

SUR UN ESPACE QUOTIENT*)

par

PETRU PETRIȘOR

à Cluj

Dans cet ouvrage on continue l'étude d'une relation d'ordre définie sur $\mathfrak{A}(X)$, où X est un ensemble arbitraire, introduite en [6]. Dans les ouvrages [4] et [6] on a mis en évidence plusieurs propriétés de cette relation d'ordre, en prouvant que l'élément primitif (fondamental) de quelques problèmes de nature très variée est l'opérateur $\mathfrak{F}_e$. Dans cette note on prouve en employant l'opérateur $\mathfrak{F}_e$, l'existence d'une relation d'équivalence Σ sur l'espace $\mathfrak{S}_R(X)$ et puis on montre que les espaces $\mathcal{C}_R(X)$ et $\mathcal{C}_R(X)/\Sigma$ ont les espaces de mesures topologiquement équivalents.

Soit X un ensemble quelconque, $\mathfrak{A}(X)$ la famille des sous-ensembles de X , $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux sous-familles de la famille $\mathfrak{A}(X)$. Par $\mathfrak{F}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ on comprend la famille des sous-ensembles de X définie par :

$$\mathfrak{F}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \{Y : \exists_{A \neq \emptyset, A \in \mathcal{A}} Y \cap A \in \mathfrak{B}\}.$$

Si $\mathcal{A} = \mathfrak{B}$, alors $\mathfrak{F}_e(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ sera noté avec $\mathfrak{F}_e(\mathcal{A})$.

On notera avec Ω la famille filtrante de σ -anneaux définis sur X et avec $\mathfrak{F}_\Omega$ la famille des σ -anneaux $\mathcal{A}$ ayant la propriété : $\mathfrak{F}_e(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Définition 1. Soient $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ deux sous-ensembles de l'ensemble X . On dira que $A <_\Omega B$ si et seulement s'il existe $\mathfrak{s} \in \Omega$ tel que $B - A \in \mathfrak{s} \cap \mathcal{A}$, où $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}_\Omega$.

*) Présentée à la session des jeunes mathématiciens organisée par l'Institut de Calcul Mai, 1968.

La relation d'ordre introduite par la définition 1 possède les propriétés suivantes:

- (1) $\emptyset <_{\Omega} \emptyset$ et $X <_{\Omega} X$
 (2) Si $A \subset A' <_{\Omega} B' \subset B$, alors $A <_{\Omega} B$.

Pour vérifier la propriété 2 on compte sur la définition précédente. Puisque $A' <_{\Omega} B'$ il résulte qu'il existe $\mathfrak{s} \in \Omega$ tel que

$$B' - A' \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{a}$$

où $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}$. De $A \subset A'$ on trouve: $A \cap (B' - A') = \emptyset \in \mathfrak{a}$ et donc $A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a})$. De $A \cap (B - A) = \emptyset$ il résulte que $B - A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. De $B' - A' \in \mathfrak{s}$, $B' - A' \subset B - A$ et $B' - A' = (B' - A') \cap (B - A)$ il résulte que $B - A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{s})$ et donc $B - A \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{s})$. La famille $\mathfrak{s}$ étant un σ -anneau on déduit que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{s})$ est un σ -anneau et de là $A <_{\Omega} B$.

- (3) Si $A <_{\Omega} A_1$ et $B <_{\Omega} B_1$, alors $A \cup B <_{\Omega} A_1 \cup B_1$ et $A \cap B <_{\Omega} A_1 \cap B_1$.

Cette propriété se démontre de la manière suivante: de $A <_{\Omega} A_1$ et $B <_{\Omega} B_1$ il résulte l'existence de deux σ -anneaux $\mathfrak{s}'$ et $\mathfrak{s}''$ de la famille Ω tels que $A_1 - A \in \mathfrak{s}' \cap \mathfrak{a}$ et $B_1 - B \in \mathfrak{s}'' \cap \mathfrak{a}$. On a l'égalité:

$$(A_1 \cup B_1) - (A \cup B) = [(A_1 - A) \cup \emptyset B] \cup [(B_1 - B) \cap \emptyset A]$$

De $A \cap (A_1 - A) = \emptyset$ il résulte que $A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}'}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}'}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ et de

$$A \cap [(A_1 - A) \cap \emptyset B] = \emptyset$$

on déduit que $(A_1 - A) \cap \emptyset B \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}'}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$.

D'une manière analogue on trouve que $(B_1 - B) \cap \emptyset A \in \mathfrak{a}$.

De $A \cap [(A_1 - A) \cap \emptyset B] = \emptyset \in \mathfrak{s}'$ il résulte que $(A_1 - A) \cap \emptyset B \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}'}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s}')$ et de $B \cap (B_1 - B) \cap \emptyset A = \emptyset \in \mathfrak{s}''$ on déduit que $(B_1 - B) \cap \emptyset A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}''}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s}'')$. De l'égalité $\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}'}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s}') \cup \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}''}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s}'') = \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s}' \cup \mathfrak{s}'')$ et du fait que Ω est une famille filtrante il résulte que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s}' \cup \mathfrak{s}'')$ est un σ -anneau. Donc $A \cup B <_{\Omega} A_1 \cup B_1$.

On prouvera maintenant que $A \cap B <_{\Omega} A_1 \cap B_1$.

Puisque $A_1 - A \in \mathfrak{a}$, $B_1 - B \in \mathfrak{a}$, $A \cap (A_1 - A) = B \cap (B_1 - B) = \emptyset$ il résulte que $A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a})$ et $B \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a})$. De $A \cap (A_1 - A) \cap B_1 = \emptyset$ on déduit que l'ensemble $(A_1 - A) \cap B_1$ doit appartenir à la famille $\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, puisque $A \in \mathfrak{a}$. De

$$B \cap [(B_1 - B) \cap A] = \emptyset$$

on déduit que $(B_1 - B) \cap A_1 \in \mathfrak{a}$, puisque $B \in \mathfrak{a}$. En utilisant l'égalité

$$(A_1 \cap B_1) - (A \cap B) = [(A_1 - A) \cap B_1] \cup (B_1 - B) \cap A_1$$

et les résultats précédents on trouve que l'ensemble $(A_1 \cap B_1) - (A \cap B)$ doit appartenir à la famille $\mathfrak{a}$. De

$$(A_1 - A) \cap B \in \mathfrak{a} \quad A \cap [(A_1 - A) \cap B_1] = \emptyset \in \mathfrak{s}'$$

il résulte que l'ensemble $(A_1 - A) \cap B_1$ doit appartenir à la famille $\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}'}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s}')$. D'une manière analogue on a: $(B_1 - B) \cap A_1 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}''}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s}'')$. Donc:

$$(A_1 \cap B_1) - (A \cap B) \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s}' \cup \mathfrak{s}'')$$

et de là on déduit: $A \cap B <_{\Omega} A_1 \cap B_1$.

- (4) Si pour tout $\alpha \in \Gamma$ on a $A_{\alpha} <_{\Omega} B_{\alpha}$, alors $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_{\alpha} <_{\Omega} \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_{\alpha}$.

En effet, si $A_{\alpha} <_{\Omega} B_{\alpha}$, alors il en résulte l'existence d'un σ -anneau $\mathfrak{s}_{\alpha} \in \Omega$ tel que $B_{\alpha} - A_{\alpha} \in \mathfrak{s}_{\alpha} \cap \mathfrak{a}$. L'égalité:

$$A_{\alpha} \cap (B_{\alpha} - A_{\alpha}) = \emptyset \in \mathfrak{a}$$

montre qu'on a $A_{\alpha} \in \mathfrak{a}$ et l'égalité:

$$A_{\alpha} \cap [B_{\alpha} \cap (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \emptyset A_{\alpha})] = \emptyset$$

nous montre qu'on a $B_{\alpha} \cap (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \emptyset A_{\alpha}) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. De l'égalité:

$$B_{\alpha} \cap (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \emptyset A_{\alpha}) = (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} [B_{\alpha} \cap (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \emptyset A_{\alpha})]) \cap [B_{\alpha} \cap (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \emptyset A_{\alpha})]$$

il résulte que l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} [B_{\alpha} \cap (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \emptyset A_{\alpha})]$ doit appartenir à la famille

$\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, c'est-à-dire que l'ensemble doit appartenir à la famille $\mathfrak{a}$.

Du fait que $B_{\alpha} - A_{\alpha} = (B_{\alpha} - A_{\alpha}) \cap [\bigcup_{\alpha \in \Gamma} (B_{\alpha} - A_{\alpha})]$ et $B_{\alpha} - A_{\alpha} \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{a})$ il résulte que l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} (B_{\alpha} - A_{\alpha})$ doit appartenir à la famille $\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{s}_{\alpha})$, c'est-à-dire $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} (B_{\alpha} - A_{\alpha}) \in \mathfrak{s} = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{s}_{\alpha})$. Puisque l'ensemble

$B_{\alpha} - A_{\alpha}$ appartient à la famille $\mathfrak{s}_{\alpha}$ et les ensembles A_{α} et $B_{\alpha} - A_{\alpha}$ sont

disjoints, il résulte que $A_\alpha \in \mathcal{F}_e(\mathcal{S}_\alpha)$ et donc $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \mathcal{F}_e(\mathcal{S}_\alpha)$, c'est-à-dire $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \mathcal{S}$.
L'égalité:

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha - \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \left[\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right] \cap \left[\bigcup_{\alpha \in \Gamma} (B_\alpha - A_\alpha) \right]$$

et les résultats précédents montrent que nous avons la relation:

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha - \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \mathcal{S}$$

c'est-à-dire $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha <_\Omega \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$.

(5) Si pour tout $\alpha \in \Gamma$ on a $A_\alpha <_\Omega B_\alpha$, alors $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha <_\Omega \bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$.

En effet, si $A_\alpha <_\Omega B_\alpha$, alors il en résulte l'existence d'un σ -anneau $\mathcal{S}_\alpha \in \Omega$ tel que $B_\alpha - A_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha \cap \mathcal{A}$, où $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}_\alpha}$. Puisque les ensembles A_α et $B_\alpha - A_\alpha$ sont disjoints il en résulte que $A_\alpha \in \mathcal{F}_e(\mathcal{A})$ et de $A_\alpha \cap \left[\left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \right) \cap \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right] = \emptyset$ on déduit que l'ensemble $\left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \right) \cap \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ doit appartenir à la famille $\mathcal{F}_e(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Cette égalité montre que l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \right) \cap \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ appartient à $\mathcal{A}$. L'opérateur $\mathcal{F}_e$ est idempotent et donc $B_\alpha \in \mathcal{F}_e(\mathcal{S}_\alpha)$ ce qui montre que $B_\alpha \in \mathcal{F}_e(\bigcup \mathcal{S}_\alpha) = \mathcal{S}$. On définit $\mathcal{F}_e''(\mathcal{S})$ par:

$$\mathcal{F}_e''(\mathcal{S}) = \{Y : \exists_{A \neq \emptyset, A \in \mathcal{S}} A \cap Y = \emptyset\}$$

et on prouve que $\mathcal{F}_e''(\mathcal{S})$ est un σ -anneau.

En effet, si Y_1 et Y_2 appartiennent à $\mathcal{F}_e''(\mathcal{S})$, alors il existe les ensembles $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset$ de $\mathcal{A}$ tels que $Y_1 \cap A_1 = Y_2 \cap A_2 = \emptyset$. Nous avons:

$$(Y_1 - Y_2) \cap (A_1 - A_2) = (Y_1 \cap A_1) \cap \mathcal{C}(Y_2 \cup Y_1) = \emptyset.$$

et $\mathcal{S}$ étant un σ -anneau il résulte que $Y_1 - Y_2 \in \mathcal{F}_e''(\mathcal{S})$. Soit $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ une famille dénombrable d'ensembles $Y_n \in \mathcal{F}_e''(\mathcal{S})$. De la définition de l'opérateur $\mathcal{F}_e''$ il résulte qu'il existe l'ensemble $A_{m_n} \in \mathcal{S}$ tel que $Y_n \cap A_{m_n} = \emptyset$. De la relation:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Y_n \cap A_{m_n}) = \emptyset$$

et du fait que $\mathcal{S}$ est un σ -anneau on déduit que l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ appartient à la famille $\mathcal{F}_e''(\mathcal{S})$.

Puisque $X \in \mathcal{S}$ on déduit que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}_e''(\mathcal{S})$ et donc $B_\alpha \in \mathcal{F}_e''(\mathcal{S})$. De la définition de l'opérateur $\mathcal{F}_e''$ il résulte la condition:

$$\exists_{S_\alpha \neq \emptyset, S_\alpha \in \mathcal{S}} B_\alpha \cap S_\alpha = \emptyset$$

et de l'inclusion $S_\alpha \cap \left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \right) \subseteq S_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$ on déduit que:

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \in \mathcal{F}_e''(\mathcal{S}).$$

L'ensemble $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} (B_\alpha - A_\alpha)$ appartient à la famille $\mathcal{S}$ et de l'égalité:

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha - \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (B_\alpha - A_\alpha) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \right)$$

il résulte que $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha - \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \mathcal{S} \cap \mathcal{F}_e''(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, c'est-à-dire $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha <_\Omega \bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$.

(6) Si $A <_\Omega B$, alors il existe un ensemble C que $A <_\Omega C <_\Omega B$.

Pour démontrer cette propriété on désignera par T l'ensemble

$$\{Y : Y <_\Omega B\}.$$

Puisque $A \in T$ il résulte que $T \neq \emptyset$. Soit $T' = \{Y_\alpha : \alpha \in \Gamma\} \subset T$ totalement ordonnée par inclusion et $Y = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} Y_\alpha$. De la définition de l'ensemble

T il résulte qu'il existe un σ -anneau $\mathcal{S}_\alpha$ tel que $B - Y_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha \cap \mathcal{A}$, où $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}_\alpha}$. Les ensembles Y_α et $B - Y_\alpha$ étant disjoints on déduit que $Y \in \mathcal{F}_e(\mathcal{S}_\alpha)$, c'est-à-dire $Y \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{F}_e(\mathcal{S}_\alpha) = \mathcal{S}$. De $Y \in \mathcal{F}_e''(\mathcal{S})$ et $Y - Y_\alpha \subseteq Y$ on déduit que $Y - Y_\alpha \in \mathcal{F}_e(\mathcal{S})$. Du fait que $B - Y_\alpha \in \mathcal{A}$ il résulte:

$Y_\alpha \in \mathcal{A} = \mathcal{F}_e(\mathcal{A})$ et de $Y_\alpha \subseteq Y$ on déduit que l'ensemble Y appartient à la famille $\mathcal{A}$, c'est-à-dire:

$$Y_\alpha <_\Omega Y, \alpha \in \Gamma$$

et donc T est inductivement ordonné. En utilisant le lemme de Zorn il résulte que T contient un élément maximal C , c'est-à-dire $A <_\Omega C <_\Omega B$.

(7) Si $A_\alpha <_\Omega B (\alpha \in \Gamma)$, alors $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha <_\Omega B$.

En effet, si $A_\alpha <_\Omega B$ alors il existe un σ -anneau $\mathfrak{S}_\alpha$ tel que:

$$B - A_\alpha \in \mathfrak{S}_\alpha \cap \mathcal{A}$$

et donc $A_\alpha \in \mathfrak{F}_e(\mathfrak{S}_\alpha)$. Puisque $A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ il résulte que:

$$\bigvee_{\alpha \in \Gamma} \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \mathfrak{F}_e(\mathfrak{S}_\alpha)$$

et donc $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{F}_e(\mathfrak{S}_\alpha) = \mathfrak{S}$.

L'égalité:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right) \cap \left(B - \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right) = \emptyset \in \mathfrak{S}.$$

conduit à $B - \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \mathfrak{F}_e(\mathfrak{S})$.

D'une manière analogue on trouve que $B - \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \mathcal{A}$ et donc $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha <_\Omega B$.

(8) Si $A <_\Omega B$, alors $X - B <_\Omega X - A$.

Cette propriété résulte de l'égalité: $(X - A) - (X - B) = B - A$ et du fait que $A <_\Omega B$.

Définition 2. On dit qu'un ensemble A est Ω -équivalent à un ensemble B , $A \stackrel{\Omega}{=} B$, si et seulement si $A <_\Omega B$ et $B <_\Omega A$.

Soit $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une mesure définie sur le σ -anneau $\mathcal{A}$, $\mathfrak{F}_e(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S} \subset \mathcal{A}$ un σ -anneau et β_μ la partie absolument continue de la mesure μ par rapport au σ -anneau $\mathfrak{S}$ (écriture: $\beta_\mu \ll \mathfrak{S}$). De la définition de la mesure β_μ on trouve:

$$\bigvee_{A \in \mathcal{A}} \bigvee_{B \in \mathfrak{S}} \beta_\mu(A) = \mu(A - B)$$

et B peut être remplacée par n'importe quel ensemble $B' \in \mathfrak{S}$ tel que $B' \supset B$. La relation précédente peut être écrite de la manière suivante:

$$(1) \quad \beta_\mu(\chi_A) = \mu(\chi_{A-B})$$

et donc $\beta_\mu(z) = \mu(z')$, où $z = \sum_{j=1}^q a_j \chi_{A_j}$, $z' = \sum_{j=1}^q a_j \chi_{A_j-B}$.

Ici B_j est un ensemble tel que:

$$\beta_\mu(\chi_{A_j}) = \mu(A_j - B_j).$$

Soit $D_j \supset B_j$, $D_j \in \mathfrak{S}$ et $z'' = \sum_{j=1}^q a_j \chi_{A_j - D_j}$. De la définition de la mesure β_μ il résulte: $\beta_\mu(z) = \mu(z') = \mu(z'')$. En particulier pour $a_k = 0$, $k \neq j$ on déduit l'égalité: $\mu(A_j - B_j) = \mu(A_j - D_j)$ et $A_j - D_j \subseteq A_j - B_j$, qui montre que l'ensemble $(A_j - B_j) - (A_j - D_j)$ appartient à la famille $\mathfrak{N}^\mu(\mathcal{A})$ (la famille des sous-ensembles de X mesurables par rapport à la mesure μ), puisque:

$$\mu((A_j - B_j) - (A_j - D_j)) = \mu(A_j - B_j) - \mu(A_j - D_j) = 0.$$

De $B_j \in \mathfrak{S}$ et $B_j \cap (A_j - B_j) = \emptyset$ il résulte que $A_j - B_j \in \mathfrak{F}_e(\mathfrak{S})$. L'ensemble $A_j - D_j$ appartient à la famille $\mathfrak{F}_e(\mathfrak{S})$ et $\mathfrak{F}_e(\mathfrak{S})$ étant un σ -anneau on déduit que $(A_j - B_j) - (A_j - D_j) \in \mathfrak{F}_e(\mathfrak{S})$. Des résultats antérieurs on déduit:

$$(A_j - B_j) - (A_j - D_j) \in \mathfrak{N}^\mu(\mathcal{A}) \cap \mathfrak{F}_e(\mathfrak{S}).$$

La famille $\mathfrak{N}^\mu(\mathcal{A})$ appartient à $\mathfrak{F}_e$ puisque $\mathfrak{F}_e[\mathfrak{N}^\mu(\mathcal{A})] = \mathfrak{N}^\mu(\mathcal{A})$ et du résultats antérieur on déduit:

$$A_j - D_j \stackrel{\Omega}{=} A_j - B_j$$

La relation obtenue et la propriété (4) montre que la condition:

$$\text{supp}(z) \stackrel{\Omega}{=} \text{supp}(z')$$

est remplie.

Définition 3. Les fonctions z et z' s'appellent équivalentes si et seulement si $\text{supp}(z) \stackrel{\Omega}{=} \text{supp}(z')$.

Soit $\mathcal{C}_\mathbb{R}(X)$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur X . Des résultats antérieurs on déduit:

$$\bigvee_{f \in \mathcal{C}_\mathbb{R}(X)} \bigvee_{q_f \in \mathcal{C}_\mathbb{R}(X), q_f \leq f} \beta_\mu(f) = \mu(q_f).$$

La famille des fonctions q_f telles que $\beta_\mu(f) = \mu(q_f)$ pour f fixe, forme une classe d'équivalence. Cette classe d'équivalence s'appelle la classe d'équivalence de l'élément f générée par la mesure μ . Soit Σ^μ cette relation d'équivalence et $\mathfrak{S}_\mathbb{R}(X)$ l'espace des fonctions $z =$

$= \sum_{j=1}^q a_j \chi_{A_j}$ où $A_j \in \mathcal{A}$ et $a_j \in \mathbb{R}$. La trace la relation Σ^μ sur $\mathcal{E}_\mathbb{R}(X)$ sera désignée par T^μ . On définit l'application :

$$g_\mu : \mathcal{E}_\mathbb{R}(X) \rightarrow \mathcal{E}_\mathbb{R}(X)/T^\mu$$

par $g_\mu(z) = [z']$, où $[z']$ est la classe d'équivalence de l'élément z générée par la mesure μ .

THÉORÈME 1. *L'application g_μ est une bijection linéaire.*

Démonstration. Soient $z_1, z_2 \in \mathcal{E}_\mathbb{R}(X)$, $z \neq z_2$ tels que $g_\mu(z_1) = g_\mu(z_2)$. En appliquant la définition de l'application g_μ il résulte que le fonction $z_1 - z_2$ est nulle sur l'ensemble $\text{supp } \beta_\mu$. De $z_1 \neq z_2$ il résulte que

$$\exists_{\zeta \in X} (z_1 - z_2)(\zeta) \neq 0$$

et de la définition de l'espace $\mathcal{E}_\mathbb{R}(X)$ on déduit :

$$(z_1 - z_2)(\zeta) = \sum_{j=1}^q a_j \chi_{B_j}(\zeta)$$

et puisque $\beta(z_1 - z_2) = 0$ il résulte que l'ensemble B_j appartient à la famille $\mathfrak{B}$. Donc :

$$\exists_{B_j \in \mathfrak{B}} \chi_{B_j}(\zeta) \neq 0,$$

ce qui montre que l'élément ζ n'appartient pas à l'ensemble B_j . De $B_j \in \mathfrak{B}$ et $\beta_\mu \ll \mathfrak{B}$ il en résulte $\beta_\mu(B_j) = 0$ et donc χ_{B_j} est nulle sur l'ensemble $\text{supp } \beta_\mu$. Dans ce cas les ensembles B_j et $\text{supp } \beta_\mu$ sont disjoints et de la définition de l'opérateur $\mathcal{F}_e$ on déduit que $\text{supp } \beta_\mu \in \mathcal{F}_e(\mathfrak{B})$. De la définition de la relation $<_{\mathfrak{B}}$ et de $\text{supp } \beta_\mu \in \mathcal{F}_e(\mathfrak{B})$ on déduit :

$$(2) \quad \{\zeta\} <_{\mathcal{F}_e(\mathfrak{B})} \text{supp } \beta_\mu$$

puisque $\zeta \notin \text{supp } \beta_\mu$. De $\zeta \notin \text{supp } \beta_\mu$ il résulte $\{\zeta\} \in \mathcal{F}_e(\mathfrak{B})$ et donc $\text{supp } \beta_\mu <_{\mathcal{F}_e(\mathfrak{B})} \{\zeta\}$. Puisque $\{\zeta\} \subset B_j$ on déduit qu'on $\text{supp } \beta_\mu <_{\mathcal{F}_e(\mathfrak{B})} B_j$.

De (2) et du fait que les ensembles B_j et $\text{supp } \beta_\mu$ sont disjoints on déduit que :

$$B_j <_{\mathcal{F}_e(\mathfrak{B})} \text{supp } \beta_\mu$$

ce qui d'une l'égalité : $B_j \stackrel{\Omega}{=} \text{supp } \beta_\mu$ et donc $\text{supp}(z_1 - z_2) \stackrel{\Omega}{=} \text{supp } \beta_\mu$.

Soit Y l'ensemble $\text{supp } \beta_\mu$. Si $Y \in \mathfrak{B}$, alors de $\beta_\mu \ll \mathfrak{B}$ il en résulte que χ_Y est nulle sur l'ensemble Y , ce qui nous a amenés à une contradiction, puisque l'application χ_Y est nulle sur $\sim Y$. Donc $Y \in \mathcal{A} - \mathfrak{B}$.

De $z_1 - z_2 = \sum_{j=1}^q a_j \chi_{B_j}$ et $B_j \in \mathfrak{B}$ il résulte $\text{supp}(z_1 - z_2) \supseteq B_j$ pour j fixe. L'opérateur $\mathcal{F}_e$ étant idempotent on déduit que

$$\text{supp}(z_1 - z_2) \in \mathcal{F}_e(\mathfrak{B}).$$

Soit $Y' = \text{supp}(z_1 - z_2)$. Des résultats précédents on déduit que $Y' \in \mathfrak{B}$ et $Y \stackrel{\Omega}{=} Y'$. De $Y <_{\mathcal{F}_e(\mathfrak{B})} Y'$ il résulte

$$Y' - Y \in \mathcal{F}_e(\mathfrak{B})$$

et de $Y \cap (Y' - Y) = \emptyset$ on trouve que $Y \in \mathcal{F}_e(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$, ce qui constitue une contradiction.

La contradiction obtenue montre qu'on a $g_\mu(z_1) \neq g_\mu(z_2)$.

Soit $z' \in \mathcal{E}_\mathbb{R}(X)/T^\mu$ et $u' = \sum_{j=1}^q a_j \chi_{A_j - D_j}$, $D_j \in \mathfrak{B}$ un représentant de la classe d'équivalence $[z']$. À l'aide de u' on construit l'élément :

$$z = \sum_{j=1}^q a_j \chi_{A_j}.$$

De la définition de la relation $\beta_\mu \ll \mathfrak{B}$ on déduit $\beta_\mu(z) = \mu(u')$ et donc $g_\mu(z) = [u'] = [z']$.

La démonstration du fait que g_μ est linéaire est évidente.

On définit l'application $g'_\mu : \mathcal{E}_\mathbb{R}(X) \rightarrow \mathcal{E}_\mathbb{R}(X)/\Sigma^\mu$ par $g'_\mu(f) = [g_f]$, où g_f vérifie la condition : $\beta_\mu(f) = \mu(g_f)$ et $g_f \leq f$, c'est-à-dire que l'image par g'_μ de f est cette classe d'équivalence $[g_f]$ dont le représentant vérifie la condition $\beta_\mu(f) = \mu(g_f)$ et $g_f \leq f$.

THÉORÈME 2. *L'application g'_μ est une bijection linéaire.*

Démonstration. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{E}_\mathbb{R}(X)$, $f_1 \neq f_2$ tels $g'_\mu(f_1) = g'_\mu(f_2)$. De la définition de l'application g'_μ on déduit la condition :

$$\beta_\mu(f_1 - f_2) = 0.$$

De la relation $\beta_\mu \leq \mathfrak{B}$ on déduit la condition :

$$f_1 - f_2 = \lim_{\alpha} z_{\alpha}, \text{ où } z_{\alpha} = \sum_{j=1}^r a_j^{\alpha} \chi_{B_j^{\alpha}}$$

et $f_1 \neq f_2$ on déduit :

$$\exists_{\zeta \in X} f_1(\zeta) \neq f_2(\zeta)$$

ce qui montre que :

$$\exists_{\alpha \in \Gamma} z_{\alpha}(\zeta) \neq 0.$$

La fonction z_{α} appartient à l'espace $\mathcal{E}_R(X)$ et donc est de forme :

$$z_{\alpha} = \sum_{j=1}^q a_j^{\alpha} \chi_{B_j}$$

ce qui montre l'existence d'un $j_0 \in N$, tel que $\chi_{B_{j_0}^{\alpha}}(\zeta) \neq 0$, c'est-à-dire qu'on a $\zeta \in B_{j_0}^{\alpha}$. De $B_{j_0}^{\alpha} \in \mathfrak{B}$ et $\beta_\mu \leq \mathfrak{B}$ il résulte que $\chi_{B_{j_0}^{\alpha}}$ est nulle sur l'ensemble $\text{supp } \beta_\mu$, c'est-à-dire $B_{j_0}^{\alpha} \cap \text{supp } \beta_\mu = \emptyset$. De la définition de l'opérateur $\mathcal{F}_e$ et de la dernière condition on déduit $\text{supp } \beta_\mu \in \mathcal{F}_e(\mathfrak{B})$. De la même manière que dans le cas de l'application g_μ on trouve $B_{j_0}^{\alpha} \stackrel{\Omega}{=} \text{supp } \beta_\mu$ et $Y = \text{supp } \beta_\mu \in \mathcal{A} - \mathfrak{B}$. L'ensemble $\text{supp } z_{\alpha}$ appartient à la famille $\mathcal{F}_e(\mathfrak{B})$ puisque $B_{j_0}^{\alpha} \subseteq \text{supp } z_{\alpha}$. Donc $Y' \in \mathfrak{B}$ puisque $\mathfrak{B} = \mathcal{F}_e(\mathfrak{B})$, où $Y' = \text{supp } z_{\alpha}$.

Des résultats précédents on déduit la relation :

$$Y <_{\mathcal{F}_e(\mathfrak{B})} B_{j_0}^{\alpha}$$

qui montre que $Y <_{\mathcal{F}_e(\mathfrak{B})} Y'$ puisque $B_{j_0}^{\alpha} \subseteq Y'$ et donc $Y' - Y \in \mathcal{F}_e(\mathfrak{B})$. Les ensemble Y et $Y' - Y$ étant disjoints il en résulte que l'ensemble Y appartient à la famille $\mathcal{F}_e(\mathfrak{B})$, ce qui constitue contradiction. La contradiction obtenue montre que la condition $g(f_1) \neq g(f_2)$ est remplie, c'est-à-dire que g_μ est une application injective.

Soit $[f] \in \mathcal{C}_R(X)/\Sigma^\mu$ une classe d'équivalence et h un représentant de cette classe. Donc :

$$f = \lim_{\alpha} z_{\alpha}, \text{ où } z_{\alpha} = \sum_{j=1}^r a_j^{\alpha} \chi_{A_j^{\alpha} - B_j^{\alpha}}.$$

On désigne par z'_α la fonction $\sum_{j=1}^r a_j^{\alpha} \chi_{A_j^{\alpha}}$ et $f' = \lim_{\alpha} z'_\alpha$. On a $\beta_\mu(f') = \lim_{\alpha} \beta_\mu(z'_\alpha) = \lim_{\alpha} \mu(z_\alpha) = \mu(\lim_{\alpha} z_\alpha) = \mu(f)$, ce qui montre l'égalité $g'_\mu(f') = f$, c'est-à-dire que g'_μ est une application surjective. Le théorème est démontré.

Soit $r \in N$ et V , le sous-espace généré par $\chi_{Y_1}, \chi_{Y_2}, \dots, \chi_{Y_r}$, où χ_{Y_i} est la fonction caractéristique de l'ensemble Y_i et $Y_i \in \mathfrak{B}$. Soit U , la famille :

$$\{A : A \subseteq X, \chi_A \in V\}$$

Du théorème de N. Bourbaki il résulte que U est un clan. Puisque pour tout $r_1, r_2 \in N$ on a $U_{r_1} \subseteq U, U_{r_2} \subseteq U$, où $r = \max(r_1, r_2)$ il en résulte que $\mathcal{U} = \bigcup_{r=1}^{\infty} U_r$ est un clan. De la définition de $\mathcal{U}$ il résulte $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{U}$.

Soit $Y \in \mathcal{F}_e(\mathfrak{B}, \mathcal{U})$. De la définition de l'opérateur $\mathcal{F}_e$ on déduit que la condition :

$$\exists_{B_0 \in \mathfrak{B}, B_0 \neq \emptyset} Y \cap B_0 \in \mathcal{U}$$

est remplie, donc on déduit l'existence d'un $r_0 \in N$ tel que

$$\chi_{Y \cap B_0} = \sum_{j=1}^{r_0} a_j \chi_{Y_j}$$

où $Y_j \in \mathfrak{B}$. Si $\zeta \notin Y \cap B_0$, alors $\chi_{Y \cap B_0}(\zeta) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall_{j \in N_r} \chi_{Y_j}(\zeta) = 0$$

et par suite $\zeta \notin Y_j$, ce qui montre que

$$\bigcup_{j=1}^{r_0} Y_j \subseteq Y \cap B_0 \subseteq Y.$$

De $\bigcup_{j=1}^{r_0} Y_j \in \mathfrak{B} = \mathcal{F}_e(\mathfrak{B})$ on déduit $Y \in \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}$ c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_e(\mathfrak{B}, \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{A}.$$

Puisque $\mathcal{U}$ est un clan, il en résulte que $\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U})$ est un clan. Soit $\mathcal{C}$ la semi-tribu générée par $\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U})$. On a :

$$\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$$

Si $Y \in \mathcal{T}[\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}), \mathcal{C}]$ alors :

$$\forall_{B \in \mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U})} Y \cap B \in \mathcal{C}$$

Du fait que l'ensemble B appartient à la famille $\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U})$ on déduit :

$$\exists_{B_0 \neq \emptyset, B_0 \in \mathfrak{A}} B \cap B_0 \in \mathcal{U}.$$

On a $B \cap B_0 \in \mathfrak{A}$ et donc $B \in \mathcal{T}_e(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. De la condition

$$\forall_{B \in \mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U})} Y \cap B \in \mathcal{C}$$

et de dernière condition on trouve que Y appartient à la famille $\mathcal{T}(\mathfrak{A}, \mathcal{U})$ et donc $Y \in \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{T}(\mathfrak{A}, \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$. C'est-à-dire on a

$$\mathcal{T}[\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}), \mathcal{C}] \subseteq \mathcal{C}$$

et par suite :

$$\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{T}[\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}), \mathcal{C}] \subseteq \mathcal{C}.$$

En supposant remplie la condition :

$$\mathcal{T}[\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}), \mathcal{C}] = \mathcal{C}$$

on aura

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}[\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}), \mathcal{C}]$$

et de la définition de l'opérateur $\mathcal{T}_e$ on déduit

$$\exists_{Y \in \mathcal{T}[\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}), \mathcal{C}]} Y_0 \notin \mathcal{C}$$

De la condition que l'ensemble Y_0 appartient à la famille

$$\mathcal{T}[\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}), \mathcal{C}]$$

il résulte :

$$\forall_{B \in \mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U})} Y_0 \cap B \in \mathcal{C}$$

et de $B \in \mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U})$ on déduit

$$\exists_{B_0 \neq \emptyset, B_0 \in \mathfrak{A}} B \cap B_0 \in \mathcal{U}$$

donc $B \in \mathcal{T}_e(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Cette condition montre que l'ensemble Y appartient à la famille $\mathcal{T}(\mathfrak{A}, \mathcal{C})$.

De $X \in \mathfrak{A}$ et du dernier résultat on déduit que $\mathcal{T}(\mathfrak{A}, \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ ce qui constitue une contradiction : $Y_0 \in \mathcal{C}$.

En supposant remplie la condition :

$$\mathcal{T}[\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}), \mathcal{C}] \neq \mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}).$$

On aura la relation :

$$\mathcal{T}[\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}), \mathcal{C}] \subset \mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}).$$

Si $Y_0 \in \mathcal{T}[\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}), \mathcal{C}] - \mathfrak{A}$, alors de l'hypothèse ci-dessus on déduit que $Y_0 \in \mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U})$, ce qui montre que l'ensemble $Y_0 \cap B_0$ appartient à la famille $\mathcal{U}$ pour $B_0 \in \mathfrak{A}$ fixe et par conséquent $Y_0 \in \mathfrak{A}$ ceci constitue une contradiction. Donc :

$$\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}) \subset \mathcal{T}[\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U}), \mathcal{C}] \subset \mathcal{C}$$

et par conséquence $\mathcal{A}$ est une semi-tribu générée par $\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U})$. Du raisonnement ci-dessus on déduit le résultat :

THÉOREME 3. $\mathcal{A}$ est une semi-tribu générée par $\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}, \mathcal{U})$.
Soit $\mathcal{A}$ un σ -anneau (où tribu) et $\mathfrak{A} \subset \mathcal{U}$ un autre σ -anneau tel que $\mathcal{T}_e(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. On suppose que $\mathcal{A}$ vérifie la condition :

$$\mathcal{I}(\cap \{A : A \neq \emptyset, A \in \mathcal{A}\}) \subset \mathcal{T}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{A})$$

On notera par $(\mathfrak{M}^\mu, \|\cdot\|_0)$ l'espace des mesures définies sur l'espace quotient $\mathcal{C}_\mathbb{R}(X)/\Sigma^\mu$, où μ_0 est une mesure ayant la propriété suivante :

$$\zeta_{f_j}^{\mu_0 \cdot \mu} \subseteq \zeta_f^\mu$$

ζ_f^μ étant la classe d'équivalence de l'élément f induite par la mesure μ . Par $(\mathfrak{M}^\mu, \|\cdot\|_0)$ on désigne l'espace des mesures définies sur $\mathcal{C}_\mathbb{R}(X)$ et ν_μ la partie absolument continue de la mesure ν par rapport à $\mathfrak{B}$. On définit l'application $\psi: (\mathfrak{M}^\mu, \|\cdot\|_0) \rightarrow (\mathfrak{M}^\mu, \|\cdot\|_0)$ par

$$\psi(\mu) = (g_{\mu_0} \cdot \mu)_\mu$$

THÉOREME 4. Si pour toute mesure μ il existe la mesure μ_0 telle que $\zeta_{f_j}^{\mu_0 \cdot \mu} \subseteq \zeta_f^\mu$, alors les espaces $(\mathfrak{M}^\mu, \|\cdot\|_0)$ et $(\mathfrak{M}^\mu, \|\cdot\|)$ sont topologiquement isomorphes.

Démonstration. On notera par ψ l'application définie ci-dessus et admettons que $\mu_1 \neq \mu_2$. On supposera remplie la condition $\psi(\mu_1) = \psi(\mu_2)$. En ce cas on a :

$$\forall A \in \mathcal{A} \exists Y_0 \in \mathfrak{B} (g_{\mu_0} \cdot \mu_1)(A - Y_0) = (g_{\mu_0} \cdot \mu_2)(A - Y_0).$$

On désigne par $\mathfrak{S}$ la famille :

$$\{A - Y_0 : A \in \mathcal{A}\}.$$

Puisque $\mathcal{A}$ est un σ - anneau il en résulte que $\mathfrak{S}$ est un σ - anneau. Soit $Y \in \mathfrak{S}(\mathfrak{S})$. De la définition de l'opérateur $\mathfrak{S}$, on déduit

$$\exists B \neq \emptyset, B \in \mathfrak{S} \quad Y \cap B \in \mathfrak{S}.$$

Donc $B = A - Y_0$, $Y \cap B = A' - Y_0$ où A et A' appartiennent à la famille $\mathcal{A}$. De cette représentation on déduit l'égalité suivante :

$$Y \cap (A - Y_0) = A' - Y_0$$

qui montre que $Y = (A' \cap A) - Y_0$. De $A, A' \in \mathcal{A}$ il résulte que $A \cap A' \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire $Y \in \mathfrak{S}$. Donc $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}$. Les ensembles Y_0 et $A - Y_0$ étant disjoints on déduit que l'ensemble $A - Y_0$ appartient à la famille $\mathfrak{S}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$ et donc $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{U}$. Du théorème précédent il résulte que $\mathcal{A}$ est le σ - anneau générée par $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}, \mathcal{U})$.

Les mesures $g_{\mu_0} \cdot \mu_1, g_{\mu_0} \cdot \mu_2$ sont égales sur $\mathfrak{S}$ et donc leurs prolongements sont égaux sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}, \mathcal{U})$ ([4], théorème 3). $\mathcal{A}$ étant le σ - anneau générée de $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}, \mathcal{U})$ on en déduit que ces mesures sont égales sur $\mathcal{A}$. De $\mu_1 \neq \mu_2$ il en résulte :

$$\exists [\zeta_f^{\mu_0 \cdot \mu}] \in \mathcal{C}_\mathbb{R}(X)/\Sigma^\mu \quad \mu_1([\zeta_f^{\mu_0 \cdot \mu}]) \neq \mu_2([\zeta_f^{\mu_0 \cdot \mu}])$$

On a

$$(g_{\mu_0} \cdot \mu_1)(f) = \mu_1(g_{\mu_0}(f)) = \mu_1(\zeta_f^{\mu_0}), (g_{\mu_0} \cdot \mu_2)(f) = \mu_2(g_{\mu_0}(f)) = \mu_2(\zeta_f^{\mu_0})$$

et puisque $g_{\mu_0} \cdot \mu_1 = g_{\mu_0} \cdot \mu_2$ est vérifiée sur $\mathcal{A}$ on déduit que $\mu_1(\zeta_f^{\mu_0}) = \mu_2(\zeta_f^{\mu_0})$ ce qui constitue une contradiction et donc ψ est une application injective. Soit $\nu \in (\mathfrak{M}^\mu, \|\cdot\|)$. On définit la mesure μ par la condition

$$\mu(\zeta_f^{\mu_0}) = \nu(f).$$

En particulier on a $\mu([\chi_{A-Y_0}]) = \nu(\chi_A)$, ce qui conduit à l'égalité :

$$\mu[g_{\mu_0}(\chi_{A-Y_0})] = \nu(\chi_A)$$

et donc

$$(g_{\mu_0} \cdot \mu)[\chi_{A-Y_0}] = \nu(\chi_A)$$

ce qui montre que $(g_{\mu_0} \cdot \mu)_\mu = \nu$, c'est-à-dire $\psi(\mu) = \nu$ et l'application ψ est surjective.

On suppose que la mesure μ_0 vérifie la condition :

$$\zeta_{f_j}^{\mu_0 \cdot \mu} \subseteq \zeta_f^{\mu_0}.$$

En ce cas on a :

$$\|\psi(\mu)\| = \|(g_{\mu_0} \cdot \mu)_\mu\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |(g_{\mu_0} \cdot \mu)(q_f)| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\mu(g_{\mu_0}(q_f))| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\mu(\zeta_q^{\mu_0})|.$$

De l'hypothèse ci-dessus on déduit que l'élément q_f appartient à la classe d'équivalence $\zeta_f^{\mu_0 \cdot \mu}$ et par conséquent :

$$q_f \in \zeta_f^{\mu_0}$$

De $q_f \leq f$ il résulte que $\|q_f\| \leq 1$ puisque $\|f\| \leq 1$, c'est-à-dire

$$\|\zeta_{q_f}^{\mu_0}\| \leq 1.$$

On a

$$\|\psi(\mu)\| = \sup_{\|\zeta_f^{\mu_0}\| < 1} |\mu(\zeta_{q_f}^{\mu_0})| = \|\mu\|_0$$

et donc ψ^{-1} est continue.

Soit $\mu = \lim_{\alpha} \mu_{\alpha}$, où $\mu_{\alpha} \in (\mathfrak{M}, \|\cdot\|_0)$ on a :

$$\lim_{\alpha} \|\mu_{\alpha} - \mu\|_0 = 0 \text{ et } \lim_{\alpha} \|\psi(\mu_{\alpha}) - \psi(\mu)\| = \lim_{\alpha} \|\mu_{\alpha} - \mu\| = \lim_{\alpha} \|\mu_{\alpha} - \mu\|_0 = 0.$$

Donc ψ est une application continue.
Le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Gaal, S. A., *Point set topology*. Acad. Press (1964).
- [2] Kelley, J. L., *General topology*. Van Nostrand (1955).
- [3] Kelley, J. L., Namioka, I. and co-authors, *Linear Spaces*. Van Nostrand (1963).
- [4] Petrișor, P., *Sur le prolongement d'une mesure* (sous presse).
- [5] — *Sur un certain type de topologie définie sur la famille $\mathfrak{Q}(X)$* (sous presse).
- [6] — *Sur un type d'interpolation*. *Mathematica* 12(35), 1, 189–204 (1970).

Reçu le 8. I. 1971

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ВЛОЖЕНИЯ

М. К. ПОТАПОВ

Москва

§ 1. Обозначения и формулировка основной теоремы

Будем, как обычно через L_p , $1 \leq p \leq \infty$, обозначать пространство всех 2π -периодических измеримых функций*, для которых при $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

а при $p = \infty$ будем считать, что $L_{\infty} = C$, т.е. L_{∞} есть пространство всех 2π -периодических непрерывных функций и

$$\|f\|_p = \max_{0 \leq x < 2\pi} |f(x)| < \infty.$$

Через $\omega_k(f; t)_p$ обозначим модуль гладкости (в метрике L_p) порядка k функции $f(x) \in L_p$, т.е.

$$\omega_k(f; t)_p = \sup_{|h| \leq t} \left\| \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} C_k^v f(x - vh) \right\|_p.$$

* Всюду ниже мы не различаем эквивалентные функции.