

SUR UN TYPE DE COMPACTIFICATION

par

PETRU A. PETRIȘOR

à Cluj

1. Généralités

Un espace topologique est formé d'un ensemble de points désigné par une lettre majuscule droite, et un ensemble d'ouverts, désigné par une lettre majuscule ronde ou une lettre grecque. Par exemple, les espaces topologiques $(E, \mathcal{E})$ ou (H, μ) . Souvent, il sera simplement désigné par l'ensemble de ses points, ou l'ensemble de ses ouverts. Si G est un ouvert de l'espace topologique $(E, \mathcal{E})$, nous dirons parfois que G est $\mathcal{E}$ -ouvert.

Un espace topologique sera qualifié de compact lorsque tous ses recouvrements ouverts incluent un sous-recouvrement fini.

Une compactification sur E est un couple (f, Y) , où Y est un espace topologique compact, et f un homéomorphisme de E sur une partie dense de Y . En fait, sauf mention explicite du contraire, nous supposons que E est un sous-espace dense non vide de l'espace topologique Y , et nous sous-entendons que l'application f est l'application identique $E \rightarrow Y$.

Si $(E, \mathcal{E})$ est un espace topologique, nous désignerons respectivement par $\bar{A}$ et $A^{\mathcal{E}}$, les adhérences de A dans $(E, \mathcal{E})$.

2. Notations et terminologie

Nous désignerons par $\mathfrak{A}(E)$ la famille des sous-ensembles de l'ensemble donné E et par $\mathcal{L}$ l'ensemble des applications $\psi: \mathfrak{A}(E) \rightarrow \mathfrak{A}(E)$ qui vérifie les axiomes suivants:

(a) $\psi(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} \psi(A_{\alpha})$ pour toute famille de parties A_{α} de l'ensemble E .

(b) $\psi(\psi(A)) = \psi(A)$ pour tout sous-ensemble A de l'ensemble E .
 (c) $\Phi(\psi(A)) \subseteq \Phi(A)$ et $\psi(\Phi(A)) \subseteq \psi(A)$ pour toute paire ayant les propriétés (a) et (b).

L'ensemble $A \subseteq E$ s'appelle ψ -ensemble si A et $\psi(A)$ appartiennent à $\mathfrak{S}$, où $\mathfrak{S}$ est un filtre sur E qui appartient à la famille $\mathfrak{F}$ des filtres sur E qui vérifie la condition suivante: si $\mathfrak{S}'$ et $\mathfrak{S}''$ appartiennent à $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}' \cap \mathfrak{S}'' \neq \emptyset$, alors $\mathfrak{S}'$ et $\mathfrak{S}''$ sont comparables. Nous désignerons par $\mathcal{A}_\psi$ la famille des ψ -ensembles sur E et par $\mathfrak{B}_\psi$ l'anneau généré par la famille $\mathcal{A}_\psi$.

Définissons l'opérateur $\tau_\psi: \mathfrak{A}(\mathfrak{A}(E)) \times \mathfrak{A}(\mathfrak{A}(E)) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{A}(E))$ de la manière suivante:

$$\tau_\psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \{Y \subseteq E: \exists_{A \in \mathcal{A}, A \neq \emptyset} Y \cap A \in \mathfrak{B}\}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont les familles de parties de l'ensemble E ([1]). Si $\mathcal{A} = \mathfrak{B}$, alors on écrira $\tau_\psi(\mathcal{A})$ pour $\tau_\psi(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.

2. Propriétés de la famille $\mathcal{A}_\psi$ ($\psi \in L$)

Dans ce paragraphe, nous allons établir quelques propriétés de la famille $\mathcal{A}_\psi$ et nous montrerons que la connaissance d'une famille $\mathcal{A}_\psi$ sur E permet la construction d'une compactification de E .

THÉOREME 1. Si $\psi \in L$, alors $\tau_\psi(\mathcal{A}_\psi) = \mathcal{A}_\psi$.

Démonstration. Si $Y \in \tau_\psi(\mathcal{A}_\psi)$, alors nous avons la condition suivante:

$$\exists_{A_0 \in \mathcal{A}_\psi, A_0 \neq \emptyset} Y \cap A_0 \in \mathcal{A}_\psi.$$

De $A_0 \neq \emptyset$ on déduit qu'il existe une base de filtre $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}}$ est l'élément maximal de la famille ordonnée de bases de filtres sur E qui contient l'ensemble A_0) qui génère le filtre $\mathfrak{S}$.

Donc $A_0 \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{S}$.

De $A_0 \in \mathcal{A}_\psi$ on déduit que A_0 et $\psi(A_0)$ appartiennent à la famille $\mathfrak{S}$. De la relation $Y \cap A_0 \in \mathcal{A}_\psi$ et de la définition de la famille $\mathcal{A}_\psi$ on déduit que $Y \cap A_0 \neq \emptyset$. Donc il existe un filtre $\mathfrak{S}' \in \mathfrak{F}$ tel que $Y \cap A_0 \in \mathfrak{S}'$. De l'inclusion $Y \cap A_0 \subseteq A_0$ nous déduisons la relation $A_0 \in \mathfrak{S}'$. Dans la famille des filtres sur E qui contient l'ensemble A_0 , $\mathfrak{S}$ étant l'élément maximal, on peut écrire $\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{S}$. Donc $Y \cap A_0 \in \mathfrak{S}$. De $Y \cap A_0 \in \mathfrak{S}$ on déduit que $\psi(Y \cap A_0) \in \mathfrak{S}$. En vertu de la condition $Y \cap A_0 \subseteq Y$, l'ensemble Y appartient au filtre $\mathfrak{S} \in \mathfrak{F}$. L'inclusion $Y \cap A_0 \subseteq Y$ et la propriété 1 de l'application ψ impliquent que $\psi(Y \cap A_0) \subseteq \psi(Y)$, c'est-à-dire que $\psi(Y) \in \mathfrak{S}$. Donc Y et $\psi(Y)$ appartiennent au filtre $\mathfrak{S} \in \mathfrak{F}$. Le théorème est démontré.

Appelons Ω la famille $\{\tau_\psi(\mathfrak{B}_\psi): \psi \in L\}$.

THÉOREME 2. La famille $(\Omega, \subseteq)$ constitue une demi-lattice.

Démonstration. Pour chaque couple $(\psi, \varphi) \in L \times L$, l'application

$$\Phi: \mathfrak{A}(E) \rightarrow \mathfrak{A}(E), \Phi(Y) = \psi(Y) \cup \varphi(Y)$$

Y étant un sous-ensemble arbitraire de l'ensemble E , appartient à la famille Ω .

En effet, nous avons: $\Phi(\bigcup_\alpha Y_\alpha) = \psi(\bigcup_\alpha Y_\alpha) \cup \varphi(\bigcup_\alpha Y_\alpha)$.

Revenons à la propriété (1) de la famille L , la dernière égalité peut s'écrire sous la forme:

$$\Phi(\bigcup_\alpha Y_\alpha) = [\bigcup_\alpha \psi(Y_\alpha)] \cup [\bigcup_\alpha \varphi(Y_\alpha)]$$

c'est-à-dire $\Phi(\bigcup_\alpha Y_\alpha) = \bigcup_\alpha [\psi(Y_\alpha) \cup \varphi(Y_\alpha)]$, ce qui implique la relation:

$$(3.1) \quad \Phi(\bigcup_\alpha Y_\alpha) = \bigcup_\alpha \Phi(Y_\alpha).$$

Revenons à la propriété (2) de la famille L , on a:

$$\begin{aligned} \Phi[\Phi(Y)] &= \Phi[\psi(Y) \cup \varphi(Y)] = \Phi[\psi(Y)] \cup \Phi[\varphi(Y)] = \\ &= \psi[\psi(Y)] \cup \varphi[\psi(Y)] \cup \psi[\varphi(Y)] \cup \varphi[\varphi(Y)] = \\ &= \psi(Y) \cup \psi[\varphi(Y)] \cup \varphi[\psi(Y)] \cup \varphi(Y). \end{aligned}$$

Dans la dernière égalité nous utilisons la propriété (3) de la famille L et montrons que $\Phi(\Phi(Y)) = \psi(Y) \cup \varphi(Y)$, c'est-à-dire:

$$(3.2) \quad \Phi[\Phi(Y)] = \Phi(Y).$$

Des propriétés (1) et (3) de la famille L , nous déduisons pour chaque $\zeta \in L$ la relation:

$$\begin{aligned} \zeta[\Phi(Y)] &= \zeta[\psi(Y) \cup \varphi(Y)] = \\ &= \zeta[\psi(Y)] \cup \zeta[\varphi(Y)] \subseteq \zeta(Y) \cup \zeta(Y) = \\ &= \zeta(Y), \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$(3.3) \quad \zeta[\Phi(Y)] \subseteq \zeta(Y).$$

On déduit comme ci dessus l'égalité:

$$(3.4) \quad \Phi[\zeta(Y)] \subseteq \Phi(Y).$$

De (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) on déduit que $\Phi \in L$.

Si $Y \in \mathcal{A}_\psi$, alors on déduit l'existence d'un filtre $\mathfrak{S} \in \mathcal{F}$ tel que les ensembles Y et $\psi(Y)$ appartiennent à $\mathfrak{S}$.
De la définition de l'application Φ et des relations

$$Y \in \mathfrak{S}, \psi(Y) \in \mathfrak{S}$$

on déduit que $Y \in \mathcal{A}_\Phi$, c'est-à-dire que

$$(3.5) \quad \mathcal{A}_\psi \subseteq \mathcal{A}_\Phi.$$

Pour $Y \in \mathcal{A}_\Phi$, nous trouvons un filtre $\mathfrak{S} \in \mathcal{F}$ tel que les ensembles Y et $\varphi(Y)$ appartiennent à $\mathfrak{S}$. De la définition de l'application Φ et des relations $Y \in \mathfrak{S}$ et $\varphi(Y) \in \mathfrak{S}$ on déduit que $Y \in \mathcal{A}_\psi$, c'est-à-dire que

$$(3.6) \quad \mathcal{A}_\Phi \subseteq \mathcal{A}_\psi.$$

De (3.5) et (3.6) il résulte que le théorème est démontré.

On notera avec Ω' la famille $\{Y \in \tau_e(\mathfrak{B}^\psi) : \psi \in L\}$.

THÉOREME 3. La famille Ω' est un anneau par rapport à la intersection et à la reunion.

Démonstration. Si $Y_1 \in \Omega'$ et $Y_2 \in \Omega'$, alors $Y_1 \in \tau_e(\mathfrak{B}^\psi)$, $Y_2 \in \tau_e(\mathfrak{B}^\varphi)$, c'est-à-dire $Y_1 \cup Y_2 \in \tau_e(\mathfrak{B}^\psi) \cup \tau_e(\mathfrak{B}^\varphi) = \tau_e(\mathfrak{B}^\psi \cup \mathfrak{B}^\varphi)$. Du théorème 3 on déduit l'existence d'un élément $\Phi \in L$, tel que $\mathcal{A}_\psi \subseteq \mathcal{A}_\Phi$ et $\mathcal{A}_\varphi \subseteq \mathcal{A}_\Phi$. Donc nous avons l'inclusion :

$$(3.7) \quad \mathcal{A}_\psi \cup \mathcal{A}_\varphi \subseteq \mathcal{A}_\Phi.$$

En désignant par $\mathfrak{B}^{\psi, \varphi}$ l'anneau engendré par l'ensemble $\mathcal{A}_\psi \cup \mathcal{A}_\varphi$, la relation (3.7) nous conduit à :

$$(3.8) \quad \mathfrak{B}^{\psi, \varphi} \subseteq \mathfrak{B}^\Phi.$$

De $\mathcal{A}_\psi \subseteq \mathfrak{B}^{\psi, \varphi}$ on déduit que $\mathfrak{B}^\psi \subseteq \mathfrak{B}^{\psi, \varphi}$ et de $\mathcal{A}_\varphi \subseteq \mathfrak{B}^{\psi, \varphi}$ nous concluons que $\mathfrak{B}^\varphi \subseteq \mathfrak{B}^{\psi, \varphi}$, c'est-à-dire que :

$$(3.9) \quad \mathfrak{B}^\psi \cup \mathfrak{B}^\varphi \subseteq \mathfrak{B}^\Phi.$$

De la définition de l'application τ_e nous déduisons :

$$\tau_e(\mathfrak{B}^\psi \cup \mathfrak{B}^\varphi) \subseteq \tau_e(\mathfrak{B}^\Phi), \text{ c'est-à-dire } \tau_e(\mathfrak{B}^\psi) \cup \tau_e(\mathfrak{B}^\varphi) \subseteq \tau_e(\mathfrak{B}^\Phi).$$

Donc :

$$(3.10) \quad Y_1 \cup Y_2 \in \tau_e(\mathfrak{B}^\Phi),$$

c'est-à-dire $Y_1 \cup Y_2 \in \Omega'$.

On montre exactement de la même manière que $Y_1 \cap Y_2 \in \Omega'$. Le théorème est démontré.

THÉOREME 4. Si $Y \in \Omega'$ et $x \notin Y$, alors il existe un $T \in \Omega'$ tel que $x \in T$ et $Y \cap T = \emptyset$.

Démonstration. Si $Y \in \Omega'$, alors $Y \in \tau_e(\mathfrak{B}^\psi)$. De $x \notin Y$ on déduit que $\{x\} \cap Y = \emptyset$, c'est-à-dire $\{x\} \in \tau_e(\tau_e(\mathfrak{B}^\psi), \tau_e(\mathfrak{B}^\psi)) = \tau_e(\mathfrak{B}^\psi)$. Pour $T = \{x\}$ nous avons $T \in \Omega$, $x \in T$ et $T \cap Y = \emptyset$. Le théorème est démontré.

THÉOREME 5. Si $Y_1 \in \Omega'$ et $Y_2 \in \Omega'$ sont deux ensembles disjoints, alors il existe deux ensembles $U \in \Omega'$ et $V \in \Omega'$ tels que $Y_1 \cap U = Y_2 \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = E$.

Démonstration. De $Y_1 \in \Omega'$ et $Y_2 \in \Omega'$ on déduit que $Y_1 \in \tau_e(\mathfrak{B}^\psi)$ et $Y_2 \in \tau_e(\mathfrak{B}^\varphi)$, mais $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ et donc nous avons l'égalité : $Y_2 \in \tau_e(\tau_e(\mathfrak{B}^\psi), \tau_e(\mathfrak{B}^\psi)) = \tau_e(\mathfrak{B}^\psi)$, c'est-à-dire $Y_1 \in \tau_e(\mathfrak{B}^\varphi)$ et $Y_2 \in \tau_e(\mathfrak{B}^\psi)$. On désignera par N la famille $\{(T_1, T_2) : T_1, T_2 \in \Omega', T_1 \cap Y_1 = T_2 \cap Y_2 = \emptyset\}$. De $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ on déduit que $(Y_1, Y_2) \in N$, c'est-à-dire que la famille N est non vide.

Sur la famille N nous définissons la relation d'ordre $<$ de la manière suivante :

$$(3.11) \quad (T_1, T_2) < (T'_1, T'_2) \Leftrightarrow T_1 \subseteq T'_1 \text{ et } T_2 \subseteq T'_2$$

et considérons la famille ordonnée $(N, <)$.

On désignera par $N' = \{(T_1^\alpha, T_2^\alpha) : \alpha \in \Gamma\}$ une sous-famille totalement ordonnée de la famille $(N, <)$. La paire $(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} T_1^\alpha, \bigcup_{\alpha \in \Gamma} T_2^\alpha)$ appartient à N' et est un majorant de la famille N' . En vertu du lemme de Zorn, la famille $(N, <)$ possède un élément maximal (U, V) . Si $x \in Y_1$, alors $x \notin Y_2$, c'est-à-dire $\{x\} \cap Y_2 = \emptyset$. Donc $\{x\} \in \tau_e(\mathfrak{B})$. La paire (U, V) étant un élément maximal de la famille, on déduit que $x \in V$, puisque $Y_2 \in \Omega'$, $\{x\} \in \Omega'$ et $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $\{x\} \cap Y_2 = \emptyset$, c'est-à-dire $(Y_2, \{x\}) \in N$ qui montre que $(Y_2, \{x\}) < (U, V)$. Donc $Y_1 \subseteq V$.

On montre exactement de la même manière que $Y_2 \subseteq U$.

Si $U \cup V \subset E$, alors il existe un $x \in E - (U \cup V)$. De $U \in \Omega'$ et $V \in \Omega'$ on déduit que $U \in \tau_e(\mathfrak{B}^\psi)$ et $V \in \tau_e(\mathfrak{B}^\varphi)$. La famille Ω' étant un anneau on déduit l'existence d'un élément $\Phi \in L$ tel que $\tau_e(\mathfrak{B}^\psi) \subseteq \tau_e(\mathfrak{B}^\Phi)$ et $\tau_e(\mathfrak{B}^\varphi) \subseteq \tau_e(\mathfrak{B}^\Phi)$. Donc on a

$$(3.12) \quad U \cup V \in \tau_e(\mathfrak{B}^\Phi),$$

c'est-à-dire $\{x\} \in \tau_e(\mathfrak{B}^\Phi)$. De $x \notin U$ et $Y_2 \subset U$ on déduit que $x \notin Y_2$ et donc $\{x\} \cap Y_2 = \emptyset$, c'est-à-dire $x \in V$, contrairement à l'hypothèse. En conséquence on a $E = U \cup V$ et le théorème est démontré.

On désignera par Σ une famille de parties de l'ensemble E et par τ_e^T la famille suivante : $\{\tau_e(\mathfrak{B}^\psi) : T \in \Sigma \cap \tau_e(\mathfrak{B}^\psi)\}$. Puisque $T \in \tau_e^T$ on déduit

que $\tau_c^T \neq \emptyset$ et donc la famille $\mathcal{G} = \{\tau_c^T : T \in \Sigma \cap \tau_c(\mathcal{B}^\psi)\}$ est une sous-base d'une topologie $\tau_{\mathcal{G}}$ sur la famille Ω' . La famille $\{Q : Q \in \Omega'\}$ est également une sous-base d'une topologie $\mathcal{T}$ sur l'ensemble E .

Pour $x \in E$ on pose :

$$(3.13) \quad \zeta(x) = \{A : \{x\} <_{\mathcal{S}, L} A\}$$

où $\mathcal{S}$ est un σ -anneau des parties de l'ensemble E tel que $\tau_c(\mathcal{A}_\psi, \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$, $\psi \in L$, $<_{\mathcal{S}, L}$ étant la relation d'ordre définie par :

$$A <_{\mathcal{S}, L} B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}_\psi, \psi \in L.$$

THÉOREME 6. La famille $\zeta(x)$ est un σ -anneau et

$$\tau_c(\zeta(x)) = \zeta(x).$$

Démonstration. Si $A_1 \in \zeta(x)$ et $A_2 \in \zeta(x)$, alors de la définition (3.13) on déduit que :

$$(3.14) \quad \{x\} <_{\mathcal{S}, L} A_1, \{x\} <_{\mathcal{S}, L} A_2$$

et de la relation : $(A_1 - \{x\}) - (A_2 - \{x\}) = (A_1 - A_2) - \{x\}$ on déduit que nous avons :

$$(3.15) \quad (A_1 - A_2) - \{x\} \in \mathcal{S}.$$

Si $A_1 \in \mathcal{A}_\psi$, $A_2 \in \mathcal{A}_\psi$ et $A_1 - A_2 \in \mathcal{S} \in \mathcal{F}$, où $\mathcal{S}$ est l'élément maximal de la famille $\mathcal{F}$ par rapport à l'inclusion, alors de la relation $A_1 - A_2 \subset A_1$, nous déduisons que $A_1 \in \mathcal{S}$. De $A_1 \in \mathcal{A}_\psi$ on déduit que $\psi(A_1) \in \mathcal{A}_\psi$. Nous avons :

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$$

et donc $\psi(A_1) = \psi(A_1 - A_2) \cup \psi(A_1 \cap A_2)$, c'est-à-dire $\psi(A_1 - A_2) \cup \psi(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{S}$. En supposant remplie la condition $\psi(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{S}$. De $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$ on déduit que $\psi(A_1 \cap A_2) \subseteq \psi(A_2)$ et donc $\psi(A_2) \in \mathcal{S}$. De $x \in A_2$ on déduit que $A_2 \neq \emptyset$. Il existe un élément $\mathcal{S}' \in \mathcal{F}$ tel que $A_2 \in \mathcal{S}'$.

De $A_2 \in \mathcal{A}_\psi$ il résulte que $\psi(A_2) \in \mathcal{S}'$, c'est-à-dire $\psi(A_2) \in \mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$. De $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathcal{F}$ on déduit que les filtres $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont comparables.

Si $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, alors $A_2 \in \mathcal{S}'$ puisque $A_2 \in \mathcal{S}'$. De $A_1 - A_2 \in \mathcal{S}$ et $A_2 \in \mathcal{S}'$ on déduit que $\emptyset = A_2 \cap (A_1 - A_2) \in \mathcal{S}$ ce qui est une contradiction.

Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$, alors $\mathcal{S}$ n'est pas un élément maximal de la famille $\mathcal{F}$, puisque $\mathcal{S}' \in \mathcal{F}$.

Donc $\psi(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{S}$.

Le filtre $\mathcal{S}$ étant un élément maximal de la famille $\mathcal{F}$ et $\psi(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{S}$ on déduit que $\psi(A_1 - A_2) \in \mathcal{S}$, c'est-à-dire $A_1 - A_2 \in \mathcal{A}_\psi$. Si $\{x\} <_{\mathcal{S}, L} A_1$ et $\{x\} <_{\mathcal{S}, L} A_2$, alors les relations :

$$\{x\} <_{\mathcal{S}, L} A_1, \{x\} <_{\mathcal{S}, L} A_2, A_1 - \{x\} \in \mathcal{A}_\psi, A_2 - \{x\} \in \mathcal{A}_\psi, A_1 - A_2 \in \mathcal{A}_\psi$$

montrent que $(A_1 - A_2) - \{x\} \in \mathcal{A}_\psi$, c'est-à-dire $\{x\} <_{\mathcal{S}} A_1 - A_2$.

Si $Y_n \in \zeta(x)$, où $n = 1, 2, \dots$, alors $\{x\} <_{\mathcal{S}, L} Y_n$ et donc $\{x\} <_{\mathcal{S}, L} \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$,

c'est-à-dire $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \in \zeta(x)$.

Si $Y \in \tau_c(\zeta(x))$, alors il existe un ensemble $B \neq \emptyset$ de la famille $\zeta(x)$ tel que $Y \cap B \in \zeta(x)$, c'est-à-dire que $\{x\} <_{\mathcal{S}, L} Y \cap B$. Donc, nous avons $(Y \cap B) - \{x\} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}_\psi$.

De $B \in \zeta(x)$ il résulte que $\{x\} <_{\mathcal{S}, L} B$ et donc $B - \{x\} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}_\psi$. La relation $(Y - \{x\}) \cap (B - \{x\}) \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}_\psi$ montre que $Y - \{x\} \in \tau_c(\mathcal{A}_\psi) = \mathcal{A}_\psi$ et de $Y - \{x\} \in \tau_c(\mathcal{A}_\psi, \mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ il résulte $Y - \{x\} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}_\psi$, c'est-à-dire $Y \in \zeta(x)$ ce qui montre que $\tau_c(\zeta(x)) \subseteq \zeta(x)$.

THÉOREME 7. Si $\mathcal{S} = \bigcap \{\tau(\{\psi(B)\}) : \psi \in L, B \subset E\}$, alors l'application

$$\zeta : (E, \mathcal{T}) \rightarrow (\Omega', \tau_{\mathcal{G}}), \zeta(x) = \{A : \{x\} <_{\mathcal{S}, L} A\}$$

est continue et injective.

Démonstration. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage pour $\zeta(x)$ par rapport à la topologie $\tau_{\mathcal{G}}$. Il existe un ensemble ouvert $\emptyset$ par rapport à la topologie $\tau_{\mathcal{G}}$ tel que $\zeta(x) \in \emptyset \subseteq \mathcal{V}$. L'ensemble $\emptyset$ est une réunion arbitraire d'ensembles de type $\{\tau_c^T(\mathcal{B}) : T \in \Sigma \cap \tau_c^T(\mathcal{B})\}$ et par suite nous avons : $\{B : \{x\} <_{\mathcal{S}, L} B\} = \tau_c(\mathcal{B}^\psi)$. Puisque

$$\{x\} <_{\mathcal{S}, L} B \Leftrightarrow \{x\} <_{\mathcal{S}, L} B \cup \{x\}$$

nous pouvons supposer que $x \in B$.

Soit B tel que $\{x\} <_{\mathcal{S}, L} B$ et donc $B \in \tau_c(\mathcal{B}^\psi)$. De la définition de la famille $\tau_c(\mathcal{B}^\psi)$ nous pouvons écrire :

$$\exists B \cap Y \in \mathcal{B}^\psi, Y \in \mathcal{B}^\psi, Y \neq \emptyset$$

Puisque $\psi[\psi(B)] = \psi(B)$, nous déduisons que $\psi(B) \in \mathcal{A}_\psi$, ce qui montre que $\tau_c(\{\psi(B)\}) \subseteq \mathcal{A}_\psi$, puisque $\tau_c(\mathcal{A}_\psi) = \mathcal{A}_\psi$. De $\{x\} <_{\mathcal{S}, L} B$ il résulte que

$B - \{x\} \in \mathfrak{s}$ et de $\{x\} \cap (B - \{x\}) = \emptyset$ on déduit que $x \in \tau_e(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$ et donc nous avons $\{x\} \in \tau_e(\{\psi(B)\})$. Puisque $\{x\} \in \mathfrak{A}_\psi \subseteq \mathfrak{B}_\psi$, nous déduisons que $Q = (Y \cap B) \cup \{x\} \in \mathfrak{B}_\psi$, ce que montre que la condition:

$$\exists_{A^{\psi,T} \in \mathfrak{A}_\psi} Q \subseteq A^{\psi,T}$$

est remplie et $x \in A^{\psi,T}$. De $A^{\psi,T} \in \mathfrak{A}_\psi \subseteq \mathfrak{B}_\psi \subseteq \tau_e(\mathfrak{B}_\psi)$ il résulte que $A^{\psi,T}$ est un ensemble τ -ouvert, c'est-à-dire que $A^{\psi,T}$ est un τ -voisinage pour le point x .

Nous montrerons que $\zeta(A^{\psi,T}) \subseteq \mathfrak{V}$.

Soit $q \in A^{\psi,T}$. Alors $\zeta(q) = \{A : \{q\} <_{\mathfrak{s},L} A\}$. De la définition de la relation $<_{\mathfrak{s},L}$ il résulte que $A^{\psi,T} <_{\mathfrak{s},L} A$ et donc $A - A^{\psi,T} \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{A}_\psi$. De $A^{\psi,T} \cap (A - A^{\psi,T}) = \emptyset$ on déduit que $A^{\psi,T} \in \mathfrak{A}_\psi$ où $\tau_e(\mathfrak{B}_\psi)$ est tel que $T \in \tau_e(\mathfrak{B}_\psi)$. De l'inclusion $\mathfrak{A}_\psi \subseteq \tau_e(\mathfrak{B}_\psi)$ on déduit que $A - A^{\psi,T} \in \tau_e(\tau_e(\mathfrak{B}_\psi)) = \tau_e(\mathfrak{B}_\psi)$. L'opérateur τ_e étant idempotent et $A \supseteq \tau_e(A - A^{\psi,T})$ nous déduisons que $A \in \tau_e(\mathfrak{B}_\psi) \subseteq \mathfrak{V}$ et par suite:

$$\zeta(A^{\psi,T}) \subseteq \mathfrak{V}.$$

Nous montrerons, maintenant, que ζ est une application injective. En supposant remplie la condition:

$$(3.17) \quad \exists_{x, u \in E, x \neq u} \zeta(x) = \zeta(u)$$

Si $A \in \zeta(x)$, alors $\{x\} <_{\mathfrak{A},L} A$, c'est-à-dire $A - \{x\} \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{A}_\psi$. De $\zeta(x) = \zeta(u)$ on déduit que $A \in \zeta(u)$ et donc $\{u\} <_{\mathfrak{A},L} A$, par conséquent $A - \{u\} \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{A}_\psi$. De $A - \{x\} \in \mathfrak{A}_\psi$ et $\{x\} \cap (A - \{x\}) = \emptyset$, on déduit que $\{x\} \in \tau_e(\mathfrak{B}_\psi)$. On montre exactement de la même manière que $\{u\} \in \tau_e(\mathfrak{B}_\psi)$.

De $x \neq u$ on déduit que $\{x\} \cap \{u\} = \emptyset$ et l'on déduit du théorème 5 qu'il existe des ensembles A_x et A_u qui appartiennent à la famille Ω' tels que $x \notin A_x$, $u \notin A_u$ et $E = A_x \cup A_u$.

Puisque $\{x\} \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ et $A - \{x\} \in \mathfrak{A}_\psi \subseteq \tau_e(\mathfrak{B}_\psi)$ on déduit que $A - \{x\} \subseteq A_x$ (A_x étant un élément $\subset$ -maximal par rapport à la propriété que $x \notin A_x$). De $x \notin A - \{x\} \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{A}_\psi$ on déduit que $\{x\} <_{\mathfrak{A},L} A - \{x\} \subseteq A_x$, c'est-à-dire que $\{x\} <_{\mathfrak{A},L} A$, ce qui montre que $A_x \in \mathfrak{A}_\psi$ puisque $x \notin A_x$.

On montre exactement de la même manière que $A_u \in \mathfrak{A}_\psi$.

De théorème 2 on déduit l'existence d'un élément $\Phi \in L$ tel que $\mathfrak{A}_\psi \cup \mathfrak{A}_\psi \subseteq \mathfrak{A}_\Phi$, c'est-à-dire que $A_x \cup A_u \in \mathfrak{A}_\Phi$. Donc $E \in \mathfrak{A}_\Phi \in \Omega'$. Puisque nous avons:

$$(3.18) \quad \{x\} \in \Omega', \{x\} \cap (E - \{x\}) = \emptyset, E - \{x\} \in \Omega'$$

en conclut que $E - \{x\} \subseteq A_x$. De $E = A_x \cup A_u$ on déduit que $(A_x \cup A_u) - \{x\} \subseteq A_x$ et donc $A_x \cup (A_u - \{x\}) \subseteq A_x$. En conséquence $A_u - \{x\} \subseteq A_x$. Donc, on a $A_u \subseteq A_x \cup \{x\}$, c'est-à-dire:

$$(3.19) \quad A_u = (A_x \cap A_u) \cup \{x\}$$

puisque $x \notin A_x$.

On montre exactement de la même manière que:

$$(3.20) \quad A_x = (A_u \cap A_x) \cup \{u\}.$$

En conséquence on a:

$$(3.21) \quad A_u \cup A_x = (A_x \cap A_u) \cup \{x\} \cup \{u\},$$

donc $E = (A_x \cap A_u) \cup \{x\} \cup \{u\} \subseteq E$, ce qui est impossible, et le théorème est complètement démontré.

On désignera par J_E^σ la famille des σ -anneaux définis sur E et par τ_1 une topologie telle que $\tau_1 < \tau_\mathfrak{G}$.

THÉORÈME 9. Si Γ est un ensemble tel que la famille

$$\Sigma_E = \{\mathfrak{s} \in J_E^\sigma : \mathfrak{A}_{\tau_\mathfrak{G}} - \mathfrak{A}_{\tau_1} \subseteq \mathfrak{s}\}$$

ait la propriété:

$$(3.22) \quad \forall_{\mathfrak{s} \in \Sigma_E} \exists_{\mathfrak{s}' \in \Sigma_E} \tau_e(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}'$$

alors $(\Omega', \tau_\mathfrak{G})$ est un espace topologique compact.

Démonstration. La famille $\{\mathfrak{s} \in J_E^\sigma : \mathfrak{A}_{\tau_\mathfrak{G}} - \mathfrak{A}_{\tau_1} \subseteq \mathfrak{s}\}$, où $\mathfrak{s}$ est un

σ -anneau qui ne contient pas les ensembles ouverts de E et

$$\forall_{\mathfrak{s} \in \Sigma_E} \exists_{\mathfrak{s}' \in \Sigma_E} \tau_e(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}',$$

est la sous-base d'une structure uniforme $\mathfrak{V}$ qui induit la topologie $\tau_1, \mathfrak{V}$ égale à $\tau_\mathfrak{G}$ ([2], théorème 5). De [2], théorème 6 on déduit que Σ_E est une topologie compacte, c'est-à-dire que $(\Omega', \tau_\mathfrak{G})$ est un espace topologique compact, ce qui achève la démonstration.

On introduira à la suite de ce théorème, la définition suivante:

Definition 1. L'ensemble $\overline{\zeta(E)}^{\tau_\mathfrak{G}}$ s'appelle Σ_E -compactification de l'espace topologique E .

4. Quelques propriétés de compactification Σ_E de l'espace topologique E

Dans ce paragraphe, nous allons établir quelques propriétés de la compactification Σ_E . Nous montrerons que les compactifications $\Sigma_E = \Sigma_{E,L}$ ordonnées par une relation convenable définie sur l'ensemble des compactifications $\Sigma_{E,L}$, constituent une lattice complète. Nous montrerons que la connaissance de la famille L permet la construction d'une compactification $\Sigma_{E,L}$ où $L \in \mathcal{L}$ (une famille convenable). L'espace topologique (E, μ) sera appelé la compactification de E engendrée par la famille L . Nous décrirons les compactifications qui peuvent être engendrées par une famille convenable.

Ce paragraphe sera consacré à l'étude de quelques compactifications courantes, par exemple, la compactification de Wallman ou la compactification de Stone-Čech, et autres compactifications.

On désignera par $\mathcal{A}_L$ la famille des ψ -ensembles, où $\psi \in L$ et par $\mathfrak{B}_L$ l'anneau engendré par $\mathcal{A}_L$. La compactification $\Sigma_{E,L}$ de l'espace topologique E sera désignée par

$$\Sigma_{E,L} = \overline{\zeta_L(E)}^{\tau_{\mathfrak{B}_L}}$$

où ζ_L est l'application définie par la relation (3.13) pour la famille L .

Définition 4.1. Nous dirons que la compactification $\Sigma_{E,L}$ est inférieure à la compactification $\Sigma_{E,L'}$ s'il existe une application continue $\eta: \Sigma_{E,L'} \rightarrow \Sigma_{E,L}$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\zeta_{E,L}} & \Sigma_{E,L'} \\ & \searrow \zeta & \downarrow \eta \\ & & \Sigma_{E,L} \end{array}$$

soit commutatif.

THÉORÈME 10. Si $L \subseteq L'$, alors $\Sigma_{E,L} \leq \Sigma_{E,L'}$.

Démonstration. En supposant remplie la condition $L \subseteq L'$, nous définissons l'application $\eta: \Sigma_{E,L'} \rightarrow \Sigma_{E,L}$ par :

$$\eta[\tau_e(\mathfrak{B}_{L'})] = T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'})) = \{T_{\Sigma_{E,L}}(Y) : Y \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'})\}$$

où T est l'application canonique ([1]). Nous rappelons que $A <_{\mathfrak{B}_L} B \Leftrightarrow B - A \in \mathfrak{s} \cap \mathcal{A}_{\psi}$ ($\psi \in L$) où $\mathfrak{s}$ est un σ -anneau fixe. Puisque $L \subseteq L'$ nous déduisons que :

$$(4.1) \quad \{A : \{x\} <_{\mathfrak{B}_L} A\} \subseteq \{A : \{x\} <_{\mathfrak{B}_{L'}} A\}$$

c'est-à-dire

$$(4.2) \quad \tau_e(\mathfrak{B}_L^{\mathfrak{s}}) \subseteq \tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^{\mathfrak{s}})$$

où $\mathfrak{B}_L^{\mathfrak{s}}$ est l'anneau engendré par $\{A : \{x\} <_{\mathfrak{B}_L} A\}$ et $\mathfrak{B}_{L'}^{\mathfrak{s}}$ est l'anneau engendré par $\{A : \{x\} <_{\mathfrak{B}_{L'}} A\}$. La dernière inclusion et l'équivalence :

$$T_{\Sigma_{E,L}}(Y) = Y \Leftrightarrow Y \in \Sigma_{E,L} \quad ([3])$$

montrent que :

$$\tau_e(\mathfrak{B}_L^{\mathfrak{s}}) \subseteq T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^{\mathfrak{s}})).$$

Si $\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^{\mathfrak{s}}) \in \Sigma_{E,L}$, alors la propriété précédente signifie que nous avons

$$\tau_e(\mathfrak{B}_L^{\mathfrak{s}}) = T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^{\mathfrak{s}}))$$

c'est-à-dire $\zeta_{L'} \circ \eta = \zeta_L$ et donc le diagramme précédent est commutatif. Supposons maintenant que $\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^{\mathfrak{s}}) \notin \Sigma_{E,L} - \Sigma_{E,L'}$ et que, de plus, nous avons :

$$(4.2) \quad \tau_e(\mathfrak{B}_L^{\mathfrak{s}}) \subset T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^{\mathfrak{s}})).$$

L'inclusion étant stricte, il en résulte la relation :

$$(4.3) \quad \exists Y_0 \in T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^{\mathfrak{s}})) \text{ tel que } Y_0 \notin \tau_e(\mathfrak{B}_L^{\mathfrak{s}}).$$

Puisque $Y_0 \subseteq T_{\Sigma_{E,L}}(Y_0)$ il en résulte que $Y_0 = Y_0 \cap T_{\Sigma_{E,L}}(Y_0)$.

Donc

$$(4.4) \quad T_{\Sigma_{E,L}}(Y_0) \in \tau_e(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^{\mathfrak{s}})) = \tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^{\mathfrak{s}}).$$

L'application $T_{\Sigma_{E,L}}$ étant idempotente, on en déduit :

$$(4.5) \quad T_{\Sigma_{E,L}}(Y_0) \in \Sigma_{E,L}$$

contrairement à l'hypothèse. On en conclut que nous avons l'égalité :

$$\tau_e(\mathfrak{B}_L^{\mathfrak{s}}) = T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^{\mathfrak{s}})),$$

c'est-à-dire que le diagramme précédent est commutatif.

Soit maintenant $\mathcal{U}_T = \{u_T\} = \{\tau_e(\mathfrak{B}_L^s) : T \in \mathfrak{s} \cap \tau_e(\mathfrak{B}_L^s)\}$ une sous-base pour la topologie de l'espace $\Sigma_{E,L}$. Puisque $L \subseteq L'$ on déduit que $\mathcal{U}_T$ est sous-base pour la topologie de l'espace $\Sigma_{E,L'}$. De la définition de l'application $T_{\Sigma_{E,L}}$ on peut écrire :

$$(4.7) \quad T_{\Sigma_{E,L}}(\mathcal{U}_T) = \{T_{\Sigma_{E,L}}(u_T)\} = \{u_T\} = \mathcal{U}_T$$

c'est-à-dire l'application $T_{\Sigma_{E,L}}$ est continue.

On désignera par $\bar{\Gamma}$ la famille :

$$\{\psi \in L : \bigvee_{\psi \in \tau_e(\mathfrak{B}_L^s)} \psi(L) \neq \emptyset\}$$

et par $\tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \bar{\Gamma})$ l'élément de la famille $\Sigma_{E,L}$ qui correspond à l'élément $\psi \in \bar{\Gamma} \subset L$.

Nous montrerons que :

$$(4.8) \quad T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_L^s)) = \tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \bar{\Gamma}).$$

Si $Y \in \tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \bar{\Gamma})$, alors $T_{\Sigma_{E,L}}(Y) = Y$ (puisque $\tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \bar{\Gamma}) \in \Sigma_{E,L}$). De $L' \subseteq L$ on déduit que $Y \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^s)$, c'est-à-dire $Y \in T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^s))$.

D'après ce qui précède nous avons l'inclusion suivante :

$$(4.9) \quad \tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \bar{\Gamma}) \subseteq T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^s)).$$

En supposant remplie la condition :

$$(4.10) \quad \tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \bar{\Gamma}) \subset T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^s))$$

il existe un élément $Y_0 \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^s) - \tau_e(\mathfrak{B}_L^s)$ tel que

$$T_{\Sigma_{E,L}}(Y_0) \notin \tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \bar{\Gamma}).$$

De $Y_0 \in T_{\Sigma_{E,L}}(Y_0)$ on déduit que $T_{\Sigma_{E,L}}(Y_0) \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^s)$, c'est-à-dire

$$(4.11) \quad \tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \bar{\Gamma}) \subset \tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^s).$$

De $Y_0 \notin \tau_e(\mathfrak{B}_L^s)$ nous déduisons que $Y_0 \notin \mathcal{A}_L$. La famille $\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^s) - \{\emptyset\}$ étant un filtre et Y_0 appartenant à $\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}^s) - \{\emptyset\}$ nous déduisons que $\psi(Y_0) \notin \tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \bar{\Gamma}) - \{\emptyset\}$, puisque $Y_0 \notin \mathcal{A}_L$.

De (4.11) on déduit que $\psi(Y_0) \notin \tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \bar{\Gamma})$, c'est-à-dire $\psi(Y_0) = \emptyset$. Donc $\psi \notin \bar{\Gamma}$, contrairement à l'hypothèse et le théorème est démontré.

THÉORÈME 11. Si $L \subseteq L'$, alors il existe une relation d'équivalence R telle que les espaces $\Sigma_{E,L'}/R$ et $\Sigma_{E,L}$ sont homéomorphes.

Démonstration. On désignera par $\tau_e(\mathfrak{B}_{L'})$ un élément de $\Sigma_{E,L'}$, et par Γ l'ensemble des éléments $\psi \in L$ tels que :

$$(4.12) \quad \bigvee_{\psi \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'})} \psi(Y) \neq \emptyset.$$

l'élément $\tau_e(\mathfrak{B}_{L'})$ se transforme en l'élément $\tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \Gamma)$ par l'application η , c'est-à-dire $\eta(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'})) = \tau_e(\mathfrak{B}_L^s; \Gamma)$. Un élément de la sous-base de la topologie de l'espace $\Sigma_{E,L'}$, est de la forme suivante :

$$U_T = \{\tau_e(\mathfrak{B}_{L'}) : S \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'})\}$$

où S appartient à $\mathfrak{s} \subseteq \Sigma_{E,L}$ (une famille donnée). De la définition de l'application η on déduit que :

$$(4.13) \quad T_{\Sigma_{E,L}}(u_T) \subseteq \{T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'})) : S \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'})\}.$$

S'il existe un élément $N \in \{T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'})) : S \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'}) - T_{\Sigma_{E,L}}(u_T)\}$, alors on peut construire la famille $\{Y_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ telle que $Y_\alpha \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'})$, où $\tau_e(\mathfrak{B}_{L'})$ est la famille de la relation (4.13). Nous avons, par conséquence, la relation :

$$(4.14) \quad \bigvee_{\alpha \in \Gamma} N = \tau_e(Y_\alpha), Y_\alpha \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'}).$$

De $\tau_e(\bigcup Y_\alpha) = \bigcup \tau_e(Y_\alpha) = N$ et de $Y_\alpha \subseteq \bigcup Y_\alpha$ on déduit que l'ensemble $\bigcup Y_\alpha = Y'$ appartient à $\tau_e(\mathfrak{B}_{L'})$, c'est-à-dire que Y' appartient à U_T et $N = \tau_e(Y')$. Donc, nous avons, $N \in T_{\Sigma_{E,L}}(U_T)$, contrairement à l'hypothèse. Par conséquence, on a l'égalité suivante :

$$(4.15) \quad T_{\Sigma_{E,L}}(u_T) = \bigcap \{T_{\Sigma_{E,L}}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L'})) : S \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'})\}.$$

Puisque $\mathfrak{s} \subseteq \Sigma_{E,L}$ on en conclut que $S = T_{\Sigma_{E,L}}(S)$ et $S \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L'})$, c'est-à-dire $T_{\Sigma_{E,L}}(U_T)$ est un élément de la sous-base de la topologie de l'espace $\Sigma_{E,L}$, ce qui montre que l'application η est ouverte.

L'application $\eta : \Sigma_{E,L'} \rightarrow \Sigma_{E,L}$ étant continue, ouverte et surjective, on déduit que η définit une relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ sur l'espace $\Sigma_{E,L'}$ telle que les espaces $\Sigma_{E,L'}/\mathfrak{R}$, $\Sigma_{E,L}$ sont homéomorphes et donc le théorème est complètement démontré.

Lemme 1. Si $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ sont deux filtres sur E , alors a lieu l'équivalence suivante :

$$\mathfrak{S} \cap \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L)) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{S}' \cap \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)) \neq \emptyset$$

Démonstration. Si $Y_0 \in \mathfrak{S} \cap \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L))$, alors de $Y_0 \in \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L))$ on déduit que nous avons la relation :

$$(4.16) \quad \exists_{A_0 \in \mathfrak{S}'} Y_0 \cap A_0 \in \tau_e(\mathfrak{B}_L).$$

De $Y_0 \cap A_0 \subseteq Y_0$ et du fait que l'opérateur τ_e est idempotent on déduit que $Y_0 \in \tau_e(\mathfrak{B}_L)$.

On montre exactement de la même manière que $A_0 \in \tau_e(\mathfrak{B}_L)$. Donc nous avons les relations suivantes :

$$(4.17) \quad A_0 \in \mathfrak{S}' \cap \tau_e(\mathfrak{B}_L), Y_0 \in \mathfrak{S} \cap \tau_e(\mathfrak{B}_L).$$

En supposant remplie la condition :

$$(4.18) \quad \mathfrak{S}' \cap \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)) = \emptyset$$

nous avons la relation suivante :

$$(4.19) \quad \forall_{F' \in \mathfrak{S}', F \in \mathfrak{S}} F \cap F' \notin \tau_e(\mathfrak{B}_L).$$

Les ensembles $A_0 = F'$ et $Y_0 = F$ appartiennent à $\tau_e(\mathfrak{B}_L)$ et donc $F' \cap F$ appartient à $\tau_e(\mathfrak{B}_L)$, ce qui est impossible.

Donc, nous avons la relation :

$$(4.20) \quad \mathfrak{S}' \cap \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)) \neq \emptyset.$$

On montre exactement de la même manière que la condition

$$(4.21) \quad \mathfrak{S}' \cap \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)) \neq \emptyset$$

implique la relation :

$$(4.22) \quad \mathfrak{S} \cap \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L)) \neq \emptyset$$

et le lemme est démontré.

Lemme 2. Si $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ sont deux filtres sur E tels que $\mathfrak{S}' \cap \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)) \neq \emptyset$, alors $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}' \neq \emptyset$.

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}' = \emptyset$ et que Y_0 appartient à

$$\mathfrak{S}' \cap \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)).$$

De $Y_0 \in \mathfrak{S}' \cap \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$ il résulte les relations :

$$(4.23) \quad Y_0 \in \mathfrak{S}', Y_0 \in \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)).$$

De $Y_0 \in \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$ on déduit la condition :

$$(4.24) \quad \exists_{A_0 \in \mathfrak{S}} Y_0 \cap A_0 \in \tau_e(\mathfrak{B}_L).$$

De $Y_0 \cap A_0 \subseteq Y_0$ et $Y_0 \cap A_0 \subseteq A_0$ il résulte que Y_0 et A_0 appartiennent à $\tau_e(\mathfrak{B}_L)$. En vertu du lemme 1, la famille $\mathfrak{S} \cap \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L))$ est non-vide. Si $A_0 \subseteq Y_0$, alors $Y_0 \in \mathfrak{S}$ puisque $A_0 \in \mathfrak{S}$, c'est-à-dire $Y_0 \in \mathfrak{S}' \cap \mathfrak{S}$. Donc $\mathfrak{S}' \cap \mathfrak{S} \neq \emptyset$, ce qui est impossible. Par conséquent, nous avons la relation $A_0 \not\subseteq Y_0$ et donc il existe un $x_0 \in A$ tel que $\{x_0\} \cap Y_0 = \emptyset$, c'est-à-dire $\{x_0\} \in \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L))$, puisque $Y_0 \in \mathfrak{S}'$. De $A_0 \supset \{x_0\}$ il résulte que $A_0 \in \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L))$, c'est-à-dire :

$$(4.25) \quad A_0 \in \mathfrak{S} \cap \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L)).$$

De $A_0 \in \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L))$ on obtient la condition :

$$(4.26) \quad \exists_{Y_1 \in \mathfrak{S}'} A_0 \cap Y_1 \in \tau_e(\mathfrak{B}_L)$$

c'est-à-dire A_0 et Y_1 appartiennent à $\tau_e(\mathfrak{B}_L)$.

Si $Y_1 \subseteq A_0$, alors $A_0 \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}'$, donc $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}' \neq \emptyset$, contrairement à l'hypothèse. En conséquence on a $Y_1 \not\subseteq A_0$ et donc nous avons :

$$(4.27) \quad \exists_{x_1 \in Y_1} \{x_1\} \cap Y_1 = \emptyset$$

c'est-à-dire $\{x_1\} \in \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$.

De $Y_1 \supseteq \{x_1\}$ il résulte que $Y_1 \in \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$ et donc Y_1 vérifie la condition :

$$(4.28) \quad Y_1 \in \mathfrak{S}' \cap \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)).$$

Donc, nous avons $Y_1 \not\subseteq A_0 \not\subseteq Y_0$, ce qui montre que $Y_1 - A_0 \neq \emptyset$ et $A_0 - Y_0 \neq \emptyset$. De $A_0 \cap (Y_1 - A_0) = \emptyset$ et $A_0 \neq \emptyset$ il résulte que l'ensemble $Y_1 - A_0$ appartient à $\tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L))$. De $Y_0 \neq \emptyset$ et $Y_0 \cap (A_0 - Y_0) = \emptyset$ on conclut que :

$$(4.29) \quad A - Y_0 \in \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)).$$

Puisque $A_0 - Y_0 \neq \emptyset$ et $(Y_1 - A_0) \cap (A_0 - Y_0) = \emptyset$ on déduit que l'ensemble $Y_1 - A_0$ appartient à $\tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$, c'est-à-dire que l'ensemble $Y_1 - A_0$ appartient à la famille $\tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)) \cap \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L))$.

Donc,

$$(4.30) \quad \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)) \cap \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L)) \neq \emptyset.$$

L'ensemble $Y_1 - A_0$ appartient à $\tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L))$, il en résulte que:

$$(4.31) \quad \exists_{T_0 \in \mathfrak{S}} (Y_1 - A_0) \cap T_0 \in \tau_e(\mathfrak{B}_L).$$

De $Y_1 - A_0 \in \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L))$, on déduit la relation:

$$(4.32) \quad \exists_{T'_0 \in \mathfrak{S}'} (Y_1 - A_0) \cap T'_0 \in \tau_e(\mathfrak{B}_L).$$

Puisque $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ sont des filtres, on déduit que $T_0 \cup T'_0 \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}'$ c'est-à-dire $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}' \neq \emptyset$, contrairement à l'hypothèse.

Lemme 3. Si la famille $\mathfrak{F}$ contient l'élément $\mathfrak{S}$, alors elle contient l'élément $\tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{S}' \in \mathfrak{F}$ tel que $\mathfrak{S}' \cap \tau_e(\mathfrak{B}, \tau_e(\mathfrak{B}_L)) \neq \emptyset$.

Du lemme 2 il résulte $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}' \neq \emptyset$. Les filtres $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ étant de $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}' \neq \emptyset$, on déduit que $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ sont comparables. On procèdera à présent à l'analyse des cas possibles, à savoir: (1) $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}'$. Dans ce cas $\mathfrak{S}$ n'est pas un ultrafiltre sur E donc nous avons:

$$(4.33) \quad \forall_{x \in E} \exists_{F_x \in \mathfrak{S}} x \notin F_x.$$

Donc $\{x\} \in \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$. Cette relation montre que l'ensemble F_x appartient à $\tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$. De la définition de l'élément F_x on déduit que la relation suivante est vérifiée:

$$(4.34) \quad \forall_{F \in \mathfrak{S} - \{F_x\}} x \in F.$$

De $\{x\} \in \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$ et de $F \supset \{x\}$ on déduit que l'ensemble F appartient à $\tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$.

En vertu du fait que les ensembles F_x et F appartiennent à la famille $\tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$ on déduit que $\mathfrak{S} \subset \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$.

Soit $F' \in \mathfrak{S}' - \mathfrak{S}$. De $F' \notin \mathfrak{S}$ on déduit qu'il existe un $F \in \mathfrak{S}$ tel que $F \cap F' = \emptyset$, c'est-à-dire $F' \in \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$. Cette relation montre l'existence de l'inclusion $\mathfrak{S}' - \mathfrak{S} \subseteq \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$.

Puisque nous avons:

$$\mathfrak{S} \subseteq \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$$

on déduit que $(\mathfrak{S}' - \mathfrak{S}) \cup \mathfrak{S} \subseteq \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$, c'est-à-dire:

$$(4.35) \quad \mathfrak{S}' \subseteq \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$$

et donc la famille $\tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$ appartient à $\mathfrak{F}$.

(2) $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$. Dans ce cas, $\mathfrak{S}$ n'est pas un ultrafiltre et on montrera exactement de la même manière que nous avons l'inclusion:

$$(4.36) \quad \mathfrak{S}' \subseteq \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L)).$$

Puisque $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ il résulte que l'inclusion suivante a lieu:

$$(4.37) \quad \tau_e(\mathfrak{S}', \tau_e(\mathfrak{B}_L)) \subseteq \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{S}' \subseteq \tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$. Donc $\tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$ ce qui montre que la famille $\tau_e(\mathfrak{S}, \tau_e(\mathfrak{B}_L))$ appartient à $\mathfrak{F}$.

THÉORÈME 12. La famille $(\Sigma_{E,L}, \subseteq)$ est une lattice.

Démonstration. Soit $\{\Sigma_{E,L_\alpha} : \alpha \in \Gamma\}$ une famille des compactifications de l'espace E et $\zeta_{L_\alpha} : E \rightarrow \Sigma_{E,L_\alpha}$ le homéomorphisme attaché à la compactification Σ_{E,L_α} . On désignera par T_α la topologie de l'espace Σ_{E,L_α} . La classe $\zeta_{L_\alpha}^{-1}(T_\alpha)$ est une topologie sur E . Donc sur E est définie la famille

$$\{\zeta_{L_\alpha}^{-1}(T_\alpha) : \alpha \in \Gamma\}$$

des topologies.

Il existe une topologie T sur E telle que $T \subseteq \zeta_{L_\alpha}^{-1}(T_\alpha)$ quelque soit $\alpha \in \Gamma$. En effet l'ensemble $Q \subseteq E$ ayant la propriété suivante:

$$\forall_{x \in Q} \exists_{Q_i \in \zeta_{L_{\alpha_i}}^{-1}(T_{\alpha_i}), i=1,2,\dots,n} x \in \bigcap_{i=1}^n Q_i \subseteq Q$$

est un élément de la topologie T .

Soit Σ_{E,L_T} la compactification de l'espace (E, T) . En supposant qu'il existe un $\alpha \in \Gamma$ tel que $L_\alpha \not\subseteq L_T$, nous avons la relation:

$$(4.38) \quad \tau_e(\mathfrak{B}_{L_\alpha}^\psi) \in \Sigma_{E,L_\alpha} - \Sigma_{E,L_T}$$

où $\psi_0 \in L_\alpha - L_T$.

De la définition de la topologie T , il résulte que:

$$(4.39) \quad T_\alpha \subseteq \zeta_{L_\alpha}(T).$$

Nous supposons remplie la condition:

$$(4.40) \quad \forall_{S \in \mathfrak{S}} S \notin \tau_e(\mathfrak{B}_{L_\alpha}^\psi).$$

Dans ce cas $S \notin \mathfrak{A}_{\psi_0}$, donc pour un filtre quelconque $\mathfrak{S} \in \mathfrak{F}$ ([3]) S ou bien $\psi_0(S)$ n'appartiennent pas à $\mathfrak{S}$.

L'application ψ_0 étant idempotente il résulte que $\psi_0(S) \in \mathcal{A}_{\psi_0}$, c'est-à-dire qu'il existe un filtre $\mathfrak{S}'' \in \mathfrak{F}$ tel que $\psi_0(S) \in \mathfrak{S}''$, donc $S \in \mathfrak{S}''$. La dernière relation montre que nous avons :

$$(4.41) \quad \exists_{B \in \mathfrak{S}''} S \cap B = \emptyset$$

donc $S \in \tau_e(\mathfrak{S}'', \tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0}))$. L'ensemble S appartient à $\tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0})$, c'est-à-dire $S \neq \emptyset$ et par conséquence $S \in \tau_e(\mathfrak{S}'', \tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0})) - \{\emptyset\}$. Du lemme 3 nous déduisons que $\tau_e(\mathfrak{S}'', \tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0})) - \{\emptyset\} \in \mathfrak{F}$. Donc, on a

$$(4.42) \quad \psi_0(S) \notin \tau_e(\mathfrak{S}'', \tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0})) - \{\emptyset\}.$$

Puisque $\psi_0(S) \neq \emptyset$ et $\psi_0(S) \in \mathcal{A}_{\psi_0}$, nous déduisons que $\psi_0(S) \notin \tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0}) - \{\emptyset\}$, c'est-à-dire $\psi_0(S) \in \mathcal{A}_{\psi_0}$, ce qui est impossible. Donc il existe un ensemble $S_0 \in \mathfrak{S}$ tel que $S_0 \in \tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0})$. De la définition de la topologie T_{α} , on déduit que nous avons la relation :

$$(4.43) \quad \tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0}) \in T_{\alpha_0}$$

et de (3.49) on déduit que $\tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0}) \in \zeta_{L_{\alpha_0}}(T)$, c'est-à-dire qu'il existe un élément $\tau_e(\mathfrak{B}_{L_T}^{\psi_0}) \in \Sigma_{E, L_T}$ tel que :

$$(4.44) \quad \tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0}) = \zeta_{\alpha_0}(\tau_e(\mathfrak{B}_{L_T}^{\psi_0}))$$

donc $\tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0})$ appartient à Σ_{E, L_T} , ce qui est une contradiction. Donc on a

$$\forall_{\alpha \in \Gamma} L_{\alpha} \subseteq L_T$$

et du théorème précédent on déduit que pour un $\alpha \in \Gamma$ quelconque nous avons la relation : $\Sigma_{E, L_{\alpha}} \subseteq \Sigma_{E, L_T}$.

On supposera remplie la condition :

$$L_T \supseteq L \supseteq L_{\alpha}, \quad \alpha \in \Gamma.$$

On désignera par T_1 la topologie de l'espace $\Sigma_{E, L}$ et par T_{α} la topologie de l'espace $\Sigma_{E, L_{\alpha}}$. On a :

$$(4.45) \quad \zeta_L^{-1}(T_{\alpha}) \supseteq \zeta_{L_{\alpha}}^{-1}(T_{\alpha}),$$

c'est-à-dire $T \supseteq \zeta_L^{-1}(T_{\alpha}) \supseteq \zeta_{L_{\alpha}}^{-1}(T_{\alpha})$, ce qui contredit la définition de la topologie T .

Les résultats précédents montrent que Σ_{E, L_T} est la plus petite compactification pour l'espace E qui ait la propriété :

$$\forall_{\alpha \in \Gamma} \Sigma_{E, L_T} \supseteq \Sigma_{E, L_{\alpha}}.$$

En particulier remplaçons la famille $\{\Sigma_{E, L_{\alpha}} : \alpha \in \Gamma\}$ par la famille des compactifications de l'espace E ayant la forme $\Sigma_{E, L}$, nous déduisons que cette famille contient la plus grande compactification. Cette famille contient la plus petite compactification (la compactification Alexandroff) puisque elle contient chaque système Wallman (proposition 6 de cet ouvrage).

THÉORÈME 13. La famille $\Omega_{E, \mathfrak{S}}$ des compactifications de la forme $\Sigma_{E, L} (L \in \mathfrak{L})$ constitue la lattice des compactifications de l'espace topologique E .

Démonstration. Soit $\gamma(E)$ une compactification quelconque de l'espace topologique (E, μ) et h_1 homéomorphisme rattaché à compactification $\gamma(E)$. On désignera par τ la topologie de l'espace $\gamma(E)$. Les familles $\gamma^{-1}(\tau)$, $\zeta_{L_{\alpha}}(T_{\alpha})$, u sont des topologies sur E . Il existe une topologie T plus grande que ces topologies et qui est la plus petite topologie qui ait cette propriété.

Soit $(Y, \pi) = (E, \gamma^{-1}(\tau)) \times (E, \zeta_{L_{\alpha}}(T_{\alpha}))$ et $\mathfrak{D} = \{(x, x) : x \in Y\}$. L'espace (E, T) est homéomorphe avec $(\mathfrak{D}, \pi/\mathfrak{D})$, où $\pi/\mathfrak{D}$ est la restriction de la topologie π à l'ensemble $\mathfrak{D}$. On désignera cet homéomorphisme par h . Puisque $u < T$, l'application $k : (\gamma(E), T) \rightarrow (\mathfrak{D}, \pi/\mathfrak{D})$ définie par $k = h_1^{-1} \cdot i \cdot h^{-1}$, où i est l'application identique, est continue. Ceci résulte du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (\gamma(E), \tau) & \xrightarrow{h_1^{-1}} & (E, u) \\ k \downarrow & & \downarrow i \\ (\mathfrak{D}, \pi/\mathfrak{D}) & \xleftarrow{k^{-1}} & (E, T) \end{array}$$

On désigne par $\Sigma_{E, L_{\alpha}}$ la compactification Wallman et supposons que nous avons $x \notin \tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0})$. Soit A un ensemble tel que :

$$(4.46) \quad \{h_1^{-1}(x)\} <_{\Sigma_{E, L_{\alpha_0}}} A.$$

De la définition de la relation $<_{\Sigma_{E, L_{\alpha_0}}}$ on déduit la relation :

$$(4.47) \quad A - \{h_1^{-1}(x)\} \in \mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0}.$$

De $x \notin \tau_e(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0})$ et de la dernière relation on obtient :

$$(4.48) \quad \{x\} \cap (A - \{h_1^{-1}(x)\}) \notin \mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi_0},$$

c'est-à-dire $\{x\} \cap (A - h_1^{-1}(x)) \neq \emptyset$, donc $x \notin A \cap c\{h_1^{-1}(x)\}$. On procédera à présent à l'analyse des cas possibles à savoir :

1) $x \notin A$. Dans ce cas nous avons $\{x\} \cap A = \emptyset$, c'est-à-dire $\{x\}$ appartient à $\tau_{\epsilon}(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi})$. Cette relation montre que seules les familles $\tau_{\epsilon}(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi})$ qui contiennent les ensembles du type de l'ensemble A , contiennent l'élément $x \in E$. Du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & k \circ i & \\ (\gamma(E), \tau) & \xrightarrow{\quad} & (E, u) \\ & \searrow & \downarrow \zeta_{L_{\alpha_0}} \\ & & (\Sigma_{E, L_{\alpha_0}}, T_{\alpha_0}) \end{array}$$

il résulte que l'application $j: (\mathfrak{B}, \pi|\mathfrak{B}) \rightarrow (E, u)$ définie par $j(t) = h(t)$ est une bijection continue, puisque $u < T$. Considérons l'application $k \circ j \circ \zeta_{L_{\alpha_0}}$. Puisque cette application est une surjection continue et T_{α} est une topologie compacte on déduit que l'application $k \circ j \circ \zeta_{L_{\alpha_0}}$ est un homéomorphisme. Soit $x \in E$. Nous avons $k(x) = h^{-1}(h_1^{-1}(x))$ et donc:

$$(k \circ j \circ \zeta_{L_{\alpha_0}})(x) = \zeta_{L_{\alpha_0}}(h_1^{-1}(x)).$$

De la définition de l'application $\zeta_{L_{\alpha}}$ on déduit que $\zeta_{L_{\alpha_0}}(h_1^{-1}(x))$ est l'intersection des familles $\tau_{\epsilon}(\mathfrak{B}_{L_{\alpha_0}}^{\psi})$ qui contient les ensembles.

A ayant la propriété:

$$\{h_1^{-1}(x)\} <_{\mathfrak{B}, L_{\alpha_0}} A.$$

Tenant compte du raisonnement précédent, la dernière relation implique que cette famille contient l'élément x et tenant compte de la propriété (2) du système Wallman on conclut que cette intersection est l'ensemble $\{x\}$, c'est-à-dire $\zeta_{L_{\alpha_0}}(h_1^{-1}(x)) = x$ et donc $\gamma(E) = \Sigma_{E, L_{\alpha_0}}$. Le théorème est complètement démontré.

Soit $\mathfrak{B}$ une famille de parties de l'ensemble E ayant les propriétés suivantes:

- 1) $\emptyset \in \mathfrak{B}$, $E \in \mathfrak{B}$ et pour deux ensembles quelconques A et B qui appartiennent à $\mathfrak{B}$ nous avons: $A \cup B \in \mathfrak{B}$, $A \cap B \in \mathfrak{B}$.
- 2) Pour tout $x \in E$, nous avons $\{x\} = \bigcap \{B \in \mathfrak{B} : x \in B\}$.
- 3) Pour tous les $Y \in \mathfrak{B}$ et $x \notin Y$ il existe un ensemble $Y_1 \in \mathfrak{B}$ tel que $x \in Y_1$ et les ensembles Y et Y_1 sont disjoints.
- 4) Pour les ensembles X et Y appartenant à $\mathfrak{B}$ et qui sont disjoints, la famille $\mathfrak{B}$ contient les ensembles X_1 et Y_1 tels que $X_1 \cap X = Y_1 \cap Y = \emptyset$ et $X_1 \cup Y_1 = E$.

Par la suite, $T_{\mathfrak{B}}$ désignera l'application canonique ([1]).

Proposition 1. $Y \in \mathfrak{B}$ si et seulement si $T_{\mathfrak{B}}(Y) = Y$

Démonstration. Soit $\Omega = \{Y : T_{\mathfrak{B}}(Y) = Y\}$ et considérons la famille ordonnée $(\Omega, \subseteq)$.

On désignera par $(Y_{\alpha} : \alpha \in \Gamma)$ une sous-famille de la famille $(\Omega, \subseteq)$, totalement ordonnée. On pose également $Y = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} Y_{\alpha}$. Nous avons

$$T_{\mathfrak{B}}(Y) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} T_{\mathfrak{B}}(Y_{\alpha}) = Y$$

([3], théorème 5), c'est-à-dire Y est un majorant pour la famille $(Y_{\alpha}, \alpha \in \Gamma)$. En vertu du lemme de Zorn, la famille $(\Omega, \subseteq)$ possède un élément maximal Y' . Puisque $E \in \mathfrak{B} \subseteq \Omega$, on en conclut que $T_{\mathfrak{B}}(E) = E$, c'est-à-dire $Y' = E$. Nous avons également:

$$T_{\mathfrak{B}}(T_{\mathfrak{B}}(Y)) = T_{\mathfrak{B}}(Y),$$

c'est-à-dire $T_{\mathfrak{B}}(Y) \in \Omega$.

Nous supposons que $T_{\mathfrak{B}}(Y) \in \Omega - \mathfrak{B}$. La famille $(\Omega, \subseteq)$ étant inductivement ordonnée et $E \in \mathfrak{B}$, on en conclut que $T_{\mathfrak{B}}(Y) \subset E$, c'est-à-dire:

$$\exists x_0 \notin T_{\mathfrak{B}}(Y).$$

En vertu du lemme de Zorn il existe un ensemble maximal $F_{x_0} \in \Omega$ tel que $x_0 \notin F_{x_0}$ et $T_{\mathfrak{B}}(Y) \subset F_{x_0}$. L'application $T_{\mathfrak{B}}$ étant idempotente, on déduit qu'il existe un ensemble $B_0 \in \mathfrak{B}$ tel que $T_{\mathfrak{B}}(Y) \subset B_0$ et $x_0 \notin B_0$. De la propriété (3) du système $\mathfrak{B}$ il résulte qu'il existe un $Y_{x_0} \in \mathfrak{B}$ tel que $x_0 \in Y_{x_0}$ et $Y_{x_0} \cap B_0 = \emptyset$. En vertu de la propriété (4) de la famille $\mathfrak{B}$ on déduit qu'il existe les ensembles $T_{x_0} \in \mathfrak{B}$, $T \in \mathfrak{B}$ tels que:

$$T_{x_0} \cap Y_{x_0} = T \cap B_0 = \emptyset, T_{x_0} \cup T = E.$$

Conformément à [1], on peut supposer que ces ensembles sont disjoints. Donc $Y_{x_0} \subset T_{x_0}$, $B_0 \subset T$.

L'ensemble F_{x_0} étant maximal on déduit que $T \subset F_{x_0}$, c'est-à-dire $E - T_{x_0} \subset F_{x_0}$, et donc nous avons l'inclusion $E \subset F_{x_0} \cup T_{x_0}$.

La dernière relation et le fait que l'ensemble $F_{x_0} \cup T_{x_0}$ appartient à Ω montrent que F_{x_0} n'est pas l'élément maximal pour la famille ordonnée $(\Omega, \subseteq)$, ce qui est impossible.

Proposition 2. $Y \notin \mathfrak{B}$ si et seulement si $Y \subset T_{\mathfrak{B}}(Y)$.

Démonstration. Si Y est un ensemble tel que $Y \subset T_{\mathfrak{B}}(Y)$ et $Y \in \mathfrak{B}$ alors $Y = T_{\mathfrak{B}}(Y)$ (de la définition de l'application $T_{\mathfrak{B}}$), contrairement à l'hypothèse. En conséquence on a $Y \notin \mathfrak{B}$.

Nous supposons maintenant que $Y \notin \mathfrak{B}$ et que $Y = T_{\mathfrak{B}}(Y)$. De la proposition 1 on déduit que $T_{\mathfrak{B}}(Y) \in \mathfrak{B}$, c'est-à-dire $Y \notin \mathfrak{B}$ ce qui est impossible. Donc nous avons l'inclusion stricte $Y \subset T_{\mathfrak{B}}(Y)$.

Proposition 3. Pour deux ensembles quelconques Y_1 et Y_2 on a $T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2) = T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \cap T_{\mathfrak{B}}(Y_2)$.

Démonstration. L'inclusion $T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2) \subseteq T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \cap T_{\mathfrak{B}}(Y_2)$ étant évidente, il reste à démontrer l'inclusion $T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \cap T_{\mathfrak{B}}(Y_2) \subseteq T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2)$. Pour ce faire supposons $x \in T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \cap T_{\mathfrak{B}}(Y_2)$ et que $x \notin T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2)$. De $x \in T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \cap T_{\mathfrak{B}}(Y_2)$ on déduit les conditions :

$$(1) \quad \bigvee_{B \in \mathfrak{B}, Y_1 \subset B} x \in B \quad (2) \quad \bigvee_{\Gamma \in \mathfrak{B}, Y_2 \subset \Gamma} x \in \Gamma.$$

En s'appuyant sur ce que $T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2) \in \mathfrak{B}$, $x \notin T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2)$ et en vertu du lemme de Zorn, on peut trouver un ensemble $F_x \in \mathfrak{B}$ et que $x \notin F_x$ et $F_x \supset T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2)$ et l'ensemble F_x est maximal par rapport à l'ordre $\subseteq$.

De $x \notin T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2)$ et de la propriété (3) du système $\mathfrak{B}$ on déduit la condition suivante :

$$(3) \quad \exists_{Y_x \in \mathfrak{B}, x \in Y_x} Y_x \cap T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2) = \emptyset.$$

Des résultats de [1] on déduit la condition :

$$(4) \quad \exists_{T_x, T \in \mathfrak{B}, T_x \cup T = E} T_x \supset Y_x \text{ et } T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2) \subset T.$$

De $x \notin T$ et $T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2) \subset T$ on déduit que $T \subseteq F_x$.

Nous avons ou bien $T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \subseteq F_x$ ou bien $T_{\mathfrak{B}}(Y_2) \subseteq T_x$.

En effet, si $T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \not\subseteq F_x$ et $T_{\mathfrak{B}}(Y_2) \not\subseteq T_x$, on procèdera à l'analyse des cas possibles, à savoir :

(1) $T_{\mathfrak{B}}(Y_1) - F_x = T_{\mathfrak{B}}(Y_2) - T_x$. Dans ce cas il existe un élément $x_0 \in T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \cap T_{\mathfrak{B}}(Y_2) - (F_x \cup T_x)$. De $T \subseteq F_x$ et $T = E - T_x$ il résulte que $E \subseteq T_x \cup F_x$, c'est-à-dire $E = T_x \cup F_x$. Donc $x_0 \notin E$ ce qui est impossible.

(2) $T_{\mathfrak{B}}(Y_1) - F_x \neq T_{\mathfrak{B}}(Y_2) - T_x$. Nous supposons remplie la condition :

$$T_{\mathfrak{B}}(Y_1) - F_x \neq \emptyset \text{ et } T_{\mathfrak{B}}(Y_2) - T_x \neq \emptyset.$$

Dans ce cas nous avons $T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \not\subseteq F_x$ et $T_{\mathfrak{B}}(Y_2) \not\subseteq T_x$, c'est-à-dire $T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cup Y_2) \not\subseteq E$, ce qui est impossible. Donc ou $T_{\mathfrak{B}}(Y_1) - F_x = \emptyset$ ou $T_{\mathfrak{B}}(Y_2) - T_x = \emptyset$, contrairement à l'hypothèse.

Si $T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \subseteq F_x$, alors $Y_1 \subseteq F_x$ et $x \notin F_x$, contrairement à l'hypothèse (1).

De $T_{\mathfrak{B}}(Y_2) \subseteq T_x$ il résulte que $Y_2 \subseteq T_x$. De la définition de l'ensemble T on déduit l'inclusion $T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2) \subset T$, c'est-à-dire $Y_1 \cap Y_2 \subset T$. De $Y_1 \cap Y_2 \subseteq Y_2$ il résulte que $Y_1 \cap Y_2 \subset T_x$, donc $Y_1 \cap Y_2 \subset T_x \cap T = \emptyset$, c'est-à-dire $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Supposons maintenant que $x_0 \in T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \cap T_{\mathfrak{B}}(Y_2)$. Si $Y_1 \subset T_x$, alors puisque $Y_2 \subset T_x$ on déduit que $Y_1 \cap Y_2 \subset T_x$ et de $T_x \in \mathfrak{B}$ on conclut que $T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2) \subset T_x$, contrairement à l'hypothèse (4). Donc nous avons :

$$(5) \quad Y_1 \not\subset T_x.$$

Nous supposons que $Y_1 \not\subset T$. On procèdera à l'analyse des cas possibles, à savoir :

(3) $Y_1 - T_x = Y_2 - T$. Dans ce cas il existe un $x_0 \in (Y_1 \cap Y_2) - (T_x \cup T)$ ce qui est impossible puisque $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$.

(4) $Y_1 - T_x \neq Y_2 - T$. Nous supposons remplie la condition :

$$Y_1 - T_x \neq \emptyset \text{ et } Y_2 - T \neq \emptyset.$$

Dans ce cas nous avons les relations : $Y_1 \not\subset T_x$ et $Y_2 \not\subset T$, c'est-à-dire $Y_1 \not\subset T_x \cup T = E$, ce qui est impossible.

Donc ou bien $Y_1 - T_x = \emptyset$, ou bien $Y_2 - T = \emptyset$. De $Y_1 \not\subset T$ on déduit que $Y_1 - T \neq \emptyset$ et par conséquent $Y_1 \subset T_x$, contrairement à l'hypothèse (5). Donc, nous avons :

$$T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \cap T_{\mathfrak{B}}(Y_2) = \emptyset.$$

De la condition $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ nous déduisons que $T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2) = \emptyset$ c'est-à-dire

$$T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2) = T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \cap T_{\mathfrak{B}}(Y_2)$$

contrairement à l'hypothèse initiale. Par conséquent on a :

$$T_{\mathfrak{B}}(Y_1) \cap T_{\mathfrak{B}}(Y_2) \subseteq T_{\mathfrak{B}}(Y_1 \cap Y_2).$$

Proposition 4. La famille $\mathfrak{B}$ est un anneau des parties de l'ensemble E .

Démonstration. Soit $Y \in \mathfrak{B}$. Si $Y = \emptyset$, alors $\complement Y = E \in \mathfrak{B}$.

Si $Y = E$, alors $\complement Y = \emptyset \in \mathfrak{B}$.

On peut, donc, supposer que $Y \neq \emptyset$ et $Y \subset E$.

Supposons que $CY \notin \mathfrak{A}$. Pour établir l'affirmation, nous alors utiliser la proposition 4 qui montre que dans ce cas nous avons: $CY \subset T_{\mathfrak{A}}(CY)$. Cette inclusion étant stricte on déduit la relation:

$$(6) \quad \exists_{x_0 \in T_{\mathfrak{A}}(CY)} x_0 \notin CY$$

c'est-à-dire $x_0 \in Y \cap T_{\mathfrak{A}}(CY)$. La dernière relation montre que les ensembles $T_{\mathfrak{A}}(Y)$ et $T_{\mathfrak{A}}(CY)$ sont non-vides et puisque Y appartient à $\mathfrak{A}$ nous déduisons que $Y = T_{\mathfrak{A}}(Y)$.

De la proposition précédente nous déduisons:

$$\emptyset \neq T_{\mathfrak{A}}(Y) \cap T_{\mathfrak{A}}(CY) = T_{\mathfrak{A}}(Y \cap CY) = T_{\mathfrak{A}}(\emptyset) = \emptyset$$

ce qui est impossible. Donc $CY \in \mathfrak{A}$.

Soient A et B deux ensembles arbitraires de la famille $\mathfrak{A}$. De $A - B = A \cap CB$ et du fait que $CB \in \mathfrak{A}$ quelque soit $B \in \mathfrak{A}$, nous déduisons en vertu de la propriété (1) du système $\mathfrak{A}$ que $A - B \in \mathfrak{A}$. En vertu du fait que quels que soient $A \in \mathfrak{A}$ et $B \in \mathfrak{A}$ nous avons $A \cup B \in \mathfrak{A}$ (propriété (1) du système $\mathfrak{A}$), la dernière relation entraîne que $\mathfrak{A}$ est un anneau des parties de l'ensemble E .

Proposition 5. $\tau_e(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$.

Démonstration. Soit $Y \notin \mathfrak{A}$. De la proposition 2 nous déduisons l'inclusion stricte $Y \subset T_{\mathfrak{A}}(Y)$.

Soit $B \in \mathfrak{A}$, $B \neq \emptyset$, arbitraire. Nous avons l'inclusion:

$$Y \cap B \subset B \cap T_{\mathfrak{A}}(Y).$$

De la proposition 2 on déduit que $Y \cap B \notin \mathfrak{A}$, c'est-à-dire $Y \notin \tau_e(B)$. La dernière relation montre que $\tau_e(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A}$. L'inclusion $\mathfrak{A} \subseteq \tau_e(\mathfrak{A})$ étant évidente, nous déduisons que $\tau_e(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ et la proposition est démontrée.

Proposition 6. L'anneau généré par la famille $\mathcal{A}_{T_{\mathfrak{A}}/\mathfrak{A}}$ est la famille $\mathfrak{A} - \{\emptyset\} = \mathfrak{A}_1$.

Démonstration. De la proposition 1 nous déduisons l'équivalence:

$$Y_1 \in \mathfrak{A}_1 \Leftrightarrow T_{\mathfrak{A}}(Y_1) = Y_1$$

c'est-à-dire $\mathcal{A}_{T_{\mathfrak{A}}/\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_1$.

Soit $\mathfrak{A}'_1 = \langle \mathfrak{A}_1 \rangle$ l'anneau généré par $\mathfrak{A}_1$. Nous avons $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ et de la définition de $\mathfrak{A}'_1$ on déduit que $\mathfrak{A}'_1 \subset \mathfrak{A}$.

Soit $Y \in \mathfrak{A}$. Si $Y = \emptyset$, alors $Y \in \mathfrak{A}'_1$. Si $Y \neq \emptyset$, alors $Y \in \mathfrak{A} - \{\emptyset\} = \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}'_1$ et donc $Y \in \mathfrak{A}'_1$. Cette relation montre que l'ensemble Y appartient à $\mathfrak{A}'_1$, c'est-à-dire que $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'_1$ et donc $\langle \mathcal{A}_{T_{\mathfrak{A}}/\mathfrak{A}} \rangle = \mathfrak{A}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Petru Petrișor, Sur le prolongement d'une mesure. *Mathematica* 12 (35), 2, 345-353 (1970).
- [2] — Sur une structure uniforme générée par une relation d'ordre (sous presse).
- [3] — Sur un certain type de topologie définie la famille $\mathfrak{A}(X)$. *Mathematica*, 12 (35), 2, 335-343 (1970).

Reçu le 23. III 1973