

Applying $\Omega'_{\alpha,x} \Omega'_{\beta,y}$ on both the sides of (3.3), after multiplying with $x^\mu y^\nu$, we obtain

$$(3.4) \quad \prod_{i=1}^r \frac{\Gamma(\mu+i)}{\Gamma(\mu-\alpha+i)} \prod_{j=1}^r \frac{\Gamma(\nu+j)}{\Gamma(\nu-\beta+j)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^m F \left[\begin{matrix} 1 \\ 1+r \\ 0 \\ 1+r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a \\ -n, -n, \mu+1, \nu+1, \dots, \mu+\nu, \nu+r \\ \dots \\ 1, 1, \mu-\alpha+1, \nu-\beta+1, \dots, \mu-\alpha+r, \nu-\beta+r \end{matrix} \right] \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} =$$

$$= \frac{m+1}{a} \sum_{p=0}^{\infty} \prod_{i=1}^r \frac{\Gamma(\mu-p-1+i)}{\Gamma(\mu-p-\alpha-1+i)} \prod_{j=1}^r \frac{\Gamma(\nu+p+j)}{\Gamma(\nu+p-\beta+j)} x^{-p-1} y^p \times$$

$$\times F \left[\begin{matrix} 1 \\ 1+r \\ 0 \\ 1+r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a-1 \\ -m, -m-1, \mu-p, \nu+p+1, \dots, \mu-p-1+r, \nu+p+r \\ \dots \\ 1, 1, \mu-p-\alpha, \nu+p-\beta, \dots, \mu-p-\alpha+r-1, \nu+p-\beta+r-1 \end{matrix} \right] \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

minus a similar expression with interchange of x and y in F .

The author is grateful to Dr. D. CHANDRA for his guidance towards the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1] Bhatt, R. C., Israel Journal of Mathematics, 3, 2, June 1965, 87-88.
[2] Chandra, D., Ganita (To appear).

Received 7.1.1971

Department of Mathematics and Astronomy,
Lucknow University,
Lucknow (INDIA)

EINE SCHNITTEIGENSCHAFT DER STÜTZFUNKTIONEN KOMPAKTER MENGEN IM $\mathbf{R}^n$

von

HORST KRAMER

Cluj

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer Schnitteigenschaft der Stützfunktionen von $n+1$ kompakten Mengen in allgemeiner Lage im n -dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbf{R}^n$ oder äquivalent mit einer Schnitteigenschaft der Randflächen der diesen kompakten Mengen im Raum $\mathbf{R}^{n+1}$ zugeordneten Kegel.

1. Bezeichnungen und Definitionen

$\mathbf{R}^n$ bezeichne den n -dimensionalen Euklidischen Raum mit den Punkten $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ und dem inneren Produkt $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Ist M eine Teilmenge von $\mathbf{R}^n$, so bezeichnen wir mit ∂M den Rand von M und mit $\text{conv } M$ die konvexe Hülle von M , d.h. den Durchschnitt aller konvexen Mengen in $\mathbf{R}^n$, welche M enthalten.

Definition 1. (siehe [7], [10]) Eine Teilmenge K von $\mathbf{R}^n$ ist ein Kegel mit der Spitze x^0 , wenn für jedes $\lambda \geq 0$ und $x \in K$

$$(1-\lambda)x^0 + \lambda x \in K$$

gilt. Ein Kegel K ist genau dann konvex, wenn aus $x, y \in K$, $x+y \in K$ folgt.

Ist K ein Kegel mit der Spitze x^0 , so bezeichnen wir mit K^s den bezüglich der Spitze x^0 zu K symmetrischen Kegel, d.h. es ist

$$K^s = \{x^0 - (x - x^0); x \in K\}.$$

Definition 2. Ist K ein abgeschlossener konvexer Kegel mit der Spitze x^0 so ist die Menge

$$K^* = \{x \mid \langle x - x^0, y - x^0 \rangle \leq 0 \text{ für alle } y \in K\}$$

ebenfalls ein abgeschlossener konvexer Kegel mit der Spitze x^0 . Wir nennen K^* den Dualkegel von K . Offensichtlich gilt $K^{**} = K$.

Definition 3. Sei H ein reeller linearer Raum. Man sagt, die $r+1$ Punkte $x^0, \dots, x^r \in H$ seien in allgemeiner Lage, wenn aus

$$\gamma_0 x^0 + \dots + \gamma_r x^r = 0 \text{ und } \gamma_0 + \dots + \gamma_r = 0$$

stets $\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0$ folgt.

Äquivalente Definitionen können folgendem von K. JAKOBS bewiesenen Satz ([3], Satz 4.7) entnommen werden: Sei H ein reeller, linearer Raum und $x^0, \dots, x^r \in H$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $x^0, \dots, x^r$ sind in allgemeiner Lage.
2. Für jedes $\rho = 0, \dots, r$ sind die Vektoren

$$x^0 - x^\rho, \dots, x^{\rho-1} - x^\rho, x^{\rho+1} - x^\rho, \dots, x^r - x^\rho$$

linear unabhängig.

3. Aus $\alpha_0 x^0 + \dots + \alpha_r x^r = \alpha'_0 x^0 + \dots + \alpha'_r x^r$

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_r = 1 = \alpha'_0 + \dots + \alpha'_r$$

folgt stets $\alpha_0 = \alpha'_0, \dots, \alpha_r = \alpha'_r$.

Ist H ein endlichdimensionaler reeller linearer Raum, $\dim H = n$, so muss in der obigen Definition $r \leq n$ vorausgesetzt werden.

Eine etwas allgemeinere Definition ist folgende ([2], Definition 5):

Definition 4. Sei H ein n -dimensionaler reeller linearer Raum. Man sagt, s Punkte in H seien in allgemeiner Lage, wenn je k von ihnen mit $1 \leq k \leq \min(s, n+1)$ ein $(k-1)$ -dimensionales Simplex aufspannen. Das bedeutet für $s \leq n+1$, dass die s Punkte ein $(s-1)$ -dimensionales Simplex aufspannen, und für $s \geq n+1$, dass keine $n+1$ der Punkte in einer Hyperebene liegen.

In der Arbeit [4] haben wir folgende Definition gegeben:

Definition 5. H sei ein n -dimensionaler, reeller, linearer Raum, $\mathcal{K} = \{K_j, j \in J\}$ eine Familie von Teilmengen des Raumes H . Die Familie $\mathcal{K}$ heißt in allgemeiner Lage, wenn für je $n+1$ voneinander verschiedene Glieder $K_1, \dots, K_{n+1}$ von $\mathcal{K}$, und für jede Wahl von $n+1$ Punkten $p^1, \dots, p^{n+1}$ mit $p^i \in K_i, i = 1, \dots, n+1$, die Punkte $p^1, \dots, p^{n+1}$ in allgemeiner Lage im Sinne der Definition 3 oder 4 sind. Das bedeutet, dass jede Hyperebene in H höchstens n Glieder der Familie $\mathcal{K}$ trifft.

Definition 6. Die Stützfunktion s einer konvexen, kompakten Menge C in $\mathbb{R}^n$ wird durch

$$s(u) = \sup_{x \in C} \langle x, u \rangle, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

definiert.

Lemma 1. Ist M eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$, so gilt für $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\sup_{x \in M} \langle x, u \rangle = \sup_{x \in \text{conv } M} \langle x, u \rangle$$

und

$$\inf_{x \in M} \langle x, u \rangle = \inf_{x \in \text{conv } M} \langle x, u \rangle$$

Beweis. Aus $M \subset \text{conv } M$ folgt sofort $\sup_{x \in M} \langle x, u \rangle \leq \sup_{x \in \text{conv } M} \langle x, u \rangle$. Andererseits gibt es nach dem Satz von Caratheodory ([1], [10]) für ein beliebiges $y \in \text{conv } M$ eine Darstellung als eine konvexe Kombination von höchstens $n+1$ Elementen aus M , d.h. es gibt $x^i \in M, i = 1, \dots, n+1$, und $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ derart, dass $y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i$ gilt. Werden die Ungleichungen $\sup_{x \in M} \langle x, u \rangle \geq \langle x^i, u \rangle$ mit λ_i multipliziert und für $i = 1, \dots, n+1$ addiert, so erhält man $\sup_{x \in M} \langle x, u \rangle \geq \langle y, u \rangle$. Da $y \in \text{conv } M$ beliebig genommen wurde, folgt $\sup_{x \in M} \langle x, u \rangle \geq \sup_{y \in \text{conv } M} \langle y, u \rangle$. Es gilt also: $\sup_{x \in M} \langle x, u \rangle = \sup_{y \in \text{conv } M} \langle y, u \rangle$. Ebenso wird auch die zweite Gleichung in Lemma 1 bewiesen.

Lemma 1 berechtigt uns also von der Stützfunktion einer kompakten Menge in $\mathbb{R}^n$ zu sprechen bzw. sie mit der Stützfunktion der konvexen Hülle der betreffenden Menge zu identifizieren.

Ist M eine kompakte Menge im $\mathbb{R}^n, b_{n+1} \in \mathbb{R}$ so ist

$$K = \{(x, x_{n+1}) \mid x \in \mathbb{R}^n, x_{n+1} \in \mathbb{R}, x_{n+1} \geq \sup_{y \in M} \langle y, x \rangle + b_{n+1}\}$$

ein konvexer Kegel in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Spitze in $b = (0, \dots, 0, b_{n+1})$ und

$$K^s = \{(x, x_{n+1}) \mid x \in \mathbb{R}^n, x_{n+1} \in \mathbb{R}, x_{n+1} \leq \inf_{y \in M} \langle y, x \rangle + b_{n+1}\}$$

der bezüglich der Spitze b zu K symmetrische Kegel. Wir werden K den der kompakten Menge M in $\mathbb{R}^{n+1}$ zugeordneten Kegel nennen. Offenbar hat die Randfläche ∂K von K die Darstellung $x_{n+1} = \sup_{y \in M} \langle y, x \rangle + b_{n+1}$

und die Randfläche von K^s die Darstellung $x_{n+1} = \inf_{y \in M} \langle y, x \rangle + b_{n+1}$, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$ gesetzt wurde.

2. In dem nun Folgenden interessiert uns, ob die Stützfunktionen von $n+1$ kompakten Mengen in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$ einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Wir beweisen dazu den folgenden

Satz 1. Es seien $M_1, \dots, M_{n+1}$ kompakte Mengen des n -dimensionalen Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n+1$. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 \inf_{a \in M_1} \langle a, x \rangle + (1 - \lambda_1) \sup_{a \in M_1} \langle a, x \rangle + c_1 &= \\ \lambda_2 \inf_{a \in M_2} \langle a, x \rangle + (1 - \lambda_2) \sup_{a \in M_2} \langle a, x \rangle + c_2 &= \\ (1) \quad \dots &= \dots = \\ \lambda_{n+1} \inf_{a \in M_{n+1}} \langle a, x \rangle + (1 - \lambda_{n+1}) \sup_{a \in M_{n+1}} \langle a, x \rangle + c_{n+1} & \end{aligned}$$

ist genau dann für jedes $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n+1$ lösbar, wenn die Mengenfamilie

$$(2) \quad \mathcal{F} = \{\text{conv } M_1, \dots, \text{conv } M_{n+1}\}$$

in allgemeiner Lage ist.

Beweis. Der Beweis der Hinlänglichkeit erfolgt in mehreren Schritten. Die dabei benutzte Methode ist im Grunde genommen jene welche wir in [5] beim Beweis des Satzes 1 angewendet haben.

Es seien $a^1, \dots, a^{n+1}$ Punkte in allgemeiner Lage in $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch

$$(3) \quad \varphi: x \mapsto (\langle a^1, x \rangle + c_1, \dots, \langle a^{n+1}, x \rangle + c_{n+1}).$$

In $\mathbb{R}^{n+1}$ sei H die Hyperebene

$$(4) \quad H = \{u: u = (u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, u_1 + \dots + u_{n+1} = 0\}.$$

χ sei die orthogonale Projektion des Raumes $\mathbb{R}^{n+1}$ auf H . Es gilt dann:

Lemma 2. Die Abbildung $\chi\varphi$ ist ein Homöomorphismus des Raumes $\mathbb{R}^n$ auf die Hyperebene H in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis. Aus der Stetigkeit des inneren Produkts und aus der Stetigkeit der orthogonalen Projektion χ folgt die Stetigkeit der Abbildung $\chi\varphi$. Die Abbildung $\chi\varphi$ ist surjektiv. Zum Nachweis sei

$$w = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

der normale Versor der Hyperebene H . Die orthogonale Projektion eines Vektors $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ auf H , kann dann unter der Form

$$u - \langle u, w \rangle w$$

geschrieben werden. Die orthogonale Projektion des Vektors

$$\varphi(x) = (\langle a^1, x \rangle + c_1, \dots, \langle a^{n+1}, x \rangle + c_{n+1})$$
 ist also

$$(\langle a^1, x \rangle + c_1, \dots, \langle a^{n+1}, x \rangle + c_{n+1}) - \left(\sum_{j=1}^{n+1} (\langle a^j, x \rangle + c_j) \right) \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right)$$

Es sei nun $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ ein Vektor in H , d.h. $v_1 + \dots + v_{n+1} = 0$. Wir werden zeigen, dass es ein x in $\mathbb{R}^n$ gibt derart, dass $\chi\varphi(x) = v$ ist, also:

$$(5) \quad \langle a^i, x \rangle + c_i - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} (\langle a^j, x \rangle + c_j) = v_i, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Durch Subtraktion der ersten Gleichung von den anderen Gleichungen erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$(5') \quad \langle a^i - a^1, x \rangle = v_i - v_1 + c_1 - c_i, \quad i = 2, 3, \dots, n+1.$$

Für einen gegebenen Vektor $v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in H$ hat das Gleichungssystem (5') eine eindeutige Lösung, weil die Vektoren $a^i - a^1$, $i = 2, 3, \dots, n+1$ laut Voraussetzung linear unabhängig sind. Da die Systeme (5) und (5') für jedes $v \in H$ äquivalent sind, folgt die Existenz und die Eindeutigkeit eines x , für welches $\chi\varphi(x) = v$ gilt. Die Abbildung $\chi\varphi$ ist also eineindeutig und stetig. Es bleibt noch die Stetigkeit der inversen Abbildung nachzuprüfen. Die Stetigkeit der inversen Abbildung folgt aus dem Brouwerschen Invarianzsatz des Gebietes ([9], Theorem 4.7.16). Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Lemma 3. Es seien $a^1, \dots, a^{n+1}$ Punkte in allgemeiner Lage in $\mathbb{R}^n$ und $x^0 \in \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems

$$(6) \quad \langle a^1, x \rangle + c_1 = \langle a^2, x \rangle + c_2 = \dots = \langle a^{n+1}, x \rangle + c_{n+1}.$$

S^{n-1} sei die geometrische Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit dem Zentrum in x^0 und von Radius r , $r > 0$. Weiter sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ die durch (3) definierte Abbildung. Die Einschränkung $\xi = \varphi|_{S^{n-1}}$ der Abbildung φ auf S^{n-1} ist dann eine wesentliche Abbildung von S^{n-1} in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta$ (d.h. ξ ist nicht zu der konstanten Abbildung von S^{n-1} in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta$ homotop), wobei Δ die durch

$$\Delta = \{u \mid u \in \mathbb{R}^{n+1} : u_1 = u_2 = \dots = u_{n+1}\}$$

definierte Gerade ist.

Beweis. Ist H die durch (4) definierte Hyperebene in $\mathbb{R}^{n+1}$ und 0 der Ursprung des Raumes $\mathbb{R}^{n+1}$ so ist $H \setminus \{0\}$ ein starker Deformationsretrakt ([8], S. 156) von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta$. Die entsprechende Deformationsretraktion ist z.B. die orthogonale Projektion χ von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta$ auf $H \setminus \{0\}$ und die entsprechende retrahierende Homotopie sei die Abbildung

$$F: (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta) \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta, \quad I = [0, 1]$$

definiert durch

$$F(u, t) \mapsto u - t \langle u, w \rangle w,$$

wobei w der zu H normale Versor ist. Es gilt

$$F(\cdot, 1) = \chi$$

und

$$F(\cdot, 0) = \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta}$$

ξ und $\chi\xi$ sind also homotope Abbildungen von S^{n-1} in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta$ und es folgt, dass ξ genau dann eine wesentliche Abbildung von S^{n-1} in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta$ ist, wenn $\chi\xi$ eine wesentliche Abbildung von S^{n-1} in $H \setminus \{0\}$ ist.

Aus der Definition der Abbildungen φ und χ folgt

$$\chi\varphi(x^0) = 0,$$

wobei 0 der Ursprung von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

$\chi\xi(S^{n-1})$ ist ein starker Deformationsretrakt von $H \setminus \{0\} = \chi\varphi(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$. Zum Nachweis sei r die Deformationsretraktion

$$r: H \setminus \{0\} \rightarrow \chi\xi(S^{n-1}),$$

welche durch

$$r: x \mapsto \chi\xi\left(x_0 + r \frac{(\chi\varphi)^{-1}(x) - x^0}{\|(\chi\varphi)^{-1}(x) - x^0\|}\right)$$

definiert wird. Die entsprechende retrahierende Homotopie sei

$$G: (\chi\varphi(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}) \times I \rightarrow \chi\varphi(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$$

der Form

$$G: (x, t) \mapsto \chi\varphi\left((1-t)(\chi\varphi)^{-1}(x) + t\left(x^0 + r \frac{(\chi\varphi)^{-1}(x) - x^0}{\|(\chi\varphi)^{-1}(x) - x^0\|}\right)\right).$$

Nach Lemma 2 ist die Abbildung G stetig. $H \setminus \{0\}$ ist also in $\chi\xi(S^{n-1})$ deformierbar. Wäre nun $\chi\xi$ eine unwesentliche Abbildung von S^{n-1} in $H \setminus \{0\}$, so wäre $H \setminus \{0\}$ in einen Punkt deformierbar, d.h. $H \setminus \{0\}$ wäre zusammenziehbar. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass die $(n-1)$ -te Homologiegruppe von $H \setminus \{0\}$ nichttrivial ist ($H_{n-1}(H \setminus \{0\}) \approx H_{n-1}(S^{n-1}) \approx \mathbb{Z}$) und andererseits für einen zusammenziehbaren Raum X $H_m(X) \approx 0$ für $m \geq 1$ gilt.

Lemma 4. Es sei M eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ und

$$M_t = p(1-t) + tM, \quad t \in I = [0, 1]$$

wobei tM das skalare Vielfache von M ist, d.h. $tM = \{tx : x \in M\}$. Weiter sei $\lambda \in I$. Dann ist

$$h(x, t) = \lambda \inf_{a \in M_t} \langle a, x \rangle + (1-\lambda) \sup_{a \in M_t} \langle a, x \rangle$$

eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}^{n+1} \times I$ in $\mathbb{R}$.

Beweis. Da $\sup_{a \in M_t} \langle a, x \rangle = -\inf_{a \in M_t} \langle -a, x \rangle$ ist, genügt es die Stetigkeit der Abbildung $g(x, t) = \inf_{a \in M_t} \langle a, x \rangle$ zu zeigen. Dazu sei $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t, t_0 \in I$. Es seien $x_{t_0} \in M_{t_0}$ und $y_{t_0} \in M_{t_0}$ derart, dass $g(x, t_0) = \langle x_{t_0}, x \rangle$, mit $x_{t_0} = t_0 u + (1-t_0)p$, $u \in M$ und

$$g(y, t) = \langle y_{t_0}, y \rangle, \quad \text{mit } y_{t_0} = t_0 v + (1-t_0)p, \quad v \in M \text{ ist.}$$

Wir betrachten noch die Punkte x_t in M_t und y_t in M_t , welche durch

$$x_t = tu + (1-t)p \quad \text{und} \quad y_t = t_0 v + (1-t_0)p$$

gegeben sind. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} g(x, t_0) &= \langle x_{t_0}, x \rangle \leq \langle y_{t_0}, x \rangle = \langle y_{t_0}, y \rangle + \langle y_{t_0}, x \rangle - \langle y_{t_0}, y \rangle = \\ &= g(y, t) + \langle y_{t_0}, x \rangle - \langle y_{t_0}, y \rangle. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$g(x, t_0) - g(y, t) \leq \langle y_i, x \rangle - \langle y_i, y \rangle = \langle p, x - y \rangle + t_0 \langle v - p, x \rangle - \\ - t \langle v - p, y \rangle = \langle p, x - y \rangle + t_0 \langle v - p, x - y \rangle + (t_0 - t) \langle v - p, y \rangle.$$

Wir haben also

$$g(x, t_0) - g(y, t) \leq \|p\| \cdot \|x - y\| + \|v - p\| \cdot \|x - y\| + \\ + |t_0 - t| \cdot \|y\| \cdot \|v - p\| \leq (d + \|p\|) \|x - y\| + d |t_0 - t| \cdot \|y\|,$$

wobei $d = \max_{z \in M} \|z - p\| < \infty$ ist.

Ebenso zeigt man, dass

$$g(y, t) = \langle y_i, y \rangle \leq \langle x_i, y \rangle = \langle x_i, x \rangle + \langle x_i, y \rangle - \langle x_i, x \rangle = \\ = g(x, t_0) + \langle x_i, y \rangle - \langle x_i, x \rangle.$$

Es gilt also:

$$g(y, t) - g(x, t_0) \leq \langle x_i, y \rangle - \langle x_i, x \rangle = \langle p, y - x \rangle + t \langle u - p, y \rangle - \\ - t_0 \langle u - p, x \rangle = \langle p, y - x \rangle + (t - t_0) \langle u - p, y \rangle + t_0 \langle u - p, y - x \rangle \leq \\ \leq \|p\| \cdot \|y - x\| + |t - t_0| \cdot \|y\| \cdot \|u - p\| + |t_0| \cdot \|u - p\| \cdot \|y - x\| \leq \\ \leq (d + \|p\|) \|x - y\| + |t - t_0| \cdot d \cdot \|y\|.$$

Es folgt

$$|g(y, t) - g(x, t_0)| \leq (d + \|p\|) \cdot \|x - y\| + d \cdot |t - t_0| \cdot \|y\|.$$

Damit ist Lemma 4 bewiesen.

Es seien nun $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$ kompakte Mengen in $\mathbb{R}^n$ derart, dass ihre konvexen Hüllen $\text{conv } M_1, \dots, \text{conv } M_{n+1}$ in allgemeiner Lage im Sinne der Definition 5 sind.

Durchläuft $(y^1, y^2, \dots, y^{n+1})$ das cartesische Produkt $\text{conv } M_1 \times \text{conv } M_2 \times \dots \times \text{conv } M_{n+1}$, so durchläuft die Lösung x des linearen Gleichungssystems

$$(7) \quad \langle y^1, x \rangle + c_1 = \langle y^2, x \rangle + c_2 = \dots = \langle y^{n+1}, x \rangle + c_{n+1}$$

eine Menge Ω . Aus der Kompaktheit der Mengen M_i folgt die Kompaktheit der konvexen Hüllen $\text{conv } M_i$, $i = 1, \dots, n+1$ und zusammen mit der obigen Voraussetzung der allgemeinen Lage der Mengen $\text{conv } M_i$, $i = 1, \dots, n+1$ folgt daraus die Kompaktheit der Menge Ω .

Es seien nun $p^i \in M_i$, $i = 1, \dots, n+1$ festgewählte Punkte und x^0 sei die Lösung des Gleichungssystems (7) mit $y^i = p^i$, $i = 1, \dots, n+1$. Wir betrachten eine Kugelfläche $S^{n-1} = \{x | x \in \mathbb{R}^n, \|x - x^0\| = r\}$ derart dass Ω im Inneren der Vollkugel $K^n = \{x | x \in \mathbb{R}^n, \|x - x^0\| \leq r\}$ enthalten ist. Es sei $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, die durch

$$\psi: x \mapsto (\lambda_1 \inf_{a \in M_1} \langle a, x \rangle + (1 - \lambda_1) \sup_{a \in M_1} \langle a, x \rangle + c_1, \dots, \\ \dots, \lambda_{n+1} \inf_{a \in M_{n+1}} \langle a, x \rangle + (1 - \lambda_{n+1}) \sup_{a \in M_{n+1}} \langle a, x \rangle + c_{n+1})$$

definierte Abbildung, wobei $\lambda_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n+1$.

Ist $\eta = \psi|_{S^{n-1}}$ die Einschränkung von ψ auf S^{n-1} , so folgt aus der Definition von S^{n-1} , dass $\eta(S^{n-1}) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta$. Angenommen es gebe ein $x \in S^{n-1}$ so dass $\psi(x) \in \Delta$, d.h. aber, dass $x \in \Omega$, also ein Widerspruch.

Sei φ die durch (3) definierte Abbildung mit $a^i = p^i$, $i = 1, \dots, n+1$. Es gilt dann

Lemma 5. Die Abbildung $\xi = \varphi|_{S^{n-1}}$ ist zu $\eta = \psi|_{S^{n-1}}$ homotop.

Beweis. Wir definieren $F: S^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ folgendermassen

$$F: (x, t) \mapsto (\lambda_1 \inf_{a \in M_{1,t}} \langle a, x \rangle + (1 - \lambda_1) \sup_{a \in M_{1,t}} \langle a, x \rangle + c_1, \dots, \\ \dots, \lambda_{n+1} \inf_{a \in M_{n+1,t}} \langle a, x \rangle + (1 - \lambda_{n+1}) \sup_{a \in M_{n+1,t}} \langle a, x \rangle + c_{n+1}),$$

wobei $M_{i,t} = (1 - t)p^i + tM_i$, $i = 1, \dots, n+1$ und p^i die oben gewählten Punkte sind. Nach Lemma 4 ist F eine stetige Abbildung von $S^{n-1} \times I$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ und es gilt für $x \in S^{n-1}$

$$F(x, 0) = \xi(x)$$

und

$$F(x, 1) = \eta(x).$$

Um Lemma 5 zu beweisen genügt es $\Delta \cap F(S^{n-1} \times I) = \emptyset$ zu zeigen. Angenommen es gebe $(x, t) \in S^{n-1} \times I$ derart, dass $F(x, t) \in \Delta$, d.h.

$$\lambda_1 \inf_{a \in M_{1,t}} \langle a, x \rangle + (1 - \lambda_1) \sup_{a \in M_{1,t}} \langle a, x \rangle + c_1 = \dots = \lambda_{n+1} \inf_{a \in M_{n+1,t}} \langle a, x \rangle + \\ + (1 - \lambda_{n+1}) \sup_{a \in M_{n+1,t}} \langle a, x \rangle + c_{n+1}.$$

Aus der Kompaktheit von $M_{i,t}$ folgt die Existenz der Elemente a^{1i} und a^{2i} aus $M_{i,t}$ derart, dass $\inf_{a \in M_{i,t}} \langle a, x \rangle = \langle a^{1i}, x \rangle$ und $\sup_{a \in M_{i,t}} \langle a, x \rangle = \langle a^{2i}, x \rangle$ gilt, $i = 1, \dots, n+1$. Dann ist

$$\lambda_i \inf_{a \in M_{i,t}} \langle a, x \rangle + (1 - \lambda_i) \sup_{a \in M_{i,t}} \langle a, x \rangle + c_i = \langle \lambda_i a^{1i} + (1 - \lambda_i) a^{2i}, x \rangle + c_i.$$

x wäre also Lösung des Gleichungssystems (7), in welchem $y^i = \lambda_i a^{1i} + (1 - \lambda_i) a^{2i}$ gesetzt wurde. Die Voraussetzung $\lambda_i \in [0, 1]$ impliziert $\lambda_i a^{1i} + (1 - \lambda_i) a^{2i} \in \text{conv } M_{i,t} \subset \text{conv } M_i$. Daraus folgt $x \in \Omega$, also ein Widerspruch. Damit ist Lemma 5 bewiesen.

Beweis der Hinlänglichkeit von Satz 1. S^{n-1} sei die in Lemma 5 benutzte Kugelfläche und K^n die entsprechende Vollkugel. Es genügt zu zeigen, dass

$$\psi(K^n) \cap \Delta \neq \emptyset.$$

Wir nehmen das Gegenteil an. Dann wäre die Abbildung $\eta = \psi|_{S^{n-1}}$ homotop zu der konstanten Abbildung in der Menge der stetigen Abbildungen von S^{n-1} in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta$. Nach Lemma 5, hätte $\xi = \varphi|_{S^{n-1}}$ dieselbe Eigenschaft. Das würde aber Lemma 3 widersprechen. Es sei also x^0 ein Punkt in K^n derart, dass $\psi(x^0) \in \Delta$ gilt. Dann haben wir

$$\lambda_1 \inf_{a \in M_1} \langle a, x^0 \rangle + (1 - \lambda_1) \sup_{a \in M_1} \langle a, x^0 \rangle = \dots = \lambda_{n+1} \inf_{a \in M_{n+1}} \langle a, x^0 \rangle + (1 - \lambda_{n+1}) \sup_{a \in M_{n+1}} \langle a, x^0 \rangle.$$

Somit ist x^0 Lösung des Gleichungssystems (1). Damit ist die Hinlänglichkeit von Satz 1 bewiesen.

Beweis der Notwendigkeit. Das Gleichungssystem (1) sei für beliebiges $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n+1$ lösbar. Wir nehmen an, die konvexen Hüllen $\text{conv } M_1, \dots, \text{conv } M_{n+1}$ der kompakten Mengen $M_1, \dots, M_{n+1}$ aus $\mathbb{R}^n$ seien nicht in allgemeiner Lage. Dann gibt es eine Hyperebene H in $\mathbb{R}^n$, so dass

$$H \cap \text{conv } M_i \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Es sei $a^i \in H \cap \text{conv } M_i$, $i = 1, \dots, n+1$. Laut Lemma 1 gilt

$$\sup_{a \in M_i} \langle a, x \rangle = \sup_{a \in \text{conv } M_i} \langle a, x \rangle \geq \langle a^i, x \rangle, \quad i = 1, \dots, n+1$$

und

$$\inf_{a \in M_i} \langle a, x \rangle = \inf_{a \in \text{conv } M_i} \langle a, x \rangle \leq \langle a^i, x \rangle, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Nach dem Satz von Radon (siehe [2], [6], oder [10]) kann die Menge der $n+1$ Punkte a^i , $i = 1, \dots, n+1$ in dem $(n-1)$ -dimensionalen Raum H in zwei fremde Teilmengen zerlegt werden, so dass ihre konvexen Hüllen nichtleeren Durchschnitt haben. Ist $A = \{a^i, i = 1, \dots, n+1\}$ so gibt es also eine Partition $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ mit $\text{conv } A_1 \cap \text{conv } A_2 \neq \emptyset$. Es sei $b \in \text{conv } A_1 \cap \text{conv } A_2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass für ein k , $1 \leq k \leq n$, $A_1 = \{a^1, a^2, \dots, a^k\}$ und $A_2 = \{a^{k+1}, a^{k+2}, \dots, a^{n+1}\}$ ist. Für b gelten dann folgende Darstellungen

$$(8) \quad b = \sum_{i=1}^k \mu_i a^i = \sum_{j=k+1}^{n+1} \nu_j a^j$$

mit $0 \leq \mu_i \leq 1$, $i = 1, \dots, k$, $\sum_{i=1}^k \mu_i = 1$ und $0 \leq \nu_j \leq 1$, $j = k+1, \dots, n+1$ und $\sum_{j=k+1}^{n+1} \nu_j = 1$. Es sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$. Setzt man $c_i = \alpha$, $\lambda_i = 1$ für $i = 1, \dots, k$ und $c_j = \beta$, $\lambda_j = 0$, $j = k+1, \dots, n$, so kann das Gleichungssystem (1) mit den damit definierten $c = (c_1, \dots, c_{n+1})$ und $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ unter der Form

$$\begin{aligned} \inf_{a \in M_1} \langle a, x \rangle + \alpha &= \inf_{a \in M_1} \langle a, x \rangle + \alpha = \dots = \inf_{a \in M_k} \langle a, x \rangle + \alpha = \\ &= \sup_{a \in M_{k+1}} \langle a, x \rangle + \beta = \sup_{a \in M_{k+2}} \langle a, x \rangle + \beta = \dots = \sup_{a \in M_{n+1}} \langle a, x \rangle + \beta \end{aligned}$$

geschrieben werden. Laut Voraussetzung hat dieses Gleichungssystem eine Lösung $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Es sei

$$\gamma = \inf_{a \in M_1} \langle a, x^0 \rangle + \alpha = \dots = \sup_{a \in M_{n+1}} \langle a, x^0 \rangle + \beta$$

Es gilt dann;

$$\langle a^i, x^0 \rangle + \alpha \geq \inf_{a \in M_i} \langle a, x^0 \rangle + \alpha = \gamma, \quad i = 1, \dots, k$$

und

$$\langle a^j, x^0 \rangle + \beta \leq \sup_{a \in M_j} \langle a, x^0 \rangle + \beta = \gamma, \quad j = k+1, \dots, n+1.$$

Werden die Ungleichungen $\langle a^i, x^0 \rangle \geq \gamma - \alpha$ mit μ_i multipliziert und für $i = 1, 2, \dots, k$ addiert, so erhält man entsprechend der Darstellung (8) von b

$$\langle b, x^0 \rangle \geq \gamma - \alpha.$$

Ebenso erhält man aus den Ungleichungen

$$\langle a^j, x^0 \rangle \leq \gamma - \beta$$

durch Multiplikation mit v_j und Addition

$$\langle b, x^0 \rangle \leq \gamma - \beta.$$

Das ist ein Widerspruch zu $\alpha < \beta$. Damit ist die Notwendigkeit von Satz 1 bewiesen.

Bemerkung. Der Beweis der Notwendigkeit von Satz 1 wurde in der schwächeren Voraussetzung, dass das Gleichungssystem (1) für beliebiges $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ und beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\lambda_i = 0$ oder $\lambda_i = 1$ lösbar ist, bewiesen. Gerade dieser Fall eignet sich für folgende geometrische Deutung:

Es seien K_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$, konvexe Kegel im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit den Spitzen $s^i = (0, \dots, 0, b_i)$ derart, dass für jedes i der Halbstrahl $\{s^i + te_{n+1} \mid t > 0\}$ sich im Inneren des konvexen Kegels K_i befindet. Für jedes i , $i = 1, \dots, n+1$, betrachten wir die Hyperebene $H_i = \{x \mid x \in \mathbb{R}^{n+1}, x_{n+1} = b_i - 1\}$ und wir setzen $M_i = K_i^* \cap H_i$, wobei K_i^* der Dualkegel des Kegels K_i ist. Mit M_i^0 bezeichnen wir die Projektion der Menge M_i auf die Hyperebene $H_0 = \{x \mid x \in \mathbb{R}^{n+1}, x_{n+1} = 0\}$. Laut

L. SANDGREN [7] besteht folgender Zusammenhang zwischen dem Kegel K_i und der Menge M_i^0 . Die Randfläche ∂K_i des Kegels K_i hat die Darstellung

$$x_{n+1} = \sup_{a \in M_i^0} \langle x, a \rangle + b_i$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$ gesetzt wurde und H_0 mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert wurde.

Satz 1 kann dann folgendermassen aufgefasst werden: Die Randflächen der Kegel $\lambda_i K_i + (1 - \lambda_i) K_i^s$, $i = 1, \dots, n+1$ haben genau dann für jede Wahl von $\lambda_i \in \{0, 1\}$ und b_i je einen gemeinsamen Schnittpunkt, wenn die Mengen M_i^0 , $i = 1, \dots, n+1$ in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$ sind.

LITERATUR

- [1] Carathéodory, C., Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rend. Circ. Mat. Palermo 32, 193–217 (1911).
- [2] Eckhoff, J., Der Satz von Radon in konvexen Produktstrukturen. I–II Monatshefte für Mathematik 72, 303–314 (1968); 73, 7–30 (1969).
- [3] Jakobs, K., Extrempunkte konvexer Mengen, Selecta Mathematica III, Heidelberg Taschenbücher, Springer-Verlag, 1971.

- [4] Kramer, H. and Németh A. B., Supporting Spheres for Families of Independent Convex Sets, Archiv der Mathematik, 24, 91–96 (1973).
- [5] — Equally spaced points for families of compact sets in Euclidean spaces, (erscheint demnächst).
- [6] Radon, J., Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten, Mathematische Annalen 83, 113–115 (1921).
- [7] Sandgren, L., On convex cones, Mathematica Scandinavica 2, 19–28 (1954).
- [8] Schubert, H., Topologie, B. G. Teubner, Stuttgart, 1969.
- [9] Spanier, E. H., Algebraic Topology, McGraw Hill Book Company, New York–Toronto–London–Sydney, 1966.
- [10] Valentine, F. A., Konvexe Mengen, B. I. Mannheim, 1968.

Eingegangen am 14. V. 1973