

REFERENCES

- [1] Almering, J. H. J., *Contracting matrices*. Nieuw Archief voor Wiskunde 13, 85-99 (1965).
 [2] Faddeev, D. K. and Faddeeva V. N., *Vycislitel'nyye metody lineinoi algebrы*, Moscow 1960.
 [3] Householder, A. S., *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. New York-Toronto-London 1964.
 [4] Betty Jane Stone, *Best possible ratios of certain matrix norms*. Numer. Math. 4, 114-116 (1962).

Received 11. X. 1970

University of Brno

SUR UNE STRUCTURE UNIFORME GÉNÉRÉE PAR UNE
RELATION D'ORDRE

par

PETRU PETRIȘOR

à Cluj

Dans cette note on construit une structure uniforme générée par une relation d'ordre définie sur $\mathfrak{A}(X)$ et introduite en [3]. À l'aide de cette structure uniforme on établit les conditions que la topologie τ doit remplir pour que l'espace topologique (X, τ) soit compact.

Soit Σ la famille de σ -anneaux définis sur X ayant la propriété suivante :

$$\forall s \in \Sigma \exists s' \in \Sigma \tau_s(s') = s$$

et on désigne par $<_s$ la relation d'ordre définie par :

$$A <_\Sigma B \Leftrightarrow \exists s \in \Sigma B - A \in s \cap \mathfrak{A} \text{ où } \mathfrak{A} \in \mathfrak{F}_{\tau_s}.$$

La famille $\mathfrak{F}_{\tau_s}$ est formée des éléments $s \in \Sigma$ pour lesquels $\tau_s(s) = s$. Par U_s , où $s \in \Sigma$, on entend l'ensemble défini comme suit :

$$U_s = \{(x, y) : \forall A \subset X, x \in A \{y\} <_s A\}$$

et on note par $\mathcal{U}$ la famille $\{U_s : s \in \Sigma\}$.

THÉORÈME 1. La famille $\mathcal{U}$ est la sous-base d'une structure uniforme $\mathcal{V}$ définie sur X .

Démonstration. On note par Δ la diagonale de l'ensemble X . Pour la démonstration nous établissons les propriétés :

$$(1) \quad \forall s \in \Sigma \Delta \subset U_s.$$

Pour établir cette propriété, soit $(x, x) \in \Delta$ et $A \subseteq X$ un sous-ensemble quelconque tel que $x \in A$. De $\{x\} <_s \{x\}$ et $\{x\} \subset A$ on déduit que $\{x\} <_s A$, c'est-à-dire $(x, x) \in U_s$.

$$(2) \quad \forall_{U_s \in \mathcal{U}} \exists V \subset U_s^{-1}.$$

En supposant remplie la condition :

$$\exists_{U_s \in \mathcal{U}} \forall_{U_s \in \mathcal{U}} U_s \not\subset U_s^{-1}.$$

On a :

$$\exists_{(x_0, y_0) \in U_s} (x_0, y_0) \notin U_s^{-1}$$

qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\exists_{(x_0, y_0) \in U_s} (y_0, x_0) \notin U_s.$$

De $(x_0, y_0) \in U_s$ il résulte la condition :

$$\forall_{A \subset X, x_0 \in A} \{y_0\} <_s A.$$

On a à analyser les cas :

(a) L'élément y_0 appartenir à l'ensemble A . De $x_0 \in A$ il résulte que $\{x_0\} <_s A$, c'est-à-dire $(y_0, x_0) \in U_s$.

(b) $y_0 \notin A$. En ce cas $\{y_0\} <_s \sim A$ et de $\{y_0\} <_s A$ et de [3] il résulte que $\sim A <_s \sim \{y_0\}$. Donc $\{y_0\} <_s X - \{y_0\}$. De la définition de la relation $<_s$ on déduit la condition $X - \{y_0\} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$. L'opérateur τ_s étant idempotent on trouve que l'espace X appartient à la famille $\tau_s(\mathcal{S})$. Donc $X \in \mathcal{A} \cap \tau_s(\mathcal{S})$ et par conséquence $\emptyset <_{\tau_s(\mathcal{S})} X$.

De $(y_0, x_0) \notin U_s$ il résulte que la relation $\{x_0\} <_s A$ pour $A \subseteq X$ fixe qui contient le point y_0 n'est pas vérifiée, c'est-à-dire :

$$A \subseteq X, y_0 \in A \quad \{x_0\} \not<_s A.$$

En supposant que $A - \{x_0\} \notin \mathcal{A}$. Si $X - \{x_0\} \in \tau_s(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, alors du fait que les ensembles $\{x_0\}$ et $X - \{x_0\}$ sont disjoints on déduit que $\{x_0\} \in \mathcal{A}$

et de $\{x_0\} \cap (A - \{x_0\}) = \emptyset$ il résulte que $A - \{x_0\} \in \mathcal{A}$ ce qui constitue une contradiction. Donc $X - \{x_0\} \notin \mathcal{A}$ et par conséquent on a :

$$\forall_{\Gamma \in \mathcal{A}} \Gamma \cap (X - \{x_0\}) \notin \mathcal{A}.$$

De $x_0 \in A$ il résulte que pour tout $s \in \Sigma$ on a $\{x_0\} <_s A$ et donc $A - \{x_0\} \in \mathcal{A}$. De la condition ci-dessus déduit que ensemble :

$$(A - \{x_0\}) \cap (X - \{x_0\})$$

n'appartient pas à $\mathcal{A}$, c'est-à-dire $A - \{x_0\} \notin \mathcal{A}$, ceci constitue une contradiction.

Si $A - \{x_0\} \notin \mathcal{S}$, alors $x_0 \notin A$.

En effet, si $x_0 \in A$ alors $\{x_0\} <_s A$, ce qui contredit l'hypothèse admise. De $x_0 \notin A$ il résulte que $A \notin \mathcal{S}'$ puisque $A = A - \{x_0\}$. De $y_0 \in A$ on déduit la relation $\{y_0\} <_s A$, c'est-à-dire $A - \{y_0\} \in \mathcal{S}'$. L'égalité $(A - \{y_0\}) \cap X = A - \{y_0\}$ montre que $X \in \tau_s(\mathcal{S} \cap \mathcal{S}')$. Soit $\mathcal{S}'' \in \Sigma$ tel que $\tau_s(\mathcal{S}'') = \mathcal{S}'$. De $A \notin \mathcal{S}'$ il résulte que $A \notin \tau_s(\mathcal{S}'')$ et de $X \in \tau_s[\mathcal{S} \cap \tau_s(\mathcal{S}'')] \cap \tau_s(\mathcal{S}'')$ on déduit que $X \in \tau_s(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$. Donc $A \subset X$. De l'inclusion $A \subset X$ il résulte que $X - A \in \mathcal{S}' = \tau_s(\mathcal{S}'')$ et de :

$$A \cap (X - A) = \emptyset \in \tau_s(\mathcal{S}'')$$

on déduit que $A \in \tau_s(\tau_s(\mathcal{S}''), \tau_s(\mathcal{S}'')) = \tau_s^2(\mathcal{S}'') = \tau_s(\mathcal{S}'') = \mathcal{S}'$, ce qui constitue une contradiction. Donc (2) est démontrée.

$$(3) \quad \forall_{s \in \Sigma} U_s \cdot U_s \subseteq U_s.$$

Soit $(x, z) \in U_s \cdot U_s$. Il existe un $y \in X$ tel que $(x, y) \in U_s$ et $(y, z) \in U_s$.

Si $A \subseteq X$ est un ensemble arbitraire qui contient le point x , alors de $(x, y) \in U_s$ il résulte que $\{y\} <_s A$. Si $y \in A$ alors de $(y, z) \in U_s$ on déduit $\{z\} <_s A$ et avec $x \in A$, on déduit $(x, z) \in U_s$.

Si $y \notin A$ et $z \in A$ alors $\{z\} <_s A$ et puisque $x \in A$ il résulte $(x, z) \in U_s$.

Si $z \notin A$ alors $\emptyset <_s A$, puisque $y \notin A$. De $z \notin A$ on déduit, $A - \{z\} = A$ et puisque $\emptyset <_s A$ il résulte que $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, ce qui montre que $\{z\} <_s A$, c'est-à-dire $(x, z) \in U_s$. La propriété est démontrée.

Les propriétés 1, 2, 3 montrent que $\mathcal{U}$ est la sous-base d'une structure uniforme $\mathcal{V}$ définie sur X .

Soit (X, T) un espace topologique et Σ' la famille des σ -anneaux $\mathcal{S}$ définis sur X tels que $\mathcal{S} \cap \mathcal{B}_0 = \emptyset$, où $\mathcal{B}_0$ est le σ -anneau des sous-ensem-

bles boréliens de X . On désigne par $\mathcal{U}$ la structure uniforme générée par la sous-base $\{U_s : s \in \Sigma'\}$ et par $\mathcal{J}_{\mathcal{U}}$ la topologie attachée à la structure uniforme $\mathcal{U}$. Soit $G \in \mathcal{D}_T$ un ensemble T -ouvert et $x \in G$. On considère l'ensemble $U_s[x]$, où $s \in \Sigma'$. Soit $y \in U_s[x]$. Donc $(x, y) \in U_s$. De $x \in G$ et $(x, y) \in U_s$ il résulte :

$$\{y\} <_s G.$$

Si $y \notin G$, alors $\Phi <_s G$ et donc $G \in \mathcal{S}$, ce qui contredit la définition de la famille Σ' . Donc $y \in G$ ce qui montre que

$$U_s[x] \subseteq G$$

c'est-à-dire que G est un ensemble $\mathcal{J}_{\mathcal{U}}$ — ouvert et par conséquent $T < \mathcal{J}_{\mathcal{U}}$.

On observe que dans un espace topologique qui vérifie l'axiome de séparation T_1 (c'est-à-dire $\{y\}$ est T -fermé), la relation $\mathcal{J}_{\mathcal{U}} < T$ est fausse. Pour cela il suffit de montrer que $U_s[x]$ n'est pas T -ouvert. Soit $y \in U_s[x]$ et donc $(x, y) \in U_s$. De $x \in U_s[x]$ et $(x, y) \in U_s$ il résulte $\{y\} <_s U_s[x]$, donc $U_s[x] - \{y\} \in \mathcal{S} \in \Sigma'$. De la définition de la famille Σ' il résulte que $U_s[x] - \{y\}$ n'est pas T -ouvert. L'espace (X, T) vérifie l'axiome de séparation T_1 et donc $\{y\}$ est T -fermé.

Si $U_s[x]$ est T -ouvert, alors $U_s[x] - \{y\}$ est T -ouvert, qui constitue une contradiction.

THÉOREME 2. Il existe un σ -anneau $\mathcal{S}$ de sous-ensembles de X tel que $\mathcal{S}$ et $\tau_c(\mathcal{S})$ ne contiennent les ensembles ouverts de X .

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ la famille des ensembles $Y \subseteq X$ ayant les propriétés :

$$(1) \quad \exists_{G \in \mathcal{D}_T} G \subseteq Y.$$

(2) Pour toutes les paires $(Y_1, G_1), (Y_2, G_2)$, où G_1 et G_2 sont déterminées par la condition (1) on a $Y_1 \cap G_2 = Y_2 \cap G_1 = \Phi$. La famille $\mathcal{S}$ a les trois propriétés suivantes :

$$(\alpha) \quad \forall_{Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}} Y_1 - Y_2 \in \mathcal{S}.$$

De Y_1 et $Y_2 \in \mathcal{S}$ il résulte l'existence des ensembles ouverts $G_1 \subset Y_1, G_2 \subset Y_2$ tels que $Y_1 \cap G_2 = Y_2 \cap G_1 = \Phi$. De $G_1 \cap Y_2 = \Phi$ on déduit :

$$Y_1 - Y_2 \supset G_1 \cap cY_2 = G_1.$$

On considère la paire $(G_1, Y_1 - Y_2)$ et la paire (G', Y') où $Y' \in \mathcal{S}$ est arbitraire. Puisque $Y_1 \in \mathcal{S}$ il résulte que les ensembles $G_1 \cap Y', G' \cap Y_1$ sont vides et donc

$$(Y_1 - Y_2) \cap G' = (Y_1 \cap G') \cap cY_2 = \Phi,$$

c'est-à-dire $Y_1 - Y_2 \in \mathcal{S}$.

$$(\beta) \quad \forall_{Y_n \in \mathcal{S}} \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \in \mathcal{S}.$$

De $Y_n \in \mathcal{S}$ il résulte qu'il existe un ensemble $G_n \in \mathcal{D}_T$ tel que $G_n \subset Y_n$ et donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. On considère les paires :

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right), (G', Y'),$$

où $Y' \in \mathcal{S}$ est arbitraire. Puisque $Y_n \in \mathcal{S}$ il en résulte $G_n \cap Y' = Y_n \cap G' = \Phi$, donc $G' \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) = \Phi$ et $Y' \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) = \Phi$, c'est-à-dire $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \in \mathcal{S}$.

$$(\gamma) \quad \forall_{Q \in \mathcal{D}_T} Q \notin \mathcal{S}.$$

S'il existe un $Q_0 \in \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_T$, alors il existe un $G_0 \in \mathcal{D}_T$ tel que $G_0 \subset Q_0$. On considère les paires $(G_0, G_0), (G', Y')$ où $Y' \in \mathcal{S}$ est arbitraire. De $Q_0 \in \mathcal{S}$ il résulte que $G' \cap Q_0 = Y' \cap G_0 = \Phi$ et donc $G' \cap G_0 = \Phi$, c'est-à-dire $G_0 \in \mathcal{S}$. En considérant les paires $(G_0, G_0), (G_0, G_0)$ il résulte $G_0 \cap G_0 = \Phi$, c'est-à-dire $G_0 = \Phi$, ce qui est absurde.

Les propriétés α, β, γ montrent que $\mathcal{S}$ est un σ -anneau tel que :

$$\forall_{G \in \mathcal{D}_T} G \notin \mathcal{S}.$$

Soit $G \in \mathcal{D}_T$ un ensemble T — ouvert et $Y \in \mathcal{S}$ tel que $Y \neq \Phi$. Si $G \subset Y$, alors $G \cap Y = G \notin \mathcal{S}$. Mais cela prouve que $G \notin \tau_c(\mathcal{S})$. Si $G \cap Y = \emptyset$, alors la relation $Y \in \mathcal{S}$ signifie qu'il existe une partie $G_0 \in \mathcal{D}_T$ telle que $Y \supset G_0$.

Supposons maintenant que (Y', G') est une paire arbitraire, où $Y' \in \mathcal{S}$ et donc $G_0 \cap Y' = G' \cap Y = \Phi$.

De $G' \cap Y = \Phi$ et du fait que $G_0 \subset Y$ il résulte $G' \cap G_0 = \Phi$, c'est-à-dire $G_0 \in \mathfrak{s}$. En vertu de la première partie du raisonnement on a $G_0 = \Phi$. Donc, on a $Y = \Phi$ ce qui est absurde. Donc $G \cap Y \neq \Phi$. Si $G \cap Y \in \mathfrak{s}$, alors de $Y \in \mathfrak{s}$ on déduit $(G \cap Y) \cap Y = \Phi$, ce qui montre que $G \cap Y = \Phi$, ce qui est absurde. Ceci achève la démonstration.

THÉORÈME 3. La structure uniforme $\mathfrak{V}$ est précompacte.

Démonstration. De la définition de l'opérateur τ_e on déduit que $X \in \tau_e(\mathfrak{A})$. On supposera que $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, X$ appartiennent à la famille $\tau_e(\mathfrak{s})$. Il existe les ensembles disjoints $B_1, B_2, \dots, B_{m-1}, B_m$ ($m = 2^n - 1$) tels que tout ensemble de la première suite est la réunion d'ensembles de la deuxième suite. Donc $X = \bigcup_{j=1}^m B_j$.

Pour $p_j \in B_j$ on a l'inclusion :

$$(a) \quad B_j \subseteq U_{\tau_e(\mathfrak{s})}[p_j].$$

En effet, soit $y \in B_j$ et $A \subseteq X$ un ensemble arbitraire tel que $p_j \in A$ et $N_r = (1, 2, 3, \dots, r)$. De $p_j \in B_j$ il résulte que $A \cap B_j \neq \Phi$ et donc on a :

$$\forall l \in N_r - \{j\} \quad A \neq B_l.$$

On a également :

$$\forall l \in N_r - \{j\} \quad A \not\subseteq B_l.$$

De cette condition et de $A \subseteq X$ il résulte que $A - B_l \subseteq B_j$ pour $l \in N_r - \{j\}$. De $y \in B_j$, on déduit de même $y \notin B_l$ puisque les ensembles B_j et B_l sont disjoints. Si $y \notin A$, alors $B_j \subseteq \sim A$ ce qui montre que $A \cap B_j = \Phi$, ce qui est absurde.

Donc, on a $y \in A$ ce qui montre que $y \in A - B_l$, c'est-à-dire $A - B_l = B_j$ pour tout $l \in N_r - \{j\}$. Puisque $y \in B_j$ on déduit que :

$$\{y\} <_{\tau_e(\mathfrak{s})} B_j$$

ce qui montre $\{y\} <_{\tau_e(\mathfrak{s})} A - B_l$.

De $A - B_l \subseteq A$ il résulte $\{y\} <_{\tau_e(\mathfrak{s})} A$, c'est-à-dire $y \in U_{\tau_e(\mathfrak{s})}[p_j]$ et (a) est démontrée.

De l'inclusion $B_j \subseteq U_{\tau_e(\mathfrak{s})}[p_j]$ nous déduisons :

$$\bigcup_{j=1}^m B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_{\tau_e(\mathfrak{s})}[p_j]$$

et donc $X = \bigcup_{j=1}^m U_{\tau_e(\mathfrak{s})}[p_j]$. Ceci montre que $\mathfrak{V}$ est une structure uniforme précompacte et le théorème est démontré.

THÉORÈME 4. Soit X un ensemble sur lequel sont définies deux topologies τ_1 et τ_2 telles que $\tau_1 < \tau_2$. Alors la famille $\{U_{\mathfrak{s}} : \mathfrak{s} \in \Sigma\}$, où Σ est la famille des σ -anneaux définis sur X qui contiennent la famille $\mathfrak{D}_{\tau_1} - \mathfrak{D}_{\tau_2}$, est la sous-base d'une structure uniforme $\mathfrak{V}$ qui induit la topologie $\tau_{\mathfrak{V}}$, telle que $\tau_1 < \tau_{\mathfrak{V}} < \tau_2$.

Démonstration. Pour prouver cela, soit $G \in \mathfrak{D}_{\tau_1}$ et $x \in G$. On a $U_{\mathfrak{s}}[x] \subseteq G$.

En effet, soit $y \in U_{\mathfrak{s}}[x]$. De la définition de l'ensemble $U_{\mathfrak{s}}[x]$ nous déduisons que $\{y\} <_{\mathfrak{s}} U_{\mathfrak{s}}[x]$, c'est-à-dire $(x, y) \in U_{\mathfrak{s}}$. De $x \in G$ il résulte que $\{y\} <_{\mathfrak{s}} G$. Si $y \notin G$, alors $G - \{y\} = G \in \mathfrak{s}$, ce qui contredit la définition de la famille Σ . Donc, on a $y \in G$, ce qui montre que $G \in \mathfrak{D}_{\tau_{\mathfrak{V}}}$. Soit $Y \in \mathfrak{D}_{\tau_{\mathfrak{V}}}$. En ce cas on a la condition suivante :

$$\exists \mathfrak{s}_0 \in \Sigma \quad \forall x \in Y \quad U_{\mathfrak{s}_0}[x] \subseteq Y$$

ce qui montre que $U_{\tau_e(\mathfrak{s})}[x] \subseteq Y$.

Soit $y \in U_{\mathfrak{s}_0}[x]$. De la définition de la relation $<_{\mathfrak{s}}$ nous déduisons que :

$$\forall \mathfrak{s} \in \Sigma \quad \{y\} <_{\mathfrak{s}} Y.$$

De $U_{\mathfrak{s}_0}[x] \subseteq Y$ on déduit la condition suivante :

$$\forall \mathfrak{s} \in \Sigma \quad \{y\} <_{\mathfrak{s}} Y.$$

En particulier on a $\{y\} <_{\tau_e(\mathfrak{s}')} Y$, où $\mathfrak{s}'$ est le σ -anneau construit antérieurement, ce qui montre que $Y - \{y\} \in \tau_e(\mathfrak{s}')$.

De $Y \supseteq Y - \{y\}$ nous déduisons que $Y \in \tau_e(\mathfrak{s}')$ c'est-à-dire :

$$\exists A \in \mathfrak{s}', A \neq \Phi \quad Y \cap A \in \mathfrak{s}'.$$

De la définition de la famille $\mathfrak{s}'$ on conclut :

$$\exists G_0 \in \mathfrak{D}_{\tau_1} - \mathfrak{D}_{\tau_2} \quad G_0 \subseteq Y \cap A,$$

ce qui montre que :

$$\exists_{G_0 \in \mathfrak{D}_{\tau_1} - \mathfrak{D}_{\tau_2}} G_0 \subseteq Y.$$

De $x \in G$ et $G \in \mathfrak{D}_{\tau_1}$ il résulte que si $\{x\} \in \tau_2(\mathfrak{S}')$ alors $G \in \tau_2(\mathfrak{S}')$ ce qui est absurde. Donc, on a $\{x\} \notin \tau_2(\mathfrak{S}')$, c'est-à-dire :

$$\forall_{G \in \mathfrak{D}_{\tau_1} - \mathfrak{D}_{\tau_2}} G \not\subset \{x\}.$$

En particulier $G_0 \not\subset \{x\}$ et donc $G - \{x\} \neq \Phi$.

Puisque $x \in Y$ on a $G - \{x\} \subseteq Y - \{x\}$, c'est-à-dire $Y - \{x\} \in \mathfrak{S}'$. Soit $\Omega \in \mathfrak{S}'$ un ensemble arbitraire. On montrera qu'on a $\Omega \cap (G_0 - \{x\}) \in \mathfrak{S}'$. De $\Omega \in \mathfrak{S}'$ il résulte qu'on peut considérer la paire (G, Ω) , où $G \subset \Omega$ et $G \in \mathfrak{D}_{\tau_1} - \mathfrak{D}_{\tau_2}$. Soit la paire (G', Y') avec $Y' \in \mathfrak{S}'$ arbitraire. De la définition de la famille $\mathfrak{S}'$ on déduit que les ensembles $G' \cap \Omega$ et $G \cap Y'$ sont vides. On également a $G - \{x\} \subset \Omega - \{x\}$ puisque $G \subset \Omega$. Donc, on a :

$$(G - \{x\}) \cap G_0 \subseteq (\Omega - \{x\}) \cap G_0.$$

Considérons la paire $((G - \{x\}) \cap G_0, (\Omega - \{x\}) \cap G_0)$ et la paire (G', Y') , où Y' est un ensemble arbitraire qui appartient à la famille $\mathfrak{S}'$. Puisque les ensembles G et Y' sont disjoints il résulte que les ensembles $(G - \{x\}) \cap G_0 \cap Y'$ et $(G_0 - \{x\}) \cap G \cap Y'$ sont vides.

On a également :

$$(\Omega - \{x\}) \cap G_0 \cap G' = (G - \{x\}) \cap \Omega \cap G' = \Phi,$$

puisque $\Omega \cap G' = \Phi$.

Donc, on a $(\Omega - \{x\}) \cap G_0 \in \mathfrak{S}'$, ce qui montre que $(G_0 - \{x\}) \cap \Omega \in \mathfrak{S}'$, c'est-à-dire $G_0 - \{x\} \in \tau_2(\mathfrak{S}')$.

De $G_0 - \{x\} \subseteq Y - \{x\}$ et de $Y' \in \mathfrak{S}'$ il résulte que $G_0 - \{x\} \in \mathfrak{S}'$.

Si $x \notin G_0$, alors $G_0 = G_0 - \{x\} \in \mathfrak{S}'$ et donc $G_0 \in \mathfrak{S}'$, ce qui est absurde. Donc, on a $x \in G_0$, c'est-à-dire :

$$\forall_{x \in Y} \exists_{G_0 \in \mathfrak{D}_{\tau_1}} x \in G_0 \subseteq Y$$

et par suite $\tau_1 < \tau_{\mathfrak{S}'} < \tau_2$. Cela démontre notre assertion.

THÉORÈME 5. Soit X un ensemble sur lequel sont définies deux topologies τ_1 et τ_2 telles que $\tau_1 < \tau_2$. Alors la famille

$$\{U_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \in \Sigma \cup \{\mathfrak{S}'\}\}$$

ou $\mathfrak{S}'$ est le σ -anneau de théorème 2, est la sous-base d'une structure uniforme $\tau_{\mathfrak{S}'}$ qui induit la topologie $\tau_{\mathfrak{S}'}$ égale à τ_2 .

Démonstration. Du théorème 4 il résulte la relation $\tau_1 < \tau_{\mathfrak{S}'} < \tau_2$. Soit un ensemble $Y \in \mathfrak{D}_{\tau_1}$ (la famille d'ensembles ouverts par rapport à la topologie τ_2) et supposons remplie la condition :

$$\exists_{x_0 \in Y} \forall_{\mathfrak{S} \in \Sigma} U_{\mathfrak{S}}[x_0] \not\subset Y.$$

En ce cas on déduit l'existence de l'élément y_0 qui appartient à l'ensemble $U_{\mathfrak{S}_0}[x_0] - Y$ et donc, on a

$$\forall_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S} \in \Sigma} \{y_0\} \subset_{\mathfrak{S}_1} U_{\mathfrak{S}}[x_0] - Y$$

c'est-à-dire $(U_{\mathfrak{S}_0}[x_0] - \{y_0\}) \cap \mathcal{C}Y \in \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{A}$. En particulier pour $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}'$ nous avons

$$(U_{\mathfrak{S}_0}[x_0] - \{y_0\}) \cap \mathcal{C}Y \in \mathfrak{S}'.$$

De la définition de la famille $\mathfrak{S}'$ on déduit l'existence d'un ensemble ouvert par rapport à la topologie τ_1 tel que

$$G_0 \subseteq (U_{\mathfrak{S}_0}[x_0] - \{y_0\}) \cap \mathcal{C}Y.$$

Considérons la paire $(G_0, (U_{\mathfrak{S}_0}[x_0] - \{y_0\}) \cap \mathcal{C}Y)$.

Des résultats précédents il résulte l'inclusion

$$(1) \quad G_0 - \{y_0\} \subset (U_{\mathfrak{S}_0}[x_0] - \{y_0\}) \cap \mathcal{C}Y$$

et l'ensemble appartient à la famille $\mathfrak{S}'$. Soit (G, Ω) où $\Omega \in \mathfrak{S}'$ est un ensemble arbitraire. On a

$$\Omega \cap (G_0 - \{y_0\}) \subseteq \Omega \cap (U_{\mathfrak{S}_0}[x_0] - \{y_0\}).$$

Considérons la paire $((G - \{y_0\}) \cap G_0, (Y - \{y_0\}) \cap G_0)$ et la paire (G', Y') , Y' étant un ensemble arbitraire de $\mathfrak{S}'$.

De $\Omega \in \mathcal{S}'$ il résulte que $G \cap Y' = G' \cap \Omega = \Phi$. On a

$$(G - \{y_0\}) \cap G_0 \cap Y' = (G_0 - \{y_0\}) \cap G \cap Y' = \Phi,$$

$$(\Omega - \{y_0\}) \cap G_0 \cap G' = (G_0 - \{y_0\}) \cap \Omega \cap G' = \Phi,$$

ce qui entraîne que l'ensemble $(\Omega - \{y_0\}) \cap G_0$ appartient à la famille $\mathcal{S}'$, c'est-à-dire $(G_0 - \{y_0\}) \cap \Omega \in \mathcal{S}'$. Donc, on a $G_0 - \{y_0\} \in \tau_e(\mathcal{S}')$. En désignant par F l'ensemble $\mathcal{C}Y$ et en utilisant la condition (1) nous trouvons que l'ensemble $(F - \{y_0\}) \cap U_{\mathcal{S}_0}[x_0]$ appartient à la famille $\tau_e(\mathcal{S}')$, c'est-à-dire que $F \in \tau_e(\mathcal{S}')$. La famille $\tau_e(\mathcal{S}')$ étant un σ -anneau il résulte que $\mathcal{C}F = Y \in \tau_e(\mathcal{S}')$. Donc, on a

$$\mathcal{D}_{\tau_1} \subseteq \tau_e(\mathcal{S}').$$

De $\mathcal{D}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{D}_{\tau_1}$ nous déduisons la relation: $\mathcal{D}_{\tau_1} \subseteq \tau_e(\mathcal{S}')$ ce qui est absurde. Cela démontre notre assertion.

THÉORÈME 6. Soit (X, T) un espace topologique et $\tau_1 < T$ une topologie telle que la famille $\Sigma = \{\mathcal{S} : \mathcal{D}_{\tau_1} - \mathcal{D}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{S}\}$ ait la propriété:

$$\forall \mathcal{S} \in \Sigma \exists \tau_e(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$$

Alors (X, T) est compact.

Démonstration. Puisque $\tau_1 < T$ du théorème 5 il résulte qu'il existe une structure uniforme $\mathcal{V}$ qui induit une topologie $\tau_{\mathcal{V}}$ telle que $\tau_{\mathcal{V}} = \tau_1$. Supposons qu'il existe un filtre $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$ - Cauchy non-convergent. Donc, on a

$$\forall x \in X, F \in \mathcal{F} \exists \mathcal{S}_x \in \Sigma F \not\subseteq U_{\mathcal{S}_x}[x]$$

ce qui entraîne la condition:

$$(2) \quad \forall x \in X, F \in \mathcal{F} \exists s \in F, \mathcal{S}_x \in \Sigma s \notin U_{\mathcal{S}_x}[x].$$

De la définition de l'ensemble $U_{\mathcal{S}}[x]$ on déduit:

$$(3) \quad \forall x \in X, F \in \mathcal{F} \exists s \in F, \mathcal{S}_x \in \Sigma (x, s) \notin U_{\mathcal{S}_x}.$$

La structure $\mathcal{V}$ étant uniforme il résulte qu'il existe un élément $U_{\mathcal{S}_x} \in \mathcal{V}$ tel que $U_{\mathcal{S}_x}^{-1} \subseteq U_{\mathcal{S}_x}$.

Donc, on a

$$\forall x \in X, F \in \mathcal{F} \exists s \in F, \mathcal{S}_x \in \Sigma (x, s) \notin U_{\mathcal{S}_x}^{-1},$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$\forall x \in X, F \in \mathcal{F} \exists A_x \subset X, s \in A_x \cap F \{x\} \not\prec_{\mathcal{S}_x} A_x,$$

c'est-à-dire que la relation $\{x\} \prec_{\mathcal{S}_x} A_x$ n'est pas vérifiée. Si $x \in A_x$, alors $\{x\} \prec_{\mathcal{S}_x} A_x$, ce qui est absurde. Donc, on a $x \notin A_x$ il résulte $A_x - \{s\} \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire que $A_x \in \mathcal{A} = \tau_e(\mathcal{A})$. De

$$\{x\} \not\prec_{\mathcal{S}_x} A_x, A_x \in \mathcal{A}, x \notin A_x$$

il résulte que $A_x \notin \mathcal{S}_x$. Donc, on a

$$\forall x \in X \exists A_x \in \mathcal{A}, \mathcal{S}_x \in \Sigma x \notin A_x, A_x \notin \mathcal{S}_x.$$

Soit $\Omega_F = \{t : \forall x \in F, x \neq t\}$ où $\tilde{\mathcal{S}} = \bigcap \{\mathcal{S}_\gamma : \mathcal{S}_\gamma \in \Sigma\}$ et désignons par $\mathcal{S}$ un σ -anneau tel que $\tau_e(\mathcal{S}) = \tilde{\mathcal{S}}$. Soient $F \in \mathcal{F}$, $\zeta_0 \in F$ et choisissons $s \in F - \{\zeta_0\}$ arbitraire. De $s \in F$ il résulte que $F - \{s\} \in \mathcal{A}$.

Supposons maintenant que $F - \{\zeta\} \in \tilde{\mathcal{S}}$. Puisque les ensembles $\{\zeta\}$ et $F - \{\zeta\}$ sont disjoints on déduit que $\{\zeta\} \in \tau_e^2(\mathcal{S}) = \tau_e(\mathcal{S}) = \tilde{\mathcal{S}}$. Mais $\zeta \notin A_\zeta$ et donc $A_\zeta \in \tau_e(\mathcal{S}) = \tilde{\mathcal{S}}$, c'est-à-dire $A_\zeta \in \mathcal{S}_\gamma$, ce qui est absurde. Donc, on a $F - \{\zeta\} \notin \tilde{\mathcal{S}}$. En ce cas nous avons $\{\zeta\} \prec_{\tilde{\mathcal{S}}} F$. De $s \in F$ il résulte que $(s, \zeta) \notin U_{\tilde{\mathcal{S}}}$, c'est-à-dire:

$$\forall \zeta \notin U_{\tilde{\mathcal{S}}}[s],$$

ce qui montre que $\zeta \in \Omega_F$.

De cette condition on déduit que $F \subseteq \Omega_F$ et donc, on a:

$$(4) \quad \forall F \in \mathcal{F} U_{\tilde{\mathcal{S}}}[F] \notin \mathcal{F}.$$

De la définition de l'ensemble Ω_F il résulte que les ensembles Ω_F et $U_{\tilde{s}}[\bigcup_{s \in F} \{s\}] = U_{\tilde{s}}[F]$ sont disjoints, ce qui montre que

$$(5) \quad \forall_{F \in \mathcal{F}} U_{\tilde{s}}[F] \notin \mathcal{F}.$$

La famille $\mathcal{F}$ étant un filtre $\mathcal{V}$ -Cauchy on déduit la relation

$$\exists_{F_0 \in \mathcal{F}} \forall_{s \in \Sigma} U_s[F_0] \in \mathcal{F}.$$

En remplaçant s par $\tilde{s}$ on déduit la relation $U_{\tilde{s}}[F_0] \in \mathcal{F}$. La relation (Y) ayant lieu pour $F \in \mathcal{F}$ il résulte que $U_{\tilde{s}}[F_0] \notin \mathcal{F}$, ce qui est absurde. Donc (X, T) est compact, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Gaal, S. A., *Point set topology*. Acad. Press (1964).
- [2] Kelley, J. L., *General Topology*. Van Nostrand (1955).
- [3] Petrișor, P. *Sur prolongement d'une mesure* (sous presse).

Reçu le 8. I. 1971

ITERATIVE CONSTRUCTION OF A SOLUTION OF NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS

WALTER PETRY

Düsseldorf

1. Introduction

Existence theorems for nonlinear eigenvalue problems of the form

$$(1.1) \quad f'(x) = \lambda g'(x),$$

where f, g resp., is a functional on a reflexive Banach space B , $f'(x), g'(x)$ resp., is the corresponding gradient, are considered in many papers (s. [13, 24, 4–7, 11]). These existence theorems are based on the existence of a relative extreme point of $f(x)$ with respect to the level surface $M_c = \{x \in B : g(x) = c\}$. Under suitable conditions it is proved that there exists at least one eigenelement, resp. an infinite number of eigenelements, on the level surface M_c .

The application of such existence theorems to nonlinear partial differential equations are considered in [3–7] and to integral equations of Hammerstein type in [10, 13, 24].

The existence of a positive eigenelement for nonlinear eigenvalue problems is considered in [14, 19] and applications to integral and differential equations can be found in [19, 12, 22, 21] and many other papers.

For integral equations of Hammerstein type with oscillation kernels the existence of oscillatory eigenelements can be proved with Schauder's fixed point theorem (s. [18, 9, 15, 23] and others).

For extremizing a functional $f(x)$ on a Banach space B with respect to the level surface M_c ALTMAN [1] constructed three different iteration processes. These iteration methods are rather complicated. To prove convergence of the iteration sequence a monotonicity condition for the functional f is used.

Another iteration method for the construction of an eigenelement and the corresponding eigenvalue is considered by SCHRÖDER [20], where