

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андриенко, В. А., *О необходимых условиях вложения классов функций H_p^w* . Математический сборник, 78 (120), 2, 280–300 (1969).
- [2] Бесов, О. В., *О некоторых условиях принадлежности к L_p производных периодических функций*, Научные доклады высшей школы, физ-матем. науки, 1, 13–17 (1959).
- [3] Харди, Г. Г., Литтлвуд, Д. Е., Полиа, Г., *Неравенства*, ГИ ИЛ, Москва, 1948.
- [4] Littlewood, S. and Paley, G., *Theorems on Fourier series and power series*. Journ. Lond., Math. Soc., 6, 230–233 (1931).
- [5] Marcinkievich J., *Sur les multiplicateurs des series de Fourier*. Studia Math., VIII, 79–91 (1931).
- [6] Никольский, С. М., *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*. Москва, 1969.
- [7] — *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера*. Сибирский математический журнал, 4, 6, 1342–1365 (1963).
- [8] Панджикдзе, Л. К., *Об одной теореме вложения*. Сообщения АН Груз. ССР, 56, 1, 21–24 (1969).
- [9] Потопов, М. К., *О некоторых условиях принадлежности к L_p смешанных производных*, Mathematica (Cluj) 10 (33), 355–367 (1968).
- [10] — *Изучение некоторых классов функций при помощи приближения „углом“*. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 117, 256–291 (1972).
- [11] — *Об одной теореме вложения*. Mathematica (Cluj), 13 (36), 2 (1971).
- [12] — *О приближении „углом“*. Тезисы докладов на коллоквиуме по конструктивной теории функций ((Венгрия, Будапешт, 24 августа — 3 сентября 1968). Труды коллоквиума по конструктивной теории функций, Венгрия. Будапешт, 1971 г., 371–399.
- [13] Тиман, М. Ф., *О некоторых теоремах вложения L_p -классов функций*. ДАН СССР, 193, 6, 1251–1254 (1970).
- [14] Ульянов, П. Л., *Вложение некоторых классов функций H_p^w* . Известия АН СССР, серия математическая, 32, 649–686 (1968).
- [15] — *О вложении некоторых классов функций*, Матем. заметки, 1, 4, 405–414 (1967).
- [16] Зигмунд, А. В., *Тригонометрические ряды*, т. II. Москва, 1965.

Поступило 10. VII. 1971

INTERVALLES D'INTERPOLATION
POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

par

DUMITRU RIPEANU

à Cluj

§ 1. Dans une communication faite à la Conférence sur la théorie constructive des fonctions à Varna [3] j'ai présenté le procédé suivant pour obtenir une classe d'équations différentielles linéaires qui admettent un intervalle donné $[a, b]$ comme intervalle d'interpolation pour l'ensemble de leurs solutions (ce qui sera exprimé pour la commodité par l'expression suivante: l'équation (1) jouit de la propriété $I_n[a, b]$): si

$$(1) \quad L(y) = y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = 0$$

est une équation de la classe considérée (avec $a_s \in C[a, b]$, $s = \overline{1, n}$), alors en désignant par ρ une fonction quelconque de la classe $C^{(n)}[a, b]$ et par $\varphi = \rho'$ sa dérivée, par $P_s(x)$ l'expression définie par la relation $(e^{\rho(x)})^{(s)} = P_s(x)e^{\rho(x)}$ (donc par la relation de récurrence

$$(2) \quad \begin{cases} P_{s+1}(x) = P'_s(x) + \varphi(x)P_s(x), & s = 0, 1, \dots; \\ P_0(x) \equiv 1 \end{cases}$$

et par $A_s(x)$ la somme

$$A_s(x) = \sum_{\sigma=0}^s C_{n-\sigma}^{s-\sigma} a_{\sigma}(x) P_{s-\sigma}(x) \quad (s = \overline{1, n}; a_0(x) \equiv 1^*)$$

les relations

$$(3) \quad A_s(x) \equiv 0 \quad (s = \overline{2, n})$$

donnent successivement $a_s(x)$ ($s = 2, 3, \dots, n$), sous la forme de polynômes du premier degré en $a_1(x)$, dont les coefficients sont des polynômes en $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(s-1)}(x)$.

*) au cas $s = n$, le symbole C_0^0 se remplace par 1.

L'équation (1) ainsi déterminée jouit de la propriété $I_n[a, b]$.
On a donc obtenu une classe d'équations (1) qui dépend de deux fonctions arbitraires et qui jouissent de la propriété $I_n[a, b]$.

§ 2. Le but de cette note est de présenter quelques remarques à propos du procédé sus — mentionné.

1. Les relations (3) réduisent — par le changement de fonction inconnue

$$(4) \quad y = e^{\rho} u$$

l'équation (1) à l'équation $u^{(n)} + A_1(x)u^{(n-1)} = 0$ où $A_1(x) = a_1 + n\varphi$, par conséquent on connaît la solution générale de l'équation (1):

$$(4_1) \quad y \equiv e^{\rho(x)} \left(l_0 + l_1 x + \dots + l_{n-2} x^{n-2} + \right. \\ \left. + C \int_a^x (x-s)^{n-1} e^{-\rho(s)} \frac{1}{0} a_1(\sigma) d\sigma ds \right),$$

où ρ est une primitive quelconque de φ , et $l_0, l_1, \dots, l_{n-2}, C$ sont des constantes arbitraires.

2. On peut évidemment obtenir des classes d'équations dépendant de $p(3 \leq p \leq n)$ fonctions soumises à la seule condition qu'une certaine équation différentielle construite à l'aide de ces fonctions possède la propriété $I_{p-1}[a, b]$. À cet effet on fait dans (1) le changement (4) et on obtient l'équation

$$(5) \quad u^{(n)} + A_1(x)u^{(n-1)} + \dots + A_n(x)u = 0$$

à laquelle on impose les conditions

$$(6) \quad A_s(x) \equiv 0 \quad (s = p, p+1, \dots, n).$$

L'équation devient alors

$$(7) \quad \begin{cases} (a) & v^{(p-1)} + A_1(x)v^{(p-2)} + \dots + A_{p-1}(x)v = 0 \\ (b) & v(x) = u^{(n-p+1)}(x) \end{cases}$$

Si l'équation (7a) possède la propriété $I_{p-1}[a, b]$, alors l'équation (5) possède la propriété $I_n[a, b]$ et l'équation (1) de même. En effet, si une solution u_0 de (5) s'annule en n points de $[a, b]$, alors conformément au théorème de Rolle, $v(x)$ s'y annule en au moins $p-1$ points, donc est

identiquement nulle. Par suite, u_0 l'est aussi, comme polynôme de degré $n-p$ (au plus) qui s'annule en n points. Les relations (6) déterminent successivement et explicitement $a_p, a_{p+1}, \dots, a_n$ en fonction de $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ et de φ (et ses dérivées). Il suffit donc de choisir $\varphi, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ arbitrairement dans l'ensemble des fonctions qui ont la propriété que l'équation (7) respective possède la propriété $I_{p-1}[a, b]$. On peut se servir à cet effet du résultat de DE LA VALLÉE-POUSSIN [2]: si l'on désigne en (7) par $M_s = \max_{x \in [a, b]} |A_s(x)|$, alors il existe la suite de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$ pour lesquels si la longueur de l'intervalle $[a, b]$ est inférieure à la racine positive de l'équation

$$(8) \quad \alpha_{p-1}M_{p-1}h^{p-1} + \alpha_{p-2}M_{p-2}h^{p-2} + \dots + \alpha_1M_1h - 1 = 0$$

alors l'équation (7) jouit de la propriété $I_{p-1}[a, b]$.

DE LA VALLÉE-POUSSIN a donné les coefficients $\alpha_s = \frac{1}{s!} (s = \overline{1, p-1})$; depuis, divers auteurs ont présenté des coefficients plus petits. Dans [1] on peut trouver quelques suites de tels coefficients, ainsi qu'une bibliographie relative au sujet. Une classe d'équations jouissant de la propriété $I_{p-1}[a, b]$ est, par exemple, constituée des équations (7) pour lesquelles les modules des coefficients $A_s(x) (s = \overline{1, p-1})$ sont assez petits pour vérifier la condition de de la Vallée-Poussin, qui engage les coefficients $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$.

3. Si l'on écrit en (7).

$$(9) \quad A_s(x) = \Phi_s(x) \quad (s = \overline{1, p-1})$$

où $\Phi_s(x)$ sont des fonctions de la classe $C[a, b]$, qui assurent à l'équation (7) la propriété $I_{p-1}[a, b]$, on obtient $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ en fonction de φ (et de ses dérivées) et de $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{p-1}$, après quoi les relations (6) donnent $a_p, a_{p+1}, \dots, a_n$ à l'aide des mêmes fonctions. On a ainsi une classe d'équations qui possèdent la propriété $I_n[a, b]$ et qui dépend des p fonctions $\varphi, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{p-1}$.

4. Les classes ainsi obtenues*) semblent plus générales que la classe obtenue en faisant en (8) $p = n+1$, c'est-à-dire que la classe d'équations (1) dont les coefficients satisfont à la relation

$$\alpha_n M_n h^n + \alpha_{n-1} M_{n-1} h^{n-1} + \dots + \alpha_1 M_1 h - 1 < 0$$

avec $M_s = \max_{x \in [a, b]} |a_s(x)| (s = \overline{1, n})$, par le fait que leurs coefficients sont des combinaisons linéaires (à coefficients variables) de fonctions satisfaisant à une restriction analogue, d'ordre moindre.

*) Par le procédé de la remarque 2.

5. Le procédé de la remarque 3 fournit une classe d'équations dépendant d'au plus p fonctions arbitraires, car même si les fonctions $\Phi_s (s = \overline{1, p-1})$ de (9) dépendaient d'un nombre quelconque N de fonctions arbitraires, les relations (9) donnent $a_s (s = \overline{1, p-1})$ sous la forme d'expressions dépendant de $\varphi, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{p-1}$ et les relations (6) donnent $a_s (s = \overline{p, n})$ sous la même forme. Ces fonctions $\varphi, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{p-1}$ peuvent donc être prises elles-mêmes pour les seules fonctions arbitraires dont dépend la classe respective d'équations différentielles.

6. On peut éviter des restrictions du genre de celles qui interviennent dans la remarque 2 en procédant comme suit: on désignera par $\Gamma_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ une classe d'équations (1) dépendant de $m (2 \leq m \leq n-1)$ fonctions arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ et jouissant de la propriété $\bar{I}_n[a, b]$. Admettons qu'on sait construire une telle classe de départ pour tout n .

On obtient alors une classe $\Gamma_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1})$ en faisant dans (1) $y = e^{\alpha_{m+1}(x)} u(x)$ (α_{m+1} fonction arbitraire) et en remarquant que dans (2) $A_s(x)$ dépend de α_{m+1} (par l'intermédiaire de ses dérivées, ce qu'on marquera par la notation $A_s(x) = A_s(\alpha_{m+1}(x))$). On utilisera alors le procédé indiqué à la remarque 3 avec $p_{m+1}(m+1 \leq p_{m+1} \leq n)$ à la place de p , c'est-à-dire qu'on prendra comme équation (7) l'équation

$$(10) \quad v^{(p_{m+1}-1)} + \Phi_1(x)v^{(p_{m+1}-2)} + \dots + \Phi_{p_{m+1}-1}(x)v = 0$$

de la classe $\Gamma_{p_{m+1}-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. On obtient alors les coefficients $a_s(x) (s = \overline{1, n})$ des équations (1) de la classe $\Gamma_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1})$.

Si l'on connaît la solution générale de l'équation (10)

$$(11) \quad v(x) = F(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_m(x), x, C_1, C_2, \dots, C_{p_{m+1}-1}),$$

alors (4) et (7) donnent la solution de l'équation (1) de la classe $\Gamma_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1})$:

$$(12) \quad y(x) = e^{\alpha_{m+1}(x)} \left[\pi_{n-p_{m+1}}(x) + \int_a^x \frac{(x-s)^{n-p_{m+1}}}{(n-p_{m+1})!} F(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_m(s), s, C_1, C_2, \dots, C_{p_{m+1}-1}) ds \right]$$

On a désigné d'une manière générale par $\pi_n(x)$ un polynôme de degré n à coefficients arbitraires.

7. On peut appliquer le procédé indiqué à la remarque 6 en prenant comme équation (7) de départ une équation construite selon le procédé

du § 1 avec $p_2 (3 \leq p_2 \leq n)$ à la place de p , dont les coefficients dépendent de deux fonctions arbitraires, désignées cette fois par $\varphi_1(x)$ et $\alpha(x)$. La classe de départ est donc ici $\Gamma_n(\varphi_1, \alpha)$. On en déduit par le procédé mentionné où l'on fait dans (1) le changement

$$(14) \quad y = e^{\varphi_1(x)} u(x)$$

la classe $\Gamma_n(\varphi_1, \varphi_2, \alpha)^*$. Pour construire la classe $\Gamma_n(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \alpha)$, on fait dans (1) le changement $y = e^{\varphi_2(x)} u(x)$ et on prend comme équation (7) de départ une équation de la classe $\Gamma_{p_2-1}(\varphi_1, \varphi_2, \alpha) (4 \leq p_2 \leq n)$. En continuant le procédé on obtient une classe $\Gamma_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \alpha)$ avec

$$(15) \quad 2 \leq m \leq n-1 \quad \text{et} \quad s+1 \leq p_s \leq n (s = \overline{2, m})$$

(l'inégalité $p_s \geq s+1$ est exigée par la remarque 5).

On peut d'ailleurs, écrire en ce cas de suite les solutions des équations obtenues. En effet (4₁) donne pour la solution d'une équation (7) (a) de la classe $\Gamma_{p_2-1}(\varphi_1, \alpha)$:

$$v(x) = e^{\varphi_1(x)} \left[\pi_{p_2-3}(x) + C \int_a^x (x-s)^{p_2-2} e^{-\int_a^s (\varphi_1(\sigma) - \alpha(\sigma)) d\sigma} ds \right],$$

après quoi (12) et (7) (b) donnent pour la solution de l'équation (1) de la classe $\Gamma_n(\varphi_1, \varphi_2, \alpha)$:

$$y = e^{\varphi_2(x)} \left[\pi_{n-p_2}(x) + \int_a^x \frac{(x-s)^{n-p_2}}{(n-p_2)!} e^{\varphi_1(s)} \left[\pi_{p_2-3}(s) + C \int_a^s (s-s_1)^{p_2-2} e^{-\int_a^{s_1} (\varphi_1(\sigma) - \alpha(\sigma)) d\sigma} ds_1 \right] ds \right]_{(1)}$$

En général, si la solution d'une équation de la classe

$$\Gamma_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \alpha) \quad \text{est} \quad y(x) = y_n(\rho_1(x), \rho_2(x), \dots, \rho_m(x), \alpha(x), x),$$

alors la solution d'une équation de la classe $\Gamma_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m+1}, \alpha)$ est

$$y(x) = e^{\varphi_{m+1}(x)} \left[\pi_{n-p_{m+1}}(x) + \int_a^x \frac{(x-s)^{n-p_{m+1}}}{(n-p_{m+1})!} y_{p_{m+1}-1}(\rho_1(s), \rho_2(s), \dots, \rho_m(s), \alpha(s), s) ds \right] = y_n(\rho_1(x), \rho_2(x), \dots, \rho_{m+1}(x), \alpha(x), x).$$

* on rappelle que $\varphi_s(x) = \rho'_s(x) (s = 1, 2, \dots)$

On remarquera que pour passer de la classe $\Gamma_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \alpha)$ à la classe $\Gamma_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m+1}, \alpha)$ on se sert de la solution $y_n(\rho_1(x), \rho_2(x), \dots, \rho_m(x), \alpha(x), x)$ où on y fait $n = p_{m+1} - 1$, ce qui fait que $y_n(\rho_1(x), \rho_2(x), \dots, \rho_m(x), \alpha(x), x)$ contient des factorielles de $p_3 - p_2 - 1$, $y_n(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \alpha, x)$ des factorielles de $p_4 - p_3 - 1$, $p_3 - p_2 - 1$, ce qui exige que ces nombres soient non-négatifs. En général, l'expression de $y_n(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m, \alpha, x)$ exige que les nombres $p_s - p_{s-1} - 1 (s = \overline{3, m})$ soient non-négatifs, donc

$$(16) \quad p_s - p_{s-1} - 1 \geq 0 \quad (s = \overline{3, m}).$$

(15) et (16) donnent $s + 1 \leq p_s \leq p_{s+1} - 1 (s = \overline{2, m-1})$. Grâce à (15) on peut donc toujours choisir les nombres $p_s (s = \overline{2, m})$ de cette manière*. Dans cette note on a entendu par „fonction arbitraire” une fonction continue dans l'intervalle $[a, b]$. Si dans les formules interviennent des dérivées de cette fonction, on a supposé que la fonction possède des dérivées de l'ordre requis continues dans cet intervalle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aramă, O et D. Ripianu, *Quelques recherches actuelles concernant l'équation de Ch. de la Vallée-Poussin relative au problème polylocal dans la théorie des équations différentielles*. Mathematica (Cluj), 8 (31), 1, 19-28 (1966).
- [2] Ch. de la Vallée-Poussin, *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n*. Journal de math. pures et appl. 8(9), 125-144 (1929).
- [3] Ripianu, D. *Intervalles d'interpolation relatifs aux équations différentielles linéaires*. Труды международной конференции по конструктивной теории функций. Варна. 19-25 мая 1970 pag. 265-268.

Reçu le 15. IV. 1972

* Il suffit de choisir ces nombres de telle manière qu'ils vérifient successivement les inégalités: $3 \leq p_2 \leq n - m + 2$, $p_2 + 1 \leq p_3 \leq n - m + 3$, ..., $p_{s-1} + 1 \leq p_s \leq n - m + s$, ..., $p_{m-2} + 1 \leq p_{m-1} \leq n - 1$, $p_{m-1} + 1 \leq p_m \leq n$.

UN PROBLÈME D'HOMOTOPIE RELATIF À UNE STRATIFICATION

par

MARIE-HÉLÈNE SCHWARTZ

à Paris

Introduction

Le présent article est la suite du précédent („Théorème d'approximation lié à une stratification” [7]) et ne peut pas être lu indépendamment de lui. Nous donnons ici un second théorème d'approximation; il est relatif, cette fois, non plus aux triangulations simpliciales que nous avons appelées (K) et dont chaque simplexe ouvert est dans une seule strate, mais à des triangulations cellulaires (D) , duales des précédentes; chaque cellule ouverte coupe alors chaque strate transversalement à un homéomorphisme près.

Pour justifier l'étude de tels complexes cellulaires, plaçons nous provisoirement dans le cas d'une variété analytique complexe, de dimension complexe n , munie d'une stratification analytique complexe en strates V_i ; cherchons à former, le long de squelettes de dimensions croissantes, des champs de vecteurs non nuls (ou plus généralement de r -repères) tangents, en chaque point x de V à celle des strates qui contient x . Si nous opérons le long des squelettes (K^q) , la dimension d'obstruction variera avec la strate. Si nous opérons le long des squelettes $(D)^q$, l'obstruction apparaît, pour toutes les strates, au passage de $(D)^{2n-1}$ à $(D)^{2n}$ (ou plus généralement de $(D)^{2p-1}$ à $(D)^{2p}$ avec $p = n - r + 1$). Dans quelle mesure ces obstructions dépendent-elles du choix de (D) ? Ce sont ces questions qui nous ont conduit, relativement à un couple de telles triangulations cellulaires $(\tilde{D})$ et (D) de V , à établir (théorème III, § 2), une homotopie entre l'identité sur V et une application f : l'image par f d'une cellule $\tilde{D}_\alpha^q$ n'est pas nécessairement une cellule de (D) mais, pour tout D_α^q , la restriction de f à $D_\alpha^q \cap f^{-1}(D_\alpha^q)$ a un degré topologique constant.