where α, β are arbitrary points of the interval $[-1, 1]$, t_1, t_2 are points of discontinuity of μ. It is also well-known [7] that in order to determine the region $D(z_1, z_2, TR)$ it is sufficient to evaluate the expression

$$\min_{f \in TR} \left| \frac{f(z_1)}{f(z_2)} - \mathfrak{Z}_0 \right| \tag{16}$$

where $\mathfrak{Z}_0 \in \mathcal{C}\mathfrak{D}(z_1, z_2, TR)$, the complement of $\mathfrak{D}(z_1, z_2, TR)$. A study of (16) yields the result that the extremal functions have the form

$$F(z, \lambda, t_1, t_2, t_3) = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k S(z, t_k),$$

where $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{3} \lambda_k = 1$ and $t_k \in <-1, 1>$. Hence in order to find the constant $m(a, p, TR)$ we have to find $\min_{\lambda_k, t_k} |z_s|$, $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ where z_s are the roots of the equation

$$F(z, \lambda_k, t_k) = pF(a, \lambda_k, t_k).$$

Unfortunately, except for the case considered above, we have not been able to obtain a complete answer.

4. Conclusion

As noted above P.MOCANU had considered the problem of finding the minimum in (2), with $\mathfrak{F}$ replaced by the general class S of univalent functions. Although our geometric method has wide applicability, we have not been able to apply it to this very general case.

BIBLIOGRAPHY

[1] Ashniewic N. A., Ulina G. W., „On the regions of variability of analytic functions", Vestnik Len. Univ. **11**, 31–42 (1955) (Russian).
[2] Golusin G. M., „Theory of functions of a Complex Variable", Providence, Rhode Island, 1969.
[3] Kaczmarski J., „Sur L'équation $f(z) = pf(c)$ ...", Bull. Acad. Pol. des. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. et Phys., **XV**, 245–251 (1967).
[4] Lewandowski Z., „Starlike majorants and subordination", Annales, UMSC, XV, 79–84 (1961).
[5] Mocanu P. T., „On the equation $f(z) = \alpha f(a)$ ...", Mathematica (Cluj), **6** (29), 1, 63–79 (1964).
[6] Pilat B., „On typically – real functions with Montel's normalization", Annales UMCS, XVIII, 53–72 (1964).
[7] Schaffer A. C., Spencer D. C., „Coefficient Regions for Schlicht Functions", New York, 1950.

Received, 4. IX. 1970.

MATHEMATICA VOL. 13 (36), 2, 1971, pp. 287–299

DÉTERMINATION D'UN INTERVALLE MAXIMAL D'INTERPOLATION

par

DUMITRU RIPIANU

à Cluj

§ 1. Dans cette note on applique un procédé indiqué dans [2] à la détermination de l'intervalle maximal de non-annulation pour les solutions des équations différentielles prises dans un certain ensemble.

On considère une équation différentielle du second ordre de forme normale

$$y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_2(x)\, y(x) = 0, \tag{1}$$

dont les coefficients sont des fonctions à dérivées première et seconde continues et uniformément bornées dans l'intervalle $[0, \infty)$. On désigne par $L = (l_0, l_1)$ une paire de nombres donnés, finis ($l_0 \neq 0$), par $a = a(x)$ la fonction-vecteur $(a_1(x), a_2(x))$ par $\varphi_{a,L}(x)$ la solution de l'équation (1) qui vérifie les conditions de Cauchy $\varphi_{a,L}(0) = l_0$, $\varphi'_{a,L}(0) = l_1$ et par $[0, \lambda_{p,D,L})$ l'intervalle ouvert à droite (et fermé à gauche) de longueur maximale dans lequel on a $\varphi^{(p)}_{a,L}(x) \neq 0$, quelle que soit l'équation (1) dont la fonction-vecteur a vérifie les conditions requises dans l'hypothèse H_1 ci-dessous, c'est-à-dire qui appartient à un certain ensemble $\mathcal{A}$ de telles fonctions, le nombre p étant égal à 0 au à 1.

Le problème consiste dans la détermination (ou du moins dans la délimitation inférieure) de ce nombre $\lambda_{p,D,L}$. Nous allons utiliser dans le cas d'un ensemble particulier $\mathcal{A}$ de fonctions-vecteur a le procédé mentionné de délimitation inférieure du nombre $\lambda_{0,D,L}$ (que nous désignerons simplement par λ).

Ce procédé suppose remplies les hypothèses suivantes:

Hypothèse H_1. *Quand x parcourt l'intervalle $[0, \infty)$, le point M de coordonnées $\beta_1 = a_1(x)$, $\beta_2 = a_2(x)$ est situé dans un domaine fermé (D),* *borné dans un plan rapporté aux axes* $O\beta_1\beta_2$ *par l'arc* $\widehat{BC_+C}$ *de la courbe d'équation* $\beta_2^2 = P(\beta_1)$ *et par son symétrique* $\widehat{BC_-C}$ *par rapport à l'axe* $O\beta_1$. $P(\beta_1)$ est une fonction donnée, non-négative et à dérivées première et seconde continues dans l'intervalle ouvert (b, c) déterminé par deux racines consécutives b et c de $P(\beta_1)$.

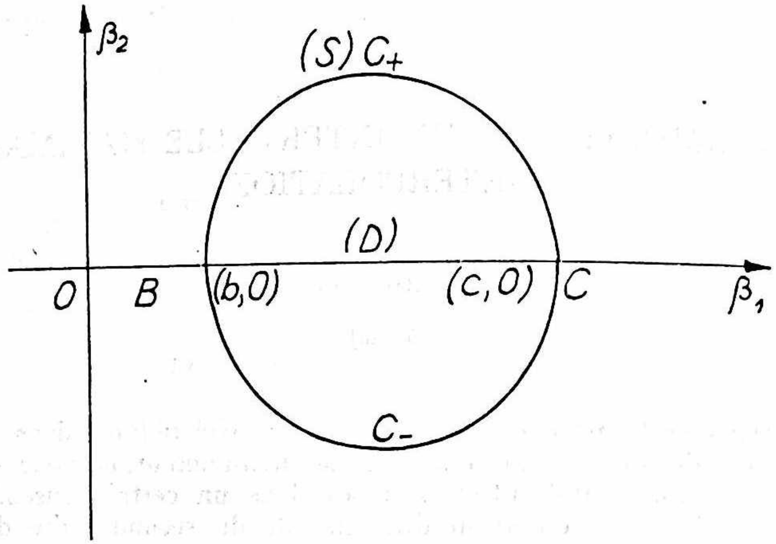

Fig. 1

Hypothèse H_2.

1° *Les fonctions de la variable* α_1

$$(2)\quad \begin{cases} A^-(\alpha_1) = 2\sqrt{P(\alpha_1)}\,[2P(\alpha_1) - \alpha_1 P'(\alpha_1)] - P'^2(\alpha_1) \\ A^+(\alpha_1) = -2\sqrt{P(\alpha_1)}\,[2P(\alpha_1) - \alpha_1 P'(\alpha_1)] - P'^2(\alpha_1) \end{cases}$$

ont chaque dans l'intervalle $[b, c]$ *un nombre fini (au plus) de racines.*

2° *Les fonctions* $A^-(\alpha_1)$ *et* $\frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}} - \frac{l_1}{l_0}$ *n'ont aucune racine commune et les fonctions* $A^+(\alpha_1)$ *et* $\frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}} + \frac{l_1}{l_0}$ *n'ont aucune racine commune (dans l'intervalle* $[b, c]$).

3° *L'une des fonctions* $\frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}} - \frac{l_1}{l_0}$ *ou* $\frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}} + \frac{l_1}{l_0}$ *a au moins une racine dans l'intervalle* $[b, c]$.

Hypothèse H_3. *Les dérivées* $a_1'(x)$ *des coefficients* $a_1(x)$ *de* (1) *jouissent de la propriété que la fonction-limite de toute suite convergente* $\{a'_{1,n}(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *de telles fonctions ne possède pas de point d'accumulation des racines à distance finie, exception faite des intervalles éventuels sur lesquels cette fonction est identiquement nulle.*

Pour formuler l'hypothèse H_4, nous désignerons par $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x))$ la fonction-vecteur minimisante (avec $\alpha_s(x) \in C'(0, \infty)$, $s = 1,2$) c'est-à-dire qui jouit de la propriété que λ est la plus petite racine positive de la fonction $\varphi_{\alpha,L}(x)$. (A. LASOTA et Z. OPIAL, [1]).

Hypothèse H_4. La fonction $\alpha_2(x)$ ne change pas de signe quand x parcourt l'intervalle $[0, \lambda]$.

Pour abréger l'exposition, on entendra sans autre spécification par „racines d'une équation'' les racines de l'équation en question comprises dans l'intervalle ouvert (b, c).

Dans ces conditions, on peut utiliser le procédé suivant pour délimiter inférieurement le nombre λ.

PROCÉDÉ. 1° On désigne par $\rho^- = \{\rho_i^-;\ i \in J^- = 1, 2, \ldots, i^-\}$ l'ensemble des racines de l'équation

$$(3)\quad \frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}} = \frac{l_1}{l_0}$$

On résout les équations $A^-(\alpha_1) = 0$ (de(2)) et

$$(4)\quad \Phi^-(\alpha_1) = \exp\frac{1}{2}\int_{\text{const.}}^{\alpha_1} \frac{P'(s)[2P(s)P''(s) - P'^2(s)]}{P(s)[4P(s)\sqrt{P(s)} - 2sP'(s)\sqrt{P(s)} - P'^2(s)]}\,ds = 0.$$

De la première on ne retient que la plus grande et la plus petite des racines et on désigne par Σ^- l'ensemble des racines des deux équations obtenues de la sorte. A cet ensemble on adjoint le nombre b et on désigne par $\Sigma^{①} = \{\sigma_k^{①};\ k = 1, 2, \ldots, k^{①}\}$ l'ensemble ainsi obtenu. On choisit parmi les paires $(\rho_i^-, \sigma_k^{①})$ fournies par ρ^- et $\Sigma^{①}$ (c'est-à-dire par le produit $\rho^- \times \Sigma^{①}$) celles pour les quelles les trois conditions suivantes sont remplies:

a) $\rho_i^- > \sigma_k^{①}$ b) la fonction

$$(5)\quad G^-(s) = \frac{2P(s)P''(s) - P'^2(s)}{\sqrt{P(s)}\,[4P(s)\sqrt{P(s)} - 2sP'(s)\sqrt{P(s)} - P'^2(s)]}$$

est négative ou nulle pour $\sigma_k^{①} \leq s \leq \rho_i^-$ et c) toute fonction $F^-(s)$ (avec $\frac{d}{ds}F^-(s) = G^-(s)$) reste finie dans cet intervalle. L'ensemble des paires $(\rho_i^-,$

σ_k^{1}) ainsi obtenu est désigné par $\Sigma^{\boxed{1}} = \{(\rho_i^{\boxed{1}}, \sigma_i^{\boxed{1}}) ; i \in J^{\boxed{1}}\}^*$ où $J^{\boxed{1}}$ est ou bien un ensemble vide, ou bien un ensemble d'indices 1, 2, ..., $i^{\boxed{1}}$ et on désigne par $\lambda^{\boxed{1}} = \min\limits_{i \in J^{\boxed{1}}} G^-(\rho_i^{\boxed{1}}, \sigma_i^{\boxed{1}})$, où

(6) $$G^-(\rho, \sigma) = \int_\rho^\sigma G^-(s)\, ds$$

avec $G^-(s)$ donnée par (5).

2° À l'ensemble Σ^- du point 1° on adjoint le nombre c et on désigne par $\Sigma^{2} = \{\sigma_k^{2} ; k = 1, 2, \ldots, k^{2}\}$ l'ensemble ainsi obtenu. On choisit parmi les paires (ρ_i^-, σ_k^{2}) de $\rho^- \times \Sigma^{2}$ celles pour lesquelles les conditions suivantes sont remplies : a) $\rho_i^- < \sigma_k^{2}$; b) $G^-(s) \geq 0$ dans l'intervalle $\rho_i^- \leq s \leq \sigma_k^{2}$ et c) $F^-(s)$ reste finie dans cet intervalle. On désigne par $\Sigma^{\boxed{2}} = \{(\rho_i^{\boxed{2}}, \sigma_i^{\boxed{2}}), i \in J^{\boxed{2}}\}$ l'ensemble des paires obtenues de la sorte et par $\lambda^{\boxed{2}} = \min\limits_{i \in J^{\boxed{2}}} G^-(\rho_i^{\boxed{2}}, \sigma_i^{\boxed{2}})$.

3° On designe par $\rho^+ = \{\rho_i^+ ; i \in J^+ = 1, 2, \ldots, i^+\}$ l'ensemble des racines de l'équation

(7) $$\frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}} = -\frac{l_1}{l_0}.$$

On résout les équations $A^+(\alpha_1) = 0$ de (2) et

(8) $$\Phi^+ p\alpha = \exp \frac{1}{2} \int_{\text{const}}^{\alpha_1} \frac{P'(s)[2P(s)\, P''(s) - P'^2(s)]}{P(s)[-4P(s)\sqrt{P(s)} + 2sP'(s)\sqrt{P(s)} - P'^2(s)]}\, ds = 0.$$

De la première on ne retient que la plus petite et la plus grande des racines et on désigne par Σ^+ l'ensemble des racines des deux équations obtenues de la sorte. À cet ensemble on adjoint le nombre b et un désigne par $\Sigma^{3} = \{\sigma_k^{3} ; k = 1, 2, \ldots, k^{3}\}$ l'ensemble ainsi obtenu. On choisit

* Ici et dans le reste de la note, les nombres écrits en caractères gras désignent un indice d'ordre et non une puissance.

parmi les paires (ρ_i^+, σ_k^{3}) de $\rho^+ \times \Sigma^{3}$ celles pour lesquelles les trois conditions suivantes sont remplies : a) $\rho_i^+ > \sigma_k^{3}$ b) la fonction

(9) $$G^+(s) = \frac{2P(s)\, P''(s) - P'^2(s)}{\sqrt{P(s)}\,[4P(s)\sqrt{P(s)} - 2sP'(s)\sqrt{P(s)} + P'^2(s)]}$$

est négative ou nulle pour $\sigma_k^{3} \leq s \leq \rho_i^+$ et c) toute fonction $F^+(s)$ (avec $\frac{d}{ds}F^+(s) = G^+(s)$) reste finie dans cet intervalle. On désigne par $\Sigma^{\boxed{3}} = \{(\rho_i^{\boxed{3}}, \sigma_i^{\boxed{3}}) ; i \in J^{\boxed{3}}\}$ l'ensemble des paires ainsi obtenues et par $\lambda^{\boxed{3}} = \min\limits_{i \in J^{\boxed{3}}} G^+(\rho_i^{\boxed{3}}, \sigma_i^{\boxed{3}})$ où

(10) $$G^+(\rho, \sigma) = \int_\rho^\sigma G^+(s)\, ds$$

avec $G^+(s)$ donnée par (9).

4° À l'ensemble Σ^+ du point 3° on adjoint le nombre c et on désigne par $\Sigma^{4} = \{\sigma_k^{4} ; k = 1, 2, \ldots, k^{4}\}$ l'ensemble ainsi obtenu. On choisit parmi les paires (ρ_i^+, σ_k^{4}) de $\rho^+ \times \Sigma^{4}$ celles pour lesquelles les trois conditions suivantes sont remplies : a) $\rho_i^+ < \sigma_k^{4}$; b) $G^+(s) \geq 0$ pour $\rho_i^+ \leqslant s \leqslant \sigma_k^{4}$ et c) $F^+(s)$ reste finie dans cet intervalle. On désigne par $\Sigma^{\boxed{4}} = \{(\rho_i^{\boxed{4}}, \sigma_i^{\boxed{4}}) ; i \in J^{\boxed{4}}\}$ l'ensemble des paires obtenues de la sorte et par $\lambda^{\boxed{4}} = \min\limits_{i \in J^{\boxed{4}}} G^+(\rho_i^{\boxed{4}}, \sigma_i^{\boxed{4}})$.

5° On a la délimitation

(11) $$\begin{cases} \text{a) } \lambda \geq \lambda^{\boxed{1}} \text{ ou } \lambda \geq \lambda^{\boxed{2}} \text{ ou } \lambda \geq \lambda^{\boxed{3}} \text{ ou } \lambda \geq \lambda^{\boxed{4}} \text{ donc} \\ \text{b) } \lambda \geq \lambda_0 = \min(\lambda^{\boxed{1}}, \lambda^{\boxed{2}}, \lambda^{\boxed{3}}, \lambda^{\boxed{4}}). \end{cases}$$

§ 2. Nous prendrons dans l'énoncé de l'hypothèse H_1 $P(\beta_1) = \frac{4}{9}\beta_1^2\left(1 - \frac{\beta_1}{\sqrt[4]{3}}\right)$ (donc $b = 0$, $c = \sqrt[4]{3}$) et nous présenterons le

6

THÉORÈME *Si dans les notations du* § **1**, *le domaine* (D) *est limité par la boucle de la cubique d'équation* $\beta_2^2 = \frac{4}{9}\beta_1^2\left(1 - \frac{\beta_1}{\sqrt[4]{3}}\right)$, *alors : si* $\rho = \frac{l_1}{l_0} <$ $< \rho_1 = \frac{\sqrt[4]{3}}{6}\left(\sqrt{3} - 1 + \sqrt{2(4-\sqrt{3})} - 2\sqrt{5 + 3\sqrt{3} + \sqrt{59 + 34\sqrt{3}}}\right)^* <$ $< -\frac{2}{3}$ *on a la délimitation inférieure*

$$\lambda \geqq \lambda^{\boxed{2}} = \frac{3}{2}\int_{\rho^-}^{\sqrt[4]{3}} \frac{-\frac{4}{\sqrt[4]{3}} + \sqrt{3}\,s}{\sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}}\left[\frac{3}{\sqrt[4]{3}}s^2\sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}} - \left(2 - \frac{3s}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\right]}\,ds$$

où

$$\rho^- = \frac{\sqrt[4]{3}}{6}\left(4 - 3\rho^2 - \rho\sqrt{3(4 + 3\rho^2)}\right).$$

Si $\rho > -\frac{2}{3}$, on a

$$\lambda \geqq \lambda^{\boxed{3}} = -\frac{3}{2}\int_0^{\rho^+} \frac{-\frac{4}{\sqrt[4]{3}} + \sqrt{3}\,s}{\sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}}\left[\frac{3}{\sqrt[4]{3}}s^2\sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}} + \left(2 - \frac{3s}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\right]}\,ds,$$

où

$$\rho^+ = \frac{\sqrt[4]{3}}{6}\left[4 - 3\rho^2 + \rho\sqrt{3(4 + 3\rho^2)}\right]$$

Démonstration. Les relations (2) donnent

$$A^-(\alpha_1) = \frac{16}{81}\alpha_1^2\left[\frac{3}{\sqrt[4]{3}}\alpha_1^2\sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}} - \left(2 - \frac{3\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\right]$$

(12) $$A^+(\alpha_1) = -\frac{16}{18}\alpha_1^2\left[\frac{3}{\sqrt[4]{3}}\alpha_1^2\sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}} + \left(2 - \frac{3\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\right]$$

* $\rho_1 \approx -1{,}39$

1

Le domaine (D) est tracé en pointillé dans la fig. 2. La fonction $A^-(\alpha_1)$ de (12) possède les racines

$$\alpha_1 = k_0 = \sqrt[4]{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \text{ et } \alpha_1 = k_1 = \sqrt[4]{3}\left(1 - \frac{\delta_1^2}{\sqrt{3}}\right), \text{ avec}$$

(13) $$\delta_1 = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{2(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}})}\right] < 1.$$

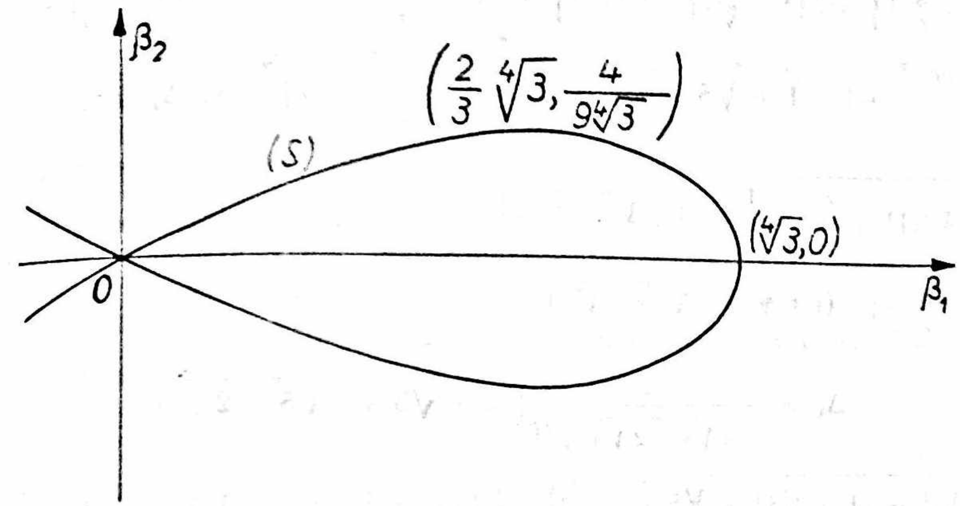

Fig. 2

1° L'équation (3) s'écrit $2 - \frac{3}{\sqrt[4]{3}}\alpha_1 = 3\rho\sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}}$ $\left(\text{avec } \rho = \frac{l_1}{l_0}\right)$ et admet la (seule) racine

(14) $$\alpha_1 = \rho^- = \frac{\sqrt[4]{3}}{6}\left(4 - 3\rho^2 - \rho\sqrt{3(4 + 3\rho^2)}\right)$$

ρ	$-\infty$		ρ_1		ρ_0		$\frac{2}{3}$		∞
ρ^-	$\sqrt[4]{3}$	↘	k_1	↘	k_0	↘	0	↘	$-\infty$

Tableau 1

La formule (4) donne

$$\Phi^-(\alpha_1) = \exp\frac{1}{2}\int_{\text{const.}}^{\alpha_1} \frac{\left(2 - \frac{3s}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(-\frac{4}{\sqrt[4]{3}} + \sqrt{3}\,s\right)}{\left(1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}\right)\left[\frac{3}{\sqrt[4]{3}}s^2\sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}} - \left(2 - \frac{3s}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\right]}\,ds$$

À l'aide du changement $x = \sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}\right)}$ on en déduit

$$\Phi^{-}(\alpha_1) = \text{const.} \sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)}\left(\sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)} - 1\right)^{-(2-\sqrt{3})} \times$$

$$\times \left(\sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)} - \delta_1\right)^{\Delta_1}\left(\sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)} - \delta_2\right)^{\Delta_2}\left(\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)\sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)} + 1\right)^{\Delta_3} \exp \Delta_4 \operatorname{arctg}$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)} + \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[-(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right]}}$$ où $\delta_2 = \frac{1}{\delta_1}$ avec δ_1 donnée par (13) et

$$\Delta_1 = -\frac{1}{4\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} {}_{\textcircled{1}}\left[\left(6 + \sqrt{3} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \sqrt{2\left[-(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right]} + (\sqrt{3} - 1)\left(-\sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)\right]_{\textcircled{1}} < 0$$

La valeur des constantes Δ_2, Δ_3, Δ_4 n'intéresse pas, attendu que la fonction $\sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)} - \delta_2$ ne s'annule pas dans l'intervalle $[0, \sqrt[4]{3}]$ Il en résulte que l'équation (4) n'a pas de racines.

L'ensemble ρ^{-} est donc composé du nombre ρ^{-} de (14), au cas où $\rho^{-} \in (0, \sqrt[4]{3})$ (au cas contraire, cet ensemble est vide), l'ensemble Σ^{-} des nombres k_0 et k_1 de (13), et l'ensemble $\Sigma^{\textcircled{1}}$ des nombres 0, k_0 et k_1.

Or, (5) donne

$$G^{-}(s) = \frac{3}{2} \frac{-\frac{4}{\sqrt[4]{3}} + \sqrt{3}\, s}{\sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}}\left[\frac{3s^2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}} - \left(2 - \frac{3s}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\right]} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\left(-\frac{4}{\sqrt[4]{3}} + \sqrt{3}\, s\right)\left[\frac{3}{\sqrt[4]{3}} s^2 \sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}} + \left(2 - \frac{3s}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\right]}{\sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}}\left[\frac{9s^4}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}\right) - \left(2 - \frac{3s}{\sqrt[4]{3}}\right)^4\right]}. \tag{15}$$

Il en résulte qu'une paire de la forme (ρ^{-}, k_0) ou (ρ^{-}, k_1) ne remplit pas la condition c) du point 1° du procédé (les pôles k_0 ou k_1, de la fonction $G^{-}(s)$ étant d'ordre 1). D'ailleurs si l'on avait par ex. $\alpha_1 = \delta_0$, on déduirait de la relation (12_1) de [1], c'est-à-dire $X'(\alpha_1) = G(\alpha_1)$ que $\alpha_1'(x_0) = 0$ et $\alpha_1(x_0) = \delta_0 = \sqrt{3}$, ce qui ne peut avoir lieu, vu que le point $(\alpha_1(x), \alpha_2(x))$ est pour $x \in [0, \lambda]$ sur la boucle (S) de la fig. 2. La paire $(\rho^{-}, 0)$ ne remplit pas la condition b) du point 1° vu que la condition c) exige que $\rho^{-} < k_0$ et que pour $s \in [0, \rho^{-}]$ on a $-\frac{4}{\sqrt[4]{3}} + s < 0$, vu que $s \leqq \rho^{-} < \sqrt[4]{3} < \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt[4]{3}}$ et la condition b) $\rho^{-} \leqq \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt[4]{3}}$ *, auquel cas pour $s \in [0, \rho^{-}]$ on a $G^{-}(s) \geqq 0$.

L'ensemble $\Sigma^{\boxed{1}}$ est donc vide.

2° L'ensemble $\Sigma^{\textcircled{2}}$ est constitué par les nombres k_0, k_1 et $\sqrt[4]{3}$. Les paires (ρ^{-}, k_0) et (ρ^{-}, k_1) ne remplissent pas la condition c) du point 2°. La paire $(\rho^{-}, \sqrt[4]{3})$ remplit les conditions a) b) et c) de ce point si (et seulement si) $\rho^{-} > K_1$, donc (tableau 1) $\rho < \rho_1$. À cette condition l'ensemble $\Sigma^{\boxed{2}}$ est constitué par la paire $(\rho^{-}, \sqrt[4]{3})$ et

$$\lambda^{\boxed{2}} = G^{-}(\rho^{-}, \sqrt[4]{3}) = \int_{\rho^{-}}^{\sqrt[4]{3}} G^{-}(s)\, ds \tag{16}$$

avec $G^{-}(s)$ donnée par (15). Si $\rho \geqq \rho_1$ (tableau 1) l'ensemble $\Sigma^{\boxed{2}}$ est vide.

3° L'équation (7) s'écrit $2 - \frac{3\alpha_1}{\sqrt[4]{3}} = -3\sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}}$, et admet la (seule) racine

$$\alpha_1 = \rho^{+} = \frac{\sqrt[4]{3}}{6}\left(4 - 3\rho^2 + \rho\sqrt{3(4 + 3\rho^2)}\right). \tag{17}$$

La relation (8) donne

$$\Phi^{+}(\alpha_1) = \exp \frac{1}{2} \int_{\text{const.}}^{\alpha_1} \frac{\left(2 - \frac{3s}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(\frac{4}{\sqrt[4]{3}} - \sqrt{3}\, s\right)}{\left(1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}\right)\left[\frac{3}{\sqrt[4]{3}} s^2 \sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}} + \left(2 - \frac{3s}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\right]}\, ds.$$

* au cas contraire le numérateur de $G^{-}(s)$ de (15) changerait de signe dans l'intervalle $(0, \rho^{-})$.

À l'aide du changement $x = \sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}\right)}$ on en déduit

$$\Phi^+(\alpha_1) = \text{const.} \sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}}\left(\sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)} + 1\right)^{-(2-\sqrt{3})} \cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)} + \delta_5\right)^{\Delta_5}\left(\sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)} + \delta_6\right)^{\Delta_6}\left[\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)\sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)} + 1\right]^{\Delta_7} \times$$

$$\times \exp \Delta_8 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt[4]{3}}\right)} + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[-(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right]}}.$$

Vu que l'on voit de suite que $\delta_5 > 0$, $\delta_6 > 0$, il s'ensuit que la fonction $\Phi^+(\alpha_1)$ n'a aucune racine. L'ensemble ρ^+ est donc composé du nombre ρ^+ de (17), au cas où $\rho^+ \in (0, \sqrt[4]{3})$ (au cas contraire, cet ensemble est vide), l'ensemble Σ^+ est vide et l'ensemble Σ^{3} est composé du nombre 0.

La relation (9) donne

$$G^+(s) = \frac{3}{2}\,\frac{-\frac{4}{\sqrt[4]{3}} + \sqrt{3}\,s}{\sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}}\left[\frac{3s^2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}} + \left(2 - \frac{3s}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\right]}. \tag{18}$$

ρ	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		∞
ρ^+	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[4]{3}$

Tableau 2

La paire $(\rho^+, 0)$ remplit les conditions a), b) et c) du point 3° du procédé. L'ensemble $\Sigma^{\boxed{3}}$ est donc, si $\rho^+ > 0$, c'est-à-dire, conformément au tableau 2, si $\rho > -\frac{2}{3}$, composé de cette paire et

$$\lambda^{\boxed{3}} = G^+(\rho^+, 0) = \int_{\rho^+}^{0} G^+(s)\,ds, \tag{19}$$

avec $G^+(s)$ donnée par (18).

Si au contraire $\rho \leqq -\frac{2}{3}$, l'ensemble $\Sigma^{\boxed{3}}$ est vide.

4° L'ensemble Σ^{4} est constitué du nombre $\sqrt[4]{3}$. La paire $(\rho^+, \sqrt[4]{3})$ ne vérifie pas la condition b) du point 4°. L'ensemble $\Sigma^{\boxed{4}}$ est donc vide.

Il est facile de voir que dans (14) et (13) $\rho^-\left(-\frac{2}{3}\right) < k_1$, donc qu'au tableau 1, $\rho_1 < -\frac{2}{3}$. Les mêmes relations donnent d'ailleurs $\rho_1 = \frac{\sqrt[4]{3}}{6}\left(\sqrt{3} - 1 + \sqrt{2(4 - \sqrt{3})} - 2\sqrt{5 + 3\sqrt{3} + \sqrt{59 + 34\sqrt{3}}}\right)$. Si donc $\rho < \rho_1$, (11) donne $\lambda \geqq \lambda^{\boxed{2}}$ avec $\lambda^{\boxed{2}}$ donné par (16) ; si $\rho > -\frac{2}{3}$, (11) donne $\lambda \geqq \lambda^{\boxed{3}}$, avec $\lambda^{\boxed{3}}$ donné par (19), ce qui démontre le théorème.

Remarques. **1.** On peut facilement déduire les expressions (16) et (19) de $\lambda^{\boxed{2}}$ et $\lambda^{\boxed{3}}$.

À cet effet, on fera en (16) le changement de variables $s = S(x) = \sqrt[4]{3}\left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)$ et on en tirera $x = X(s) = \sqrt[4]{3}\sqrt{1 - \frac{s}{\sqrt[4]{3}}}$ de sorte que quand x décroit de $X(\rho^-) = x^-$ à $X(\sqrt[4]{3}) = 0$, s croît de $S(X(\rho^-)) = \rho^-$ à $S(X(\sqrt[4]{3})) = \sqrt[4]{3}$. Or, l'équation écrite au dessus de (14) et (14)-elle-même donnent $x^- = \frac{\sqrt[4]{3}}{6}\left(3\rho + \sqrt{3(4 + 3\rho^2)}\right)$. Par conséquent (16) s'écrit

$$\lambda^{\boxed{2}} = 3^{\frac{3}{4}} \int_0^{x^-} \frac{1 + \sqrt{3}\,x^2}{(1 - x)\left[1 + \left(-1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)x + x^2\right]\left[1 - \left(1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)x + x^2\right]}\,dx =$$

$$= 3^{\frac{3}{4}}\left[F^{\boxed{2}}(x^-) - F^{\boxed{2}}(0)\right], \text{ avec}$$

$$F^{\boxed{2}}(x) = \frac{2 - \sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}{8\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}\sqrt{2\left[-(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right]} \times$$

$$\times \log\left|\frac{x - \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{2\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)}\right]}{x - \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{2\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)}\right]}\right| +$$

$$+ \frac{1 + \sqrt{3}}{8\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} \log \frac{1 + \left(-1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)x + x^2}{\left|1 - \left(1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)x + x^2\right|} +$$

$$+\frac{-1+\sqrt{3}}{8}\log\frac{(1-x)^4}{|1-2x-2(1+\sqrt{3})\,x^2-2x^3+x^4|}+$$

$$+\left(-2+\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)}}{4\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\times$$

$$\times\operatorname{arctg}\sqrt{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)}\left[x+\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)\right].$$

On obtient de la même manière de (19), (18) et (17).

$$\lambda^{\boxed{3}}=3^{\frac{3}{4}}\int_{x^+}^{\sqrt[4]{3}}\frac{1+\sqrt{3}\,x^2}{(1+x)\left[1+\left(1-\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)x+x^2\right]\left[1+\left(1+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)x+x^2\right]}dx=$$

$$=3^{\frac{3}{4}}\left[F^{\boxed{3}}(\sqrt[4]{3})-F^{\boxed{3}}(x^+)\right], \tag{20}$$

avec

$$x^+=\frac{\sqrt[4]{3}}{6}\left[-3\rho+\sqrt{3(4+3\rho^2)}\right]$$

et

$$F^{\boxed{3}}(x)=\frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{8\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\sqrt{2\left[-(1+\sqrt{3})+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right]}\times$$

$$\times\log\left|\frac{x+\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{5+2\sqrt{3}}-\sqrt{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)}\right]}{x+\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{5+2\sqrt{3}}+\sqrt{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)}\right]}\right|+$$

$$+\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\log\frac{\left|1+\left(1+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)x+x^2\right|}{1+\left(1-\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)x+x^2}-$$

$$-\frac{-1+\sqrt{3}}{8}\log\frac{(1+x)^4}{|1+2x-2(1+\sqrt{3})\,x^2+2x^3+x^4|}+$$

$$+\left(-2+\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)}}{4\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\times$$

$$\times\operatorname{arctg}\sqrt{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)}\left[x-\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)\right].$$

2. L'intervalle fermé $[0, \lambda]$ est un intervalle d'interpolation commun à *toutes* les équations (1) dont la fonction vecteur a appartient à l'ensemble $\mathfrak{A}$ défini au 1°. En effet, en vertu du théorème de Sturm, toute solution d'une équation (1) quelconque (pour laquelle la fonction-vecteur $a \in \mathfrak{A}$) admet au plus une racine dans l'intervalle $[0, \lambda]$, donc en vertu d'un résultat élémentaire bien connu, cet intervalle est un intervalle d'interpolation pour l'équation (1) (c'est-à-dire, pour rappeler la définition bien connue, de quelque manière que l'on prenne les noeuds x_1 et x_2 dans $[0, \lambda]$ et les nombres y_1 et y_2, il existe une solution $\bar{y}(x)$, et une seule, de l'équation (1), telle que $\bar{y}(x_1) = y_1$ et $\bar{y}(x_2) = y_2$). Il se peut que des équations particulières prises dans la classe considérée admettent des intervalles d'interpolation de la forme $[0, \bar{\lambda}]$ avec $\bar{\lambda} > \lambda$, ou même qu'il y ait un intervalle d'interpolation $[0, \bar{\lambda}]$ commun à toutes les équations (1) de la classe considérée avec $\bar{\lambda} > \lambda$. Il serait peut-être intéressant de présenter les conditions relatives à la classe $\mathfrak{A}$ dans lesquelles l'intervalle $[0, \lambda]$ est le plus grand intervalle d'interpolation (à origine zéro) commun à toutes les équations (1) de la classe envisagée au premier paragraphe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lasota A. et Opial Z., *L'application du principe de Pontrjaguine à l'évaluation de l'intervalle d'existence et d'unicité des solutions d'un problème aux limites*, Bulletin de l'Académie Polonaise des sciences. Série des sciences Math., astr. et phys. XI., 2, 41–46 (1963).

[2] Ripianu D., *Sur le probléme bilocal relatif aux équations différentielles du second ordre*, Mathematica, **11**, (3), 2, 329–353 (1969).

Reçu le 6. XII. 1969.