + xzu) + C(xy + xz + xu + yz + yu + zu) + D(x + y + z + u) + E = 0.$$

On remarque que l'équation (4) est un cas particulier de l'équation (1), où, $A = A_0$, $B = A_i$ ($i = \overline{1, 4}$), $C = B_i$ ($i = \overline{0, 5}$), $D = C_i$ ($i = \overline{0, 3}$), $E = D_0$.

Le problème se pose de déterminer les conditions dans lesquelles l'équation (4) se représente à l'aide d'un nomogramme constitué de deux

nomogrammes à points alignés, à échelles rectilignes et projectives. En d'autres mots, quelles sont les conditions dans lesquelles l'équation (4) se peut mettre sous la forme (2) ?

Ces conditions résultent de (3).

Les trois premières équations du système (3) sont vérifiées identiquement pas les coefficients de l'équation (4). La dernière équation, qui s'écrit sous la forme :

$$(5) \quad A(CE - D^2) - B(BE - CD) + C(BD - C^2) = 0,$$

est la condition de représentation nomographique de l'équation (4) par un nomogramme composé à points alignés, donc aussi la condition de compatibilité du système :

$$(6) \quad \begin{aligned} c(n - pj) - (e - bf)(l - hp) &= A \\ c(1 - rj) - (e - bf)(m - hr) &= B \\ c(kn - p) - (e - bf)(kl - ip) &= B \\ d(n - pj) - (1 - bg)(l - hp) &= B \\ ac(n - pj) - (ae - f)(l - hp) &= B \\ c(k - r) - (e - bf)(km - ir) &= C \\ d(1 - rj) - (1 - bg)(m - hr) &= C \\ d(kn - p) - (1 - bg)(kl - ip) &= C \\ ac(1 - rj) - (ae - f)(m - hr) &= C \\ ac(kn - p) - (ae - f)(kl - ip) &= C \\ ad(n - pj) - (a - g)(l - hp) &= C \\ d(k - r) - (1 - bg)(km - ir) &= D \\ ac(k - r) - (ae - f)(km - ir) &= D \\ ad(1 - rj) - (a - g)(m - hr) &= D \\ ad(kn - p) - (a - g)(kl - ip) &= D \\ ad(k - r) - (a - g)(km - ir) &= E. \end{aligned}$$

Les solutions de ce système donnent les valeurs des paramètres des échelles du nomogramme. Celles-ci sont :

$$\begin{aligned}
 a_{1,2} &= \frac{AD - BC \pm \sqrt{(AD - BC)^2 - 4(AC - B^2)(BD - C^2)}}{2(AC - B^2)} ; \\
 d_{1,2} &= \frac{AD - BC \pm \sqrt{(AD - BC)^2 - 4(AC - B^2)(BD - C^2)}}{2(AC - B^2)} \cdot c ; \\
 f &= \frac{B - Aa}{C - Ba} \cdot \frac{(AC - B^2)a + (BD - C^2)b - (AD - BC)}{(AC - B^2) - (AD - BC)b + (BD - C^2)b^2} + \\
 &\quad + \frac{(AC - B^2)a - (AD - BC)ab + (BD - C^2)b}{(AC - B^2) - (AD - BC)b + (BD - C^2)b^2} \cdot e ; \\
 g &= \frac{(AC - B^2)a + (BD - C^2)b - (AD - BC)}{(AC - B^2) - (AD - BC)b + (BD - C^2)b^2} + \\
 &\quad + \frac{C - Ba}{B - Aa} \cdot \frac{(AC - B^2)a - (AD - BC)ab + (BD - C^2)b}{(AC - B^2) - (AD - BC)b + (BD - C^2)b^2} \cdot e ; \\
 i &= kh + \frac{B - Aa}{f(1 - ab)} \cdot \frac{k}{p} - \frac{C - Ba}{f(1 - ab)} \cdot \frac{1}{p} ; \\
 (7) \quad k &= \frac{1}{j} + \frac{Db - C}{dj(1 - ab)} - \frac{D - Ca}{dgj(1 - ab)} + \frac{C - Db}{c(1 - ab)} + \frac{D - Ca}{fc(1 - ab)} \cdot e ; \\
 l &= \frac{B - Aa}{f(1 - ab)} + ph ; \\
 m &= \frac{C - Ba}{f(1 - ab)} + \left[\frac{1}{j} + \frac{Db - C}{dj(1 - ab)} - \frac{D - Ca}{dgj(1 - ab)} \right] \cdot h ; \\
 n &= \frac{C(1 - ab) - B(a - g)}{dg(1 - ab)} + pj ; \\
 p &= \frac{1}{1 - kj} \cdot \frac{[C(1 - ab) - B(a - g)]k - D(1 - bg) + C(a - g)}{dg(1 - ab)} ; \\
 r &= \frac{1}{j} + \frac{Db - C}{dj(1 - ab)} - \frac{D - Ca}{dgj(1 - ab)} ;
 \end{aligned}$$

Le paramètre j se détermine par la relation :

$$(7') \quad km - ir = \frac{D - Ca}{f(1 - ab)} .$$

Dans les formules (7) et (7') les paramètres b, c, e, h peuvent prendre des valeurs arbitraires, à la condition que celles-ci ne conduisent pas à la dégénération des échelles projectives en échelles régulières ou à l'annulation de certains dénominateurs.

Au cas général, de l'équation (1), la compatibilité du système de seize équations à seize inconnues (les paramètres des échelles, dont quatre restent arbitraires), a nécessité quatre équations de condition ((3)). Dans le cas de l'équation symétrique (4) nous avons une seule équation de condition ((5)), les autres trois étant vérifiées identiquement par les coefficients de l'équation symétrique. La compatibilité du système (6) requiert donc trois autres conditions, qui sont données par les relations suivantes entre les paramètres des échelles du nomogramme :

$$\begin{aligned}
 d &= ac \\
 (8) \quad -kn \quad p &= 1 \\
 kl - ip &= m - hr .
 \end{aligned}$$

Si, une expression des dénominateurs des formules (7) ou (7') s'annule alors les valeurs des paramètres des échelles du nomogramme se calculent par résolution du système (6) en tenant compte de la condition qui intervient à la suite de l'annulation du dénominateur respectif.

3. Nous citerons comme cas particuliers intéressants du problème étudié ceux auxquels l'équation (4) se représente à l'aide d'un nomogramme constitué par deux nomogrammes à points alignés à échelles rectilignes régulières et projectives.

Parmi ceux-ci dans ce qui suit nous aborderons le cas auquel trois échelles rectilignes sont régulières, et la quatrième échelle est rectiligne et projective. Cette situation s'obtient si dans les équations (2) on considère $b = e = j = 0$. Avec ces modifications le système (6) devient :

$$\begin{aligned}
 (9) \quad cn &= A \\
 c &= B \\
 c(kn - p) &= B \\
 dn - (l - hp) &= B \\
 acn + f(l - hp) &= B \\
 c(k - r) &= C \\
 d - (m - hr) &= C \\
 d(kn - p) - (kl - ip) &= C \\
 ac + f(m - hr) &= C \\
 ac(kn - p) + f(kl - ip) &= C \\
 adn - (a - g)(l - hp) &= C \\
 d(k - r) - (km - ir) &= D \\
 ac(k - r) + f(km - ir) &= D \\
 ad - (a - g)(m - hr) &= D \\
 ad(kn - p) - (a - g)(kl - ip) &= D \\
 ad(k - r) - (a - g)(km - ir) &= E .
 \end{aligned}$$

La résolution du système (9) conduit aux situations suivantes:
 a) Si $B \neq 0$ et $AC - B^2 \neq 0$, alors les solutions du système (9) sont:

$$a_{1,2} = \frac{AD - BC \pm \sqrt{\Delta_1}}{2(AC - B^2)}; \quad c = B; \quad d = Ba;$$

$$f = -1; \quad g = a - \frac{AD - BC}{AC - B^2};$$

$$i = Ba - C - \frac{C^2 - BD}{Br} + \frac{C}{B}h + rh; \quad k = r + \frac{C}{B};$$

$$(10) \quad l = Aa - B + \left(\frac{AC - B^2}{B^2} + \frac{A}{B}r \right)h; \quad m = Ba - C + hr;$$

$$n = \frac{A}{B}; \quad p = \frac{AC - B^2}{B^2} + \frac{A}{B}r;$$

$$r_{1,2} = \frac{ABD + B^2C - 2AC^2 \pm \sqrt{\Delta'_2}}{2B(AC - B^2)}$$

où

$$\Delta_1 = (AD - BC)^2 - 4(AC - B^2)(AD - C^2)$$

$$\Delta'_2 = [C(AC - B^2) - A(BD - C^2)]^2 + 4(AC - B^2)^2(BD - C^2),$$

et le paramètre h reste arbitraire.

Les conditions de compatibilité du système (9) sont les conditions (5) et (8).

Les positions des échelles du nomogramme en fonction des valeurs des discriminants Δ_1 , Δ'_2 et des valeurs du paramètre h sont portées au tableau I.

b) Le cas $B \neq 0$, $AC - B^2 = 0$, qui implique la relation $l - hp = n(m - hr)$ entre paramètres (c'est-à-dire le parallélisme des échelles des variables z et u) conduit à la disparition de l'échelle projective de la variable u .

c) Le cas $B = 0$, qui implique $c = 0$ (c'est-à-dire le parallélisme des échelles x et y) conduit à la superposition des échelles de ces deux variables.

Remarque. Les situations b) et c) ne peuvent être prises en considération à la représentation nomographique de l'équation symétrique, parce que dans ces deux cas il est impossible d'utiliser le nomogramme composé.

Tableau I.

CAS	$h \neq 0$	$h = 0$
$\Delta_1 > 0$ $\Delta'_2 > 0$		
$\Delta_1 > 0$ $\Delta'_2 = 0$		
$\Delta_1 = 0$ $\Delta'_2 > 0$		
$\Delta_1 = 0$ $\Delta'_2 = 0$		

Les autres particularisations, qui conduisent à diverses autres combinaisons d'échelles rectilignes régulières et projectives se traitent de la même manière en partant toujours de la résolution du système (6).

4. Mais si dans le système (6) en plus de l'annulation des paramètres b, e, j , on requiert de plus l'annulation du paramètre n , alors l'équation (4) peut être représentée par un nomogramme composé à points alignés et à toutes les échelles rectilignes régulières.

Dans ce cas $A = 0$, et l'équation symétrique (4) devient :

$$(4') \quad B(xyz + xyu + xzu + yzu) + C(xy + xz + xu + yz + yu + zu) + D(x + y + z + u) + E = 0.$$

Les équations de Soreau sont :

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & x + a & 1 \\ cy + d & fy + g & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ hz + i & z + k & 1 \\ lu + m & pu + r & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

où on a conservé les mêmes notations pour les paramètres des échelles du nomogramme.

a) Si $B \neq 0$, à la suite de la résolution du système (6) particularisé de la sorte, on obtient les solutions suivantes :

$$(12) \quad \begin{aligned} a &= \frac{c \pm \sqrt{\Delta'_1}}{2B}; & c &= B; & d &= Ba; \\ f &= -1; & g &= a - \frac{c}{B}; \\ i &= B(a + r) + \left(\frac{c}{B} + r\right)h; & k &= r + \frac{c}{B}; \\ l &= -(B + h); & m &= Ba - C + rh; \\ p &= -1; & r &= \frac{-c \pm \sqrt{\Delta'_1}}{2B}; \end{aligned}$$

où h reste un paramètre arbitraire et le discriminant Δ'_1 a la valeur :

$$\Delta'_1 = 4BD - 3C^2.$$

Les conditions de compatibilité du système particularisé sont :

$$(5') \quad B(BE - CD) + C(BD - C^2) = 0$$

et

$$(8') \quad \begin{aligned} p &= -1 \\ d &= ac \\ kl + i &= m - hr. \end{aligned}$$

Les valeurs des paramètres obtenues des formules (12) conduisent à différentes positions des échelles du nomogramme, qui peuvent être systématisées dans un tableau analogue au tableau I.

Tableau II.

cas	$h \neq 0$	$h = 0$
$\Delta'_1 > 0$		
$\Delta'_1 = 0$		

b) Si $B = 0$ (donc les échelles x et y sont parallèles) il résulte $c = 0$ et les valeurs des paramètres trouvées à la suite de la résolution du système conduisent à la disparition d'une des échelles des variables y ou u , et donc à l'impossibilité de l'utilisation du nomogramme.

5. De l'analyse des divers cas possibles étudiés ci-dessus, on constate que les nomogrammes qui entrent dans la composition du nomogramme composé, correspondants à une équation symétrique ne peuvent contenir

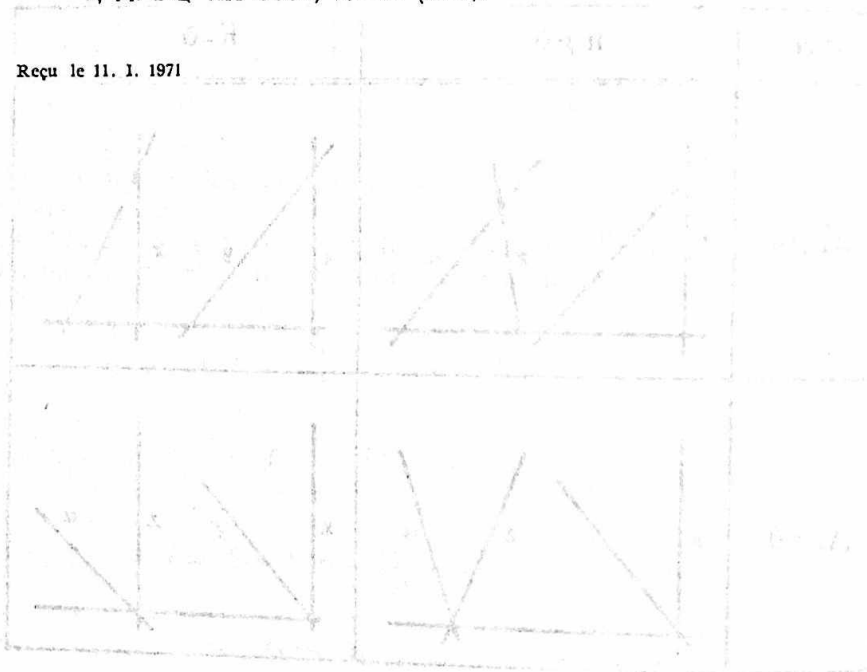
des échelles parallèles. Ainsi qu'il résulte des tableaux I et II les seules situations distinctes du point de vue affine, qui se rencontrent, sont celles dans lesquelles les échelles du nomogramme concourent dans un point, ou sont disposées sur les côtés d'un triangle.

Institut de calcul
de l'Académie de la République
Socialiste Roumanie, Cluj

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Mihoc M., *Sur la représentation des équations à quatre variables par des nomogrammes composés à points alignés (III)*. Analele științifice ale Univ. „Al. I. Cuza” din Iași, Secțiunea I, Matematică, Tom XVII, fasc. 1, pp. 205 — 211 (1971).
- [2] Сулаева Е. А., *О построении номограммы из выравненных точек для симметричных уравнений с четырьмя и пятью переменными*. „Номографический сборник”, 7, М. В.д. АН СССР, 79—88 (1970).

Reçu le 11. 1. 1971



ON THE HOMOMORPHIC PRODUCT OF HAAR MEASURES

by

PETRU T. MOCANU

Cluj

1. The aim of the present paper is to verify the associative law for the homomorphic product of the Haar measures.

First we recall the definition of the homomorphic product of two invariant Haar measures [1].

Let F and G be two locally compact groups and $\varphi: F \rightarrow G$ a continuous and open epimorphism of F onto G with kernel K . We denote by x, y and z generic points of F, K and G respectively and by dy and dz the left invariant Haar measures on K and G respectively. One prove that there exists a unique mapping

$$\bar{\varphi}: \mathcal{K}(F) \rightarrow \mathcal{K}(G)$$

such that

$$f \in \mathcal{K}(F), x \in F \Rightarrow \bar{\varphi}(f)[\varphi(x)] = \int_K f(xy) dy$$

(as usual, we denote by $\mathcal{K}(E)$ the vector space of the real-valued continuous with compact supports functions defined on a locally compact space E).

The homomorphic product of dy and dz , denoted by $dx = dy \times dz$ is defined by the formula

$$\forall f \in \mathcal{K}(F), \int_F f(x) dx = \int_G \bar{\varphi}(f)(z) dz.$$

One prove that dx is a left invariant Haar measure on F .