

SCENARII DE TURBULENȚĂ ÎN CADRUL HAOSULUI DETERMINIST *)

de ADELINA GEORGESCU

Institutul de Matematică
București

C. VAMOȘ

Centrul de Prevedere a Vremii
Cluj

N. SUGIU

Institutul de Meteorologie și Hidrologie București

În lucrare se analizează câteva noi direcții în matematica aplicată (haos determinist, turbulență și fractali).

FLUCTUAȚII EXTERNE

Între cele două regimuri principale (laminar și turbulent) de mișcare a fluidelor există un regim de trecere, numit tranziție, care prezintă atât proprietăți laminare, cât și turbulente. Curgerile laminare sînt descrise macroscopic cu ajutorul unor cîmpuri fundamentale (viteza, presiunea, densitatea, temperatura), care constituie soluția clasică a modelului Navier-Stokes-Fourier (N-S-F) diferențial sau integral. Să considerăm pentru simplitate cazul materialelor ne micropolare. Atunci acest model constă din patru ecuații de bilanț (pentru următoarele mărimi fizice: masă, impuls, energie și entropie) și condiții la limită și inițiale, în clase de funcții Riemann integrabile. Forma diferențială a unei astfel de ecuații de bilanț este

$$\frac{dg}{dt} = f + p + s$$

unde: g , f , p și s sînt respectiv densități ale mărimii fizice considerate ale fluxului, producției și aportului de astfel de mărime. Specificarea materialului se face postulînd pe bază experimentală sau deducînd din teoria constitutivă legături între f , p și s pe de o parte și acești g pe de alta, în legături (ecuații constitutive) apărînd presiunea și temperatura. Anumiți coeficienți care apar datorită liniarității ecuațiilor constitutive se deter-

*) Lucrare prezentată pe data de 14 III 1989 în cadrul Seminarului de Mecanica Fluidelor condus de Prof. V. N. Constantinescu.

mină experimental macroscopic sau pe baze statistice. Deja de aici sînt posibile două interpretări ale mărimilor caracteristice fundamentale:

a) ele sînt medii statistice ale mărimilor aleatoare ce caracterizează mișcarea la nivel microscopic. În acest caz mărimile nou apărute în ecuațiile constructive au interpretări pur macroscopice, coeficienții se determină experimental, iar caracteristicile fundamentale sînt de aleatoare. Această interpretare conduce la existența unui prag (limita continuumului) de valabilitate a modelării;

b) caracteristicile fundamentale sînt mărimi aleatoare, dar în modelare intră doar media lor statistică și anume: în membrul stîng al lui (1) g reprezintă media mărimii $\tilde{g}$, iar f , p și s sînt legături macroscopice care modelează efectul fluctuațiilor $\tilde{g} - g$ microscopice la scară macroscopică. Această interpretare nu este obișnuită în cazul laminar.

În mișcarea turbulentă, cîmpurile g nu mai sînt fizic relevante, iar aparatul de măsură folosit în regim laminar, aici nu mai este adecvat. Turbulența este un regim de curgere principal distinct de cel laminar: în cazul turbulent modelul N-S-F își păstrează valabilitatea, dar cîmpurile (instantanee) furnizate de el nu mai sînt folositoare, datorită variațiilor deosebit de rapide și complicate, practic aleatoare. O variație asemănătoare are loc pentru funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x^{-1}$ care, pentru x mari, este lent variabilă în vreme ce variația sa devine din ce în ce mai rapidă, cînd $x \rightarrow 0$. Cu toate acestea f este infinit diferențiabilă dar stabilirea valorii sale într-un punct x_0 apropiat de 0 este dificilă, cerînd o precizie din ce în ce mai mare. Foarte aproape de 0 este practic imposibilă o astfel de determinare, o mică abatere în specificarea lui x_0 conducînd pentru $f(x_0)$ la orice valoare cuprinsă între -1 și $+1$ (fig. 1). Literatura

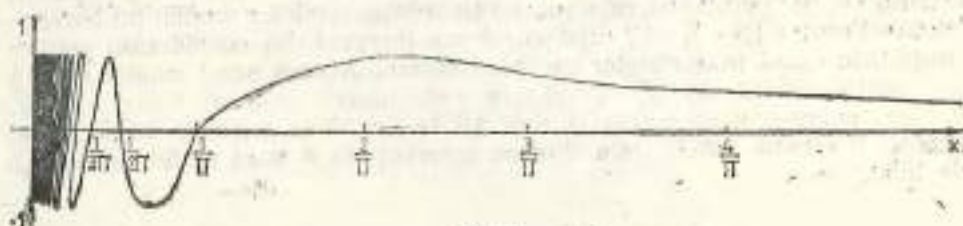


Fig. 1

oferă multe exemple de comportamente complicate ale unor funcții ce descriu dinamici deterministe. Deci, caracterul complicat al traiectoriilor în mișcare turbulentă și rapida variație a cîmpurilor menționate, nu implică neapărat cerința ca aceste cîmpuri să fie aleatoare și deci ca modelul N-S-F să fie considerat în clase de funcții aleatoare. Totuși, practic, acest model nu mai este adecvat pentru descrierea la scară macroscopică a turbulenței, tot așa cum în regimul laminar nu era relevantă o descriere microscopică discretă. Atunci, avem două posibilități analoge lui a) și b): a') mărimile caracteristice mișcării turbulente sînt medii statistice ale celor laminare, iar f , p și s sînt legate de acestea prin postuleri de modele de turbulență și fără să legăm pe f , p și s de vreo caracteristică a mișcării laminare. În acest caz, mediile statistice din turbulență apar ca duble medieri ale mărimilor microscopice; b') caracteristicile turbulente sînt

mărimile aleatoare (sau mai bine zis puternic variabile și complete) întâlnite în modelarea laminară în timp ce f , p și s sînt rezultatul la scara turbulenței a fluctuațiilor din caracteristicile laminare. Aceste interpretări țineau seama de modelul N-S-F valabil în cazul laminar. Există însă și o altă posibilitate și anume de a nu mai lega caracteristicile turbulente de cele laminare și a postula de la început că mărimile caracteristice turbulenței sînt aleatoare, dar că acelea fizic relevante sînt mediile lor statistice legate de o scară molară, f , p și s incluzînd efectul macroscopic al fluctuațiilor la aceea scară [1], [2]. Atunci, în loc de modelul N-S-F determinist, avem unul stocastic, în clase de astfel de funcții aleatoare. În teoriile clasice ale turbulenței se postulează tacit că în regim turbulent este valabil un model stocastic în clase de funcții aleatoare, fără să se specifice legătura între mediile statistice ale acestor funcții și mărimile din modelul N-S-F determinist (care la numere Reynold mici era laminar) și fără să se lege scara continuumului turbulent, continuu construit pornindu-se de la un sistem discret de grupări de molecule (moli) care pot să joace rolul moleculelor din cazul laminar. Această nespecificare face imposibilă o comparație și o legătură între mișcarea laminară și cea turbulentă, deoarece cele două regimuri sînt caracterizate de modele distincte și pe de altă parte provoacă serioase dificultăți în interpretarea fizică a rezultatelor teoretice. Se pare că modelul lunginii de amestec al lui Prandtl, bazat pe experimentele lui Nikuradze, la în considerare scara molară drept scara microscopică a turbulenței, ceea ce explică concordanța sa deosebită cu rezultatele măsurătorilor. Acest punct de vedere este actualmente dezvoltat de școala sovietică condusă de V. V. Struminskii [2].

Caracterul aleator al soluției modelului N-S-F stocastic provine din caracterul aleator al datelor (condiții inițiale, condiții la limită, vîscozitate turbulentă, forțe exterioare aleatoare). De aceea în acest model fluctuațiile au natură exterioară (zgomot) [11]), sînt introduse în sistemul fluid și nu se dezvoltă din perturbații. În consență, modelul N-S-F este adecvat descrierii turbulenței dezvoltate și nu tranziției.

Modelele matematice efectiv folosite în investigarea turbulenței dezvoltate se obțin simplificînd modelul N-S-F stocastic într-un mod diferit decît în cazul laminar, deoarece aici vîscozitatea, nestacionaritatea și amestecul sînt condiții necesare de turbulență. Aceste simplificări se fac diferențiat, ținîndu-se seama de proprietățile mediilor și corelațiilor și a legăturii dintre ele. Astfel, în teoriile statistice naive de tip Reynolds se postulează relația de închidere (modele de turbulență) de tip algebric, diferențial, integral sau mixt între medii temporale și corelații. În teoriile statistice propriu-zise se folosesc medii probabilistice, dar și aici se introduc ipoteze simplificatoare: asupra mediilor și anume izotropia (în teoria lui Kolmogorov), sau se postulează relații între spectre și corelații (ca în teoria lui Heisenberg) sau se prescriu ordinele de mărime ale corelațiilor (în teoria lui Kraichnan) [3]. Teoria statistică a lui Hopf pare cea mai naturală și generală, singura care să permită o trecere spre interpretări laminare. Complexitatea acestei teorii face ca interesul actual pentru ea să fie pur teoretic. Pe baza ei s-a dezvoltat teoria soluțiilor statistice bidimensionale ale lui Foias, de asemenea, deocamdată, numai de

interes teoretic, datorită gradului mare de abstracție al aparatului matematic, folosit, dar care deja a zdruncinat credința de un secol că orice mișcare turbulentă este tridimensională [4].

HAOSUL DETERMINIST

În turbulență, simplificările nu privesc mărimile instantanee, ci mediile, corelațiile sau spectrele lor; rezultă că în interacțiunile model fizic — model matematic — experiment, modelul fizic este cel mai important, deși el este mereu corectat de experiment și teorie (fig. 2). A se compara cu situația mai simplă din cazul laminar (fig. 3). Să remarcăm con-

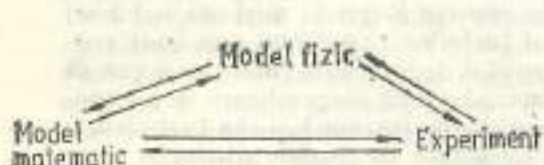


Fig. 2

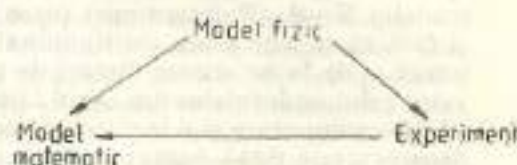


Fig. 3

diționarea experimentului de către ideea fizică, obligatorie, de altfel, în toată fizica [5], [6], [7]; de aceea, în laboratoarele de prestigiu, experimentatorii sînt aleși dintre cei mai buni cunoscători ai teoriilor fizice. Pe de altă parte, se constată că dacă în cazul general matematicienii depind de ideile fizice și de datele experimentale, în turbulență ei furnizează în plus, sugestii fizicienilor și experimentatorilor, apărînd astfel, concepte fizice, gîndite inițial matematic. În acest fel, a luat naștere matematica fizică, care apare în toate situațiile în care ideile fizice sînt complexe, ne intuitive, ei sugerate de modelul matematic, deci ea apare mult și în turbulență.

Problema principală, majoră a mecanicii fluidelor este apariția comportamentului turbulent aleator, haotic dintr-un comportament regulat, laminar; cum ajung perturbațiile interne, caracterizate de mărimi nealeatoare, să se transforme în fluctuații (aleatoare) fără aport de stocasticitate din exterior. Cunoașterea diferitelor tipuri particulare de turbulențe date de teoriile clasice menționate este importantă practic dar stăpînirea mecanismului originii turbulenței ar fi covîrșitoare, deoarece ea ar permite adevăratul control al turbulenței, adică folosirea în profunzime, dirijată, a caracteristicilor turbulenței și nu în ultimul rînd a energiei sale mari. În plus, observarea structurilor coerente laminare dezvoltate în mișcări turbulente sporesc impasul în care se găsesc fundamentele teoriei turbulenței. Dificultățile semnalate se întîlnesc în forme specifice în studiul celor mai diferite sisteme fizice și ele se formulează astfel: de ce evoluțiile ordonate devin haotice și de ce pe un fond de dezordine poate apare ordinea? Un răspuns la aceste întrebări îl oferă teoriile bazate pe conceptul de haos determinist: evoluțiile complet deterministe conțin în ele însele germeii dezordinii, fără aport de zgomot din exterior. Din punct de vedere matematic haosul determinist este o dinamică parti-

culară în spațiul fazelor (atașat evoluției sistemului fizic, evoluție ce depinde de anumiți parametri) în care portretul de fază are proprietăți probabiliste. De aceea, haosul determinist este numit și *haos de fază* sau haos din spațiul fazelor. Interpretarea și caracterizarea sa matematică aparține matematicii fizice în care fenomenul fizic este interpretat pornindu-se de la concepte matematice atașate dinamicii din spațiul fazelor. Astfel, evoluția unui sistem fizic se numește haotică, dacă sistemul dinamic atașat are un comportament haotic. Dinamica haotică de fază are diferite definiții. De exemplu, după Yorke, dinamica este haotică dacă mulțimea atractivă din spațiul fazelor conține o infinitate de orbite periodice, o infinitate numărabilă de orbite neperiodice și majoritatea orbitelor sînt hiperbolice, iar după Mandelbrot, dacă sistemul dinamic are un atractor fractal. Indiferent de definiția matematică, haosul determinist implică o dezordine macroscopică, constatată experimental sau observată direct. Trecerea de la dinamică regulată la una haotică, rămînînd în cadrul determinist, are loc conform unor „scenarii”, „drumuri spre turbulență” tipice. Prin turbulență, aici se înțelege o dinamică analoagă turbulenței dezvoltate a fluidelor și caracterizată de mărimi aleatoare. Haosul determinist este capătul „drumului”, pe cînd generarea sa are loc pe parcursul unei întregi zone de variație a parametrilor fizici, corespunzătoare tranziției laminar — turbulent.

EXEMPLE MODEL

În marea lor majoritate, fenomenele lumii vii sau nevii sînt modelate de probleme pentru ecuații cu derivate parțiale al căror comportament este departe de a fi înțeles. În anumite situații (e.g. cazul disipativ) unui astfel de fenomen i se atașează o problemă Cauchy pentru un sistem de ecuații diferențiale ordinare, numită *exemplu model*, care păstrează caracteristicile esențiale de fază ale fenomenului fizic. Ideea reducerii studiului calitativ al unei ecuații cu derivate parțiale la acela al unei ecuații diferențiale ordinare este una dintre cele mai profunde din ultimii ani. Ea a apărut în urma producerii unei cantități imense de rezultate obținute la calculator, cu care ocazie s-a observat că mulțimea soluțiilor anumitor ecuații cu derivate parțiale se „aplatisează” înînzînd, pe măsura depărtării de momentul inițial ($t = 0$), către o mulțime de dimensiune finită (varietate inercială) de soluții ale exemplului model [8]. Teoretic, Foias a ajuns să definească această varietate stabilind margini superioare ale numărului modurilor necesare să descrie (pentru $t \rightarrow \infty$) mulțimea soluțiilor către care tinde mulțimea tuturor soluțiilor modelului Navier-Stokes.

Uneori, exemplele model conțin tot ecuații cu derivate parțiale dar mult mai simple. În alte situații, echivalența ecuației cu derivate parțiale cu cea diferențială ordinară se referă nu la proprietăți asimptotice pentru $t \rightarrow \infty$ (ca în cazul problemelor de stabilitate și atractivitate menționate) ci $\lambda \rightarrow 0$ sau $\lambda \rightarrow \infty$ unde λ este un parametru fizic.

MATEMATICA EXPERIMENTALĂ ȘI MATEMATICA APLICATĂ

Matematica experimentală nu este o știință, ci o îndeletnicire care furnizează rezultate numerice deduse din rezolvarea la calculator a unor probleme pentru care nu se dispune de suficiente informații calitative riguroase, privind în special, existența și unicitatea soluției. Ea a fost impusă de cerințe practice stringente și s-a dezvoltat mult în ultimul timp, interferind cu arta și matematica [9]. Descrierea completă a dinamicii de fază, chiar în cazul exemplelor model, este imposibilă în absența calculatorului. Dar, pe de altă parte, interpretarea corectă a rezultatelor furnizate de calculator devine chiar principal imposibilă în cazul unor ecuații care depind sensibil de data inițială. În decelarea erorii calculatorului de micile variații ale soluției, un rol din ce în ce mai mare revine matematicienilor care posedă cunoștințe de teoria modelării. În anii noștri, periodic au loc congrese asupra modelării, se țin cursuri de modelare la marile instituții de învățământ superior, apar cărți dedicate acestui subiect [10], [11]. Matematica aplicată, prin știința modelării, este cea care sesizează mutațiile importante ale științei contemporane. În particular ea orientează studiul turbulenței în direcții principal noi în care s-a angajat cercetarea mondială: legătura între laminar și turbulent via haos determinist al sistemelor dinamice.

SISTEME DINAMICE

Sistemul dinamic este un concept geometric (de topologie diferențială) care modelează mișcarea (evoluția) unui sistem material cu ajutorul unei mulțimi infinite de transformări indexate după un număr natural n (în care caz sistemul se numește discret) sau după un parametru real t numit timp (în care caz sistemul dinamic este continuu). Deci, un *sistem dinamic discret* este o aplicație $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{E}$, unde $\mathcal{E}$ este mulțimea transformărilor $T_n: M \rightarrow M$ ale spațiului fazelor M care au proprietățile $T_{n+m} = T_n \circ T_m$, $n \in \mathbb{N}$ iar T_0 este transformarea identitate. T duce un număr natural n într-o funcție T_n și anume $T(n) = T_n$. La rîndul ei funcția T_n duce orice element din M într-un element din M . Aplicațiile de interval $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, generează sisteme dinamice discrete asociate unei rezolvări iterative a ecuației $x = g(x)$ și anume $T_n(x) = g^n(x)$, deci $T_n(x) = g^n(x_0)$ unde x_0 este valoarea inițială din procesul iterativ, iar $M = [a, b]$. Aflarea soluției acestei ecuații revine la găsirea punctului fix x^* al aplicației g . Dacă g este contracție, atunci un procedeu de aproximații succesive în care $x_n = g^n(x_0)$ converge către x^* deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ pentru orice alegere a lui x_0 . În acest procedeu apare șirul $x_0, x_1, x_2, \dots$, numit *orbită* sau *traiectoria* lui x_0 , definit deci ca $T_0(x_0), T_1(x_0), T_2(x_0), \dots$, reprezentînd locul pozițiilor lui x_0 , cînd timpul discret n crește de la zero la ∞ și deci descriînd *dinamica discretă* a lui x_0 în $\mathbb{R}$. Considerații geometrice simple arată că grafic x_{n+1} se construiește ducînd din x_n o perpendiculară pe axa x care înțeapă graficul lui g în P_1 . Din P_1 se duce o paralelă

la axa x care întâlnește prima bisectoare în P_2 ; proiecția lui P_2 pe axa x este tocmai x_{n+1} (fig. 4). Orbita lui x_0 este un șir de puncte astfel construite de pe axa x . Ea este descrisă cu ajutorul valorilor în x_0 ale tuturor transfor-

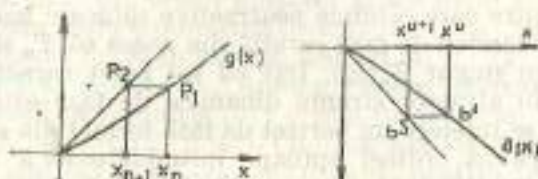


Fig. 4

mărilor T_n cu $n \geq 0$ deci folosind întregul sistem dinamic T dar referitor numai la un singur element x_0 al spațiului fazelor. Cu ajutorul lui T se poate descrie dinamica tuturor punctelor lui $[a, b]$ deci se poate găsi mulțimea orbitelor tuturor punctelor din spațiul fazelor, mulțime numită *portretul de fază* al lui T . Produsul $\mathbb{N} \times M$ se numește *spațiul fazelor extins*, iar șirul perechilor $(0, x_0), (1, x_1), (2, x_2), \dots$ se numește orbită din spațiul fazelor extins a lui x_0 . Deoarece T_n sînt funcții, în spațiul fazelor extins orbitele nu se intersectează în schimb se pot intersecta în spațiul fazelor. Aspectul portretului de fază al unui sistem dinamic este dictat de prezența în cadrul acestui portret a unor orbite speciale, atractive. Orbita care pleacă din $x_0 \in [a, b]$ se numește *parțial atractivă* pentru orbitele care pleacă din $x'_0 \in [c, d] \subset [a, b]$ (unde $[c, d] \ni x_0$) dacă distanța dintre ea și aceste orbite tinde la zero, deci dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(x_0) - T_n(x'_0)| = 0$.

$[c, d]$ se numește *bazin de atracție*. Dacă bazinul $[c, d]$ coincide cu întregul spațiu al fazelor $[a, b]$, atunci orbita ce pornește din x_0 se numește *total atractivă* sau, simplu, *atractivă*. Există o mulțime de alte tipuri de atractivitate sau de comportamente asimptotice pentru $n \rightarrow \infty$ ale orbitelor. Dintre orbitele tipice care pot fi atractive menționăm *orbitele periodice* (sau *ciclurile*) de perioadă n sau n -*ciclurile* în care $T_{m(n-1)+k}(x_0) = T_k(x_0)$ deci de forma $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots$ unde $0 \leq k \leq n-1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$. 1-ciclul este orbita constantă $x_0, x_0, x_0, \dots$ în care, deci x_0 este *punct fix* sau *punct de echilibru* al aplicației g care a generat pe T . Imaginea în spațiul fazelor a 1-ciclului coincide cu imaginea punctului fix x_0 . Dacă un n -ciclu descrie mișcarea lui x_0 , atunci x_0 este punct fix al lui g^n și se numește *punct periodic de perioadă n* . În spațiul fazelor un n -ciclu se reprezintă prin n puncte. Punctul fix este un punct periodic de perioadă 1. În cazul cînd g este o contracție, atunci sistemul dinamic T generat de g are orbita constantă $x^*, x^*, x^*, \dots$ (unde x^* este punctul fix al lui g) drept orbită total atractivă.

Mulțimea formată dintr-o orbită total atractivă sau din mulțimea tuturor orbitelor parțial atractive ale lui T se numește *mulțime atractivă* a lui T . Dacă mulțimea atractivă este local o varietate, atunci ea se numește *atractor*. Cînd T este generat de aplicația g iar aplicația g este o contracție, atunci mulțimea atractivă a lui T este un atractor compus dintr-un singur element (orbita constantă corespunzătoare punctului fix). Dacă g

nu este contracție, atunci atractorul poate fi format dintr-un număr finit sau infinit de orbite parțial atractive. O mulțime atractivă care nu este varietate se numește *atractor straniu* sau *atractor haotic*; ea conține o infinitate de orbite parțial atractive (i.e. al căror bazin de atracție este strict conținut în M) între care orbitele neattractive rătăcesc haotic. Caracterul determinant al dinamicii de fază rezultă din aceea că T_n sînt funcții, deci duc un x_0 într-un singur $T_n(x_0)$. Dar cu tot acest caracter determinist, cînd T posedă un atractor straniu dinamica de fază este haotică. Prin *dinamică haotică* se înțelege un portret de fază format din orbite complicate de descris (din cauza ordinii aproape întîmplătoare a termenilor săi), orbite care tind indecis cînd către o orbită a atractorului straniu, cînd către alta, nu părăsesc vecinătatea acestuia, dar nici nu tind către el după o regulă simplă, deși această tindere este complet specificată de valorile $T_n(x_0)$. Deci, mișcarea unui punct $x_0 \in M$ este haotică dacă, deși deterministă, ea are proprietăți nepredictibile (stocastice). Această dualitate: determinism pe de o parte (deoarece T_n sînt funcții) și *impredictibilitatea* practică (datorită complexității lui $T_n(x_0) = g^n(x_0)$) se numește *haos determinist* [12].

Se remarcă că același tip de haos determinist, deși într-o măsură mult mai mică, era cuprins și în funcția $\sin x^{-1}$. Dar acest haos nu este încă *turbulență*, deoarece el este teoretic predictibil, determinist, în timp ce prin definiție dinamica turbulentă este caracterizată de *mărimi aleatoare*. Cu toate acestea, haosul determinist este un capăt de drum spre *turbulență*, deoarece dinamica de fază este impredictibilă practic, dar are anumite proprietăți statistice comune cu *turbulența*. În acest fel, dacă sistemul dinamic T depinde de un parametru real λ și, pe măsură ce λ crește, mulțimea atractivă a lui T se modifică, din atractor devenind atractor straniu, rezultă că odată cu creșterea lui λ se parcurge un drum spre *turbulență* și acest drum este un scenariu care depinde de sistemul dinamic T concret. S-a constatat că există mai multe scenarii tipice pe care le vom expune la sfîrșitul lucrării după ce vom fi introdus și alte noțiuni.

Sistemele dinamice discrete pot fi generate și de funcții complexe, de variabilă complexă. Mult studiate sînt funcțiile raționale (cît de două polinoame) care posedă atractori bogați și dinamici haotice.

În cazul sistemelor dinamice continue numite și *curgeri*, toate definițiile și rezultatele de mai sus se transcriu corespunzător.

Dimensiunea unui sistem dinamic este dată de dimensiunea spațiului fazelor. Sistemele dinamice continue finit dimensionale sînt generate de soluții ale problemei Cauchy, pentru care soluția există și este unică,

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad (1)$$

pentru o ecuație (vectorială) diferențială ordinară, autonomă

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (2)$$

($\vec{f}$ se numește câmp de vectori), dacă (1), (2) are soluție unică și anume

$$T_t(\vec{x}_0) = \vec{x}(t, \vec{x}_0) \quad (3)$$

unde $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ este soluția acelei probleme. De fapt, sistemul dinamic este generat de mulțimea acestor probleme corespunzătoare tuturor datelor $\vec{x}_0 \in M$ sau, echivalent, de problema Cauchy a cărei dată inițială descrie pe M . Invers, oricărui sistem dinamic T , ale cărui valori T , sînt definite de (3), i se poate atașa o problemă Cauchy (1), (2) a cărei soluție să genereze pe T . Specificarea lui $\vec{x}_0$ în scrierea soluției lui (1), (2) arată că acea soluție corespunde datei inițiale $\vec{x}_0$. Aceeași scriere ușurează și o interpretare dinamică bazată pe definiția (3): orbita (traectoria) lui $\vec{x}_0$ este imaginea funcției $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ de t (cu $\vec{x}_0$ fixat). Cînd variază atât t cît și $\vec{x}_0$ se obține portretul de fază al lui T și, corespunzător, mulțimea soluțiilor tuturor problemelor Cauchy ale căror date inițiale sînt în spațiul fazelor M , care este izomorf cu $\mathbb{R}^n$ și deci îl alegem drept $\mathbb{R}^n$. Traectoriile de fază ale sistemelor dinamice continue sînt deci curbe din $\mathbb{R}^n$, variabila independentă t a problemei (1), (2) jucînd rol de parametru pe acele traectorii. Caracterizarea de continuu atribuită lui T se datorește faptului că traectoriile sale sînt continuu muri matematice (fiind curbe). 1-ciclurilor din cazul discret le corespund aici soluțiile staționare ale lui (2) deci vectorii constanți $x^* \in \mathbb{R}$, numiți *puncte de echilibru*, sau, simplu, *echilibr*, care satisfac ecuația

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = 0, \quad (4)$$

un analog al k -ciclurilor fiind torurile T^{k-1} din $\mathbb{R}^n$. Curbele de pe T^k sînt k -periodice în raport cu t . În particular, T^1 este orice curbă închisă topologic echivalentă cu cercul și deseori este numit *ciclu limită*.

Deși, Poincaré a fost primul care a observat că sistemele dinamice neliniare (i.e. cu $\vec{f}$ neliniar) pot avea mulțimi atractive bizare (i.e. atractorii stranii), totuși, începînd cu el, o atenție deosebită a fost acordată unor orbite atractive speciale: punctele de echilibru și ciclurile limită. Îndepărtarea atenției de la atractorii stranii a avut un efect negativ asupra dezvoltării teoriei sistemelor dinamice; probabil însă că aceasta nu putea fi evitat, deoarece acești atractori intrau în categoria mulțimilor ciudate, ocolite de toți matematicienii. Însuși Cantor cînd a dedus mulțimea care-i poartă numele a exclamat: „văd dar nu cred”. Abia după anii 1975, odată cu introducerea fractalilor de către Mandelbrot, mulțimile neobișnuite au început să fie studiate sistematic în cadrul teoriei geometrice a măsurii.

Spre deosebire de cazul discret în care traectoriile de fază sînt șiruri de puncte discrete, în sistemele dinamice continue traectoriile de fază sînt curbe. Acestea se pot intersecta în spațiul fazelor dar nu în spațiul fazelor extins, care acum este $\mathbb{R} \times M$, deoarece T_t sînt funcții și, corespunzător, problema Cauchy (1), (2) are soluție unică. Mișcările pe traectorie a unui singur punct $\vec{x}_0$ din spațiul fazelor îi corespunde variația în timp a soluției $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ a problemei Cauchy atașată în care $\vec{x}_0$ este fixat. O problemă Cauchy pentru o ecuație diferențială ordinară neautonomă de tipul (3) în care $\vec{f} = \vec{f}(t, \vec{x})$ generează, dacă soluția sa există și este unică un sistem dinamic $n + 1$ dimensional, deoarece în acest caz t se ia drept a $n + 1$ -a componentă a lui $\vec{x}$.

Ca orice funcție, un sistem dinamic T este cunoscut când se cunosc valorile sale, adică transformările T_t pentru $\forall t \in \mathbb{R}$, sau, ținând seama de (3), când se cunoaște explicit dependența soluției $\bar{x}$ de $\bar{x}_0$. Aceasta este posibil doar când f este funcție liniară sau afină de $\bar{x}$. De exemplu, în cazul afin $\dot{f}(\bar{x}) = A\bar{x} + B$, unde A este o matrice $n \times n$, iar B o matrice $n \times 1$, A și B depinzând de t , soluția $\bar{x}(t, t_0, \bar{x}_0)$ a problemei (1), (2) corespunzătoare în care $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ este dată de formula de variație a constantelor

$$\bar{x}(t, t_0, \bar{x}_0) = C(t, t_0) \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t C(t, s) B(s) ds$$

unde $C(t, t_0)$ este matricea fundamentală a lui (2) și are drept elemente $C_{ij} = x_i(t, t_0, \bar{e}_j)$. În acest caz, sistemul dinamic continuu T generat de

$$(1), (2) \text{ are valorile } T_t = C(t, t_0) + \int_{t_0}^t C(t, s) B(s) ds.$$

Următoarea problemă Cauchy, clasică, pentru un sistem de ecuații cu derivate parțiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{w}(t, \bar{x}) = \bar{w}_0(\bar{x}), \quad \frac{d\bar{w}}{dt} = \bar{N}(\bar{x}, \bar{w}) \quad (5)$$

în care $\bar{N}$ este un operator în general neliniar, generează un sistem dinamic continuu infinit dimensional T unde $T_t(\bar{w}_0) = \bar{w}(t, \bar{x}; \bar{w}_0)$, T_t sînt definite pe spațiul fazelor infinit dimensional M al funcțiilor netede $\bar{w}_0(\bar{x})$ care satisfac anumite condiții la limită pe $\partial\Omega$. Cu toate că explicitarea dependenței lui T_t de $\bar{w}_0$ este în general imposibilă, simpla existență a acestor funcții și anumite proprietăți ale lor le fac deosebit de folositoare în teoria calitativă. Problemelor fizicii matematice li se atașează sisteme dinamice mai ales pentru acest studiu calitativ, care în afara existenței, unicității și stabilității privește și atractivitatea, bifurcația și comportamentul asimptotic al soluțiilor acelor probleme. Sistemele dinamice fiind obiecte geometrice conduc la denumirea de teorie geometrică a ecuațiilor diferențiale pentru teoria calitativă.

Punerea problemelor Cauchy sub formă de sistem dinamic este o problemă matematică deosebit de dificilă.

Problema bifurcației mulțimii soluțiilor unei probleme pentru o ecuație diferențială apare când acele probleme depind de un parametru fizic λ sau de mai mulți. Bifurcația mulțimii soluțiilor problemelor staționare se numește bifurcație statică și analizează dependența acelei mulțimi de parametru (dependență care nu este funcție de λ , ci funcție multi-formă de λ). Teoriile de bifurcație statică furnizează poziția și numărul punctelor de bifurcație, numărul și forma varietăților bifurcate, mărghinirea acestora, comportamentul lor pentru valori deosebite ale lui λ . Studiul în jurul punctelor de bifurcație se numește local; cel al varietăților

bifurcate este un studiu global. Bifurcația mulțimii S a soluțiilor problemelor nestaționare se numește bifurcație dinamică. λ_0 este punct de bifurcație pentru S dacă la traversarea lui λ_0 , S își schimbă proprietățile topologice, deci dacă protretul de fază pentru $\lambda < \lambda_0$ nu este topologic echivalent cu cel pentru $\lambda > \lambda_0$. Spre deosebire de cazul static o bifurcație dinamică poate avea loc când se modifică doar proprietățile atractive ale atractorului sistemului dinamic atașat, dar nu și componența acelui attractor.

PROPRIETĂȚI STATISTICE ALE SISTEMELOR DINAMICE

În afara sistemelor dinamice definite există unele mai generale studiate de teoria sistemelor dinamice, parte a topologiei diferențiale. Topologia diferențială alături de analiza pe varietăți și alte ramuri matematice alcătuiesc analiza globală în cadrul căreia se studiază azi evoluțiile complexe ale sistemelor. Topologia studiază aplicațiile dintre spații; cînd aceste aplicații sînt diferențiale atunci ele formează obiectul topologiei diferențiale. O ramură importantă a analizei globale este teoria ergodică care studiază mișcarea în spații, mai generale, cu măsură $\bar{M} = (M, \Sigma, \mu)$ unde M este spațiul fazelor sistemului dinamic T , Σ este o σ -algebră de submulțimi ale lui M , iar μ este o măsură definită pe Σ . Spațiile cu măsură sînt spații ale fazelor pentru obiecte $\bar{T}$ mai generale decît T , numite de asemenea, în teoria ergodică, sisteme dinamice. Din punctul de vedere al teoriei probabilităților M poate fi interpretat ca spațiu al realizărilor unui proces aleator, iar măsura μ pe M ca distribuție de probabilitate pentru acest proces. Un sistem dinamic se zice ergodic, dacă $\mu(A) = 0$ sau 1 pentru orice mulțime invariantă A . Dacă $\bar{T}$ este un sistem dinamic ergodic atunci pentru orice $x \in M$, media în timp este egală cu media spațială, rezultat cunoscut sub numele de teorema ergodică și folosit în teoria lui Reynolds, deși această teoremă n-a fost demonstrată pentru modelul Navier-Stokes. Mai demult, teoria ergodică privea în principal teoremele de mediere și problemele calitative; se credea că spectrul este principalul invariant al sistemelor dinamice. Ulterior, s-a constatat că entropia este principalul invariant al sistemelor dinamice, teoria ergodică devenind în ultimii 25 de ani, o știință care studiază proprietățile statistice ale sistemelor dinamice [13], cu ajutorul noțiunilor fundamentale de ergodicitate, amestec, spectru, entropie. În cadrul său se studiază, în mod natural, proprietățile probabiliste ale sistemelor deterministe [10].

Studiul portretului de fază presupune determinarea: 1) dimensiunii atractorului (dimensiune care este de diferite tipuri: capacitatea termenilor, dimensiunea Hausdorff, dimensiunea fractală, informația, dimensiunea lui Renyi, dimensiunea lui Léapunov); 2) entropia (topologică, metrică, de tip Kolmogorov-Sinai); 3) spectrul exponenților Léapunov; 4) funcții de distribuție de probabilitate pentru secțiunile și aplicațiile Poincaré.

De exemplu, în spații metrice o dimensiune metrică este capacitatea d_ϵ : fie A o mulțime mărginită din $\mathbb{R}^n$; atunci $d_\epsilon(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$, unde $N(\epsilon)$ este numărul minim de curburi ϵ -dimensionale de latură ϵ care pot acoperi pe A . Dacă A este mulțimea lui Cantor, atunci

$d_s(A) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63$. Pentru diferite tipuri de mulțimi se pot defini

diferite tipuri de dimensiuni. Atractorii pot fi caracterizați cu ajutorul dimensiunii topologice care este un număr întreg egal cu dimensiunea spațiului euclidian local izomorf cu acea varietate. Tipurile celelalte de dimensiuni sînt necesare pentru atractorii haotici pentru care nu se poate defini dimensiunea topologică, deci acele dimensiuni ale atractorilor haotici sînt numere neîntregi. De exemplu, atractorul straniu al lui Lorenz este o mulțime de puncte din $\mathbb{R}^3$ care seamănă cu o suprafață, dar care are o anumită grosime mică, dimensiunea sa Hausdorff fiind 2,06.

Faptul că un atractor este straniu rezultă din aceea că, cel mai mare

exponent Liapunov $\lambda = \int_0^1 P(X) \left[\ln \left| \frac{dy}{dX} \right| \right] dX$, unde $P(X)$ este probabi-

litatea de a găsi o aplicație g în intervalul $(X, X + dX)$, este pozitiv. Pentru caracterizarea stocasticității atractorilor haotici cu ajutorul exponenților lui Liapunov recomandăm [14].

O proprietate importantă a atractorilor stranii este aceea că mișcarea asimptotică spre ei este haotică (aparent) și sensibilă de punctul de plecare (data inițială), această haoticitate (exprimată prin proprietățile probabilistice menționate) fiind intrinsecă, fără aport de zgomot. Atractorii stranii sînt structural stabili (adică orbitele lor nu sînt afectate semnificativ de mici perturbații). Posibilitatea apariției atractorilor stranii este importantă, deoarece prin aceasta, comportarea pe timp lung a soluțiilor este de natură aparent aleatoare, ceea ce nu este de așteptat din punctul de vedere tradițional al sistemelor dinamice. Această impredictibilitate pe termen lung este o consecință a proprietății de hiperbolicitate a sistemului dinamic, deci de aplatizare a spațiului fazelor în general în infinit de multe direcții. De această proprietate este legată noțiunea de varietate inercială.

MULȚIMI FRACTALE

Mulțimile fractale sau, pe scurt, *fractalii*, sînt mulțimi care nu pot fi caracterizate relevant de o dimensiune topologică a lor sau a oricărei părți conexe a lor, ci de o dimensiune Hausdorff fracționară. Ele sînt neobișnuite, parțial sau total discrete, pot fi sub formă de curbe dense, suprafețe subțiri, pot avea arie nulă dar conțin linii în orice direcție și multe alte ciudățenii. Cu toate acestea ele sînt întâlnite peste tot, formează regula și nu excepția. Neregularitatea lor caracteristică îndepărtează de ele pe cel obișnuit cu simetriile și formele simple ale geometriei euclidiene: punct, dreaptă, plan, spațiu euclidian. Noțiunea de fractal a fost introdusă în 1975 de B. Mandelbrot drept mulțime care are dimensiunea Hausdorff mai mare ca dimensiunea topologică (a oricărei părți conexe) a sa. Cei mai mulți fractali nu sînt varietăți. Cel mai simplu fractal este mulțimea triadică a lui Cantor. Alte exemple: praful dens, traiectoriile browniene, coastele mărilor și oceanelor, crestele munților, frontierele bazinelor de atracție ale anumitor aplicații. Unele mulțimi fractale sînt autosimilare

(asemenia cu părți ale lor); fractalii autosimilari pot fi generați iterativ. Deoarece, atractorii strani cunoscuți nu sînt varietăți și posedă dimensiune Hausdorff fracționară, ei sînt fractali, de aceea atractorii haotici se mai numesc și atractori fractali.

SCENARII DE TURBULENȚĂ

În experimentele numerice și în multe studii teoretice au fost puse în evidență drumuri tipice de trecere spre turbulență cînd parametrul λ al sistemului dinamic crește. De obicei în orice evoluție se întîlnesc mai multe astfel de scenarii.

Scenariul lui Landau și Hopf (L—H) de bifurcații statice repetate (fig. 5): există un număr infinit de puncte de bifurcație ale mulținii soluțiilor unei probleme staționare, în fiecare astfel de puncte apărînd noi



Fig. 5

soluții linear stabile pe seama destabilizării soluțiilor din care au provenit. La turbulență se ajunge cu o mișcare cvaziperiodică. În particular, acest scenariu este observat în mișcarea Couette și în convecțiile termice. Acest scenariu a fost sugerat de modelul lui Burgers [15], apărînd și în [16].

Scenariul lui Ruelle și Takens (R—T): trecerea spre turbulență implică numai trei bifurcații. După prima apare o orbită periodică printr-o bifurcație Hopf, după cea de a doua apare o orbită cvaziperiodică (tor), iar după cea de a treia apare un atractor haotic. La fiecare bifurcație are loc și o pierdere de stabilitate [17]. Experimental acest scenariu a fost pus în evidență în particular în mișcarea lui Couette. Acest scenariu a fost găsit prin experimente numerice, încă nefundamentate, asupra sistemului dinamic tridimensional al lui Lorenz. Remarcăm numărul finit de bifurcații necesare pentru turbulentizarea (haoticizarea) orbitelor sistemului dinamic prevăzută de acest scenariu.

Dintre inconvenientele scenariului L—H seamănăm: conduce la o statistică gaussiană care nu se observă în realitate; complexitatea dinamicii este gradată spre descreștere de observația experimentală că turbulența apare la un anumit număr Reynolds bine definit; starea turbulentă prezisă de acest scenariu nu depinde sensibil de datele inițiale, contrar observațiilor. Se constată prin comparație că aceste neajunsuri sînt înlăturate de scenariul R—T. Conform acestui scenariu, trecerea spre turbulență se face prin mișcări aperiodice (atractorii) ce posedă anumite proprietăți statistice. Scenariile L—H și R—T se referă la sisteme dinamice continue.

Scenariul lui Feigenbaum (F) al dublării perioadei se referă la sisteme dinamice discrete și a fost pus în evidență în 1978 prin experimente numerice [18] pentru cazul funcției logistice $g(x) = 4\lambda \times (1 - x)$, unde $\lambda \in [0, 1]$ este un parametru real, iar $x \in [0, 1]$. Scenariul F constă dintr-o acumulare de bifurcații de mulțimi de orbite a căror perioadă se dublează: un punct de echilibru care în punctul de bifurcație își pierde atractivitatea este înlocuit cu un 2-ciclu atractiv. Acesta își pierde atractivitatea în alt punct de bifurcație fiind înlocuit de un 2^2 -ciclu atractiv și așa mai departe, din orbite periodice de ordin 2^{k-1} , luând naștere orbite periodice de ordin 2^k , iar $k \rightarrow \infty$. Scenariul F a fost pus în evidență în anumite experimente de convecție. După unii autori, acest scenariu este al lui Grossmann, May și Feigenbaum sau al lui Verhulst.

În experimente, în oscilatori electrici neliniari, în reacția Belousov-Jabotinski, în convecția Rayleigh-Bénard într-un câmp magnetic apare scenariul (U) universal și anume dincolo de punctul de acumulare (2^∞ ciclu) din scenariul F. Cu câțiva ani înainte ca proprietățile de scalare universală ale aplicațiilor unidimensionale să fi fost descoperite de Feigenbaum, Metropolis și Stein au găsit că aplicațiile unidimensionale cu un singur punct de extrem posedă o dinamică universală, funcție de parametrul de bifurcație: după șirul dublărilor de perioadă a unei stări periodice cu o oscilație pe perioadă apar stări periodice cu K oscilații pe perioadă pentru toți K numere naturale și fiecare dintre aceste K -cicluri suferă șirul său propriu infinit de dublări de perioadă 2^K .

Scenariul lui Mandelbrot (M) a rezultat din experimente numerice [19] asupra sistemului dinamic generat de aplicația $z \rightarrow z^2 + c$ unde $z, c \in \mathbb{C}$, c fiind parametrul: în planul complex $\mathbb{C}$ există o mulțime M conexă, formată dintr-un corp principal (o cardioidă) terminat cu muguri, aceștia reproducând aproape asemenea cardioida și mugurii, această aproape similaritate repetându-se pînă la infinit. După poziția lui z în diferitele porțiuni centrale sau laterale ale lui M , sistemul dinamic discret generat de aplicația menționată are un portret de fază sau altul, incluzînd mulțimi atractive mărginite de frontiere fractale conexe. Dacă c este în exteriorul lui M atunci această frontieră nu este conexă. De aceea, cînd c traversează frontiera spre exteriorul lui M frontiera bazinelor de atracție explodează, descompunîndu-se într-o infinitate de puncte discrete. Se conjecturează că această traversare modelează trecerea spre turbulență [20].

Scenariul Manneville-Pomeau a fost găsit în 1980 și precizează o tranziție intermitentă spre turbulență în care faza laminară se menține ca $1/\sqrt{\text{Re} - \text{Re}_c}$. Acest scenariu a fost găsit în experimente din convecția Rayleigh-Bénard și în circuite electronice [21].

Nici unul dintre scenariile de turbulență n-a fost demonstrat riguros pentru modelul Navier-Stokes.

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. SĂVULESCU, *Tranziția de la scurgerea laminară la cea turbulentă*, Edit. Academiei Române, București, 1968.
2. В.В. СТРУМИНСКИЙ, (ред.), *Проблемы турбулентности течений*, Наука, Москва, 1987.
3. M. M. STANIŠIĆ, *The mathematical theory of turbulence*, Springer-Verlag, New York, 1958.
4. G. FOIAS, *Statistical study of Navier-Stokes equations*, *Reud. Sem. Mat. Padova*, 1: 48 (1973); II: 49 (1973).
5. P. L. KAPITA, *Experiment, teorie, practică*, Edit. politică, București, 1978.
6. D. L. DWYER, M. Y. HUSSAINI, R. G. VOIGT (eds.), *Theoretical approaches to turbulence*, *Applied Mathematical Sciences*, 50, Springer-Verlag, New York, 1985.
7. G. K. BATCHELOR, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, London, 1967.
8. P. CONSTANTIN, C. FOIAS, O. MANLEY, R. TEMAM, *Determining modes and dimension of turbulent flows*, *J. Fluid Mech.*, 159 (1985).
9. H. O. PEITGEN, P. H. RICHTER, *The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
10. A. LASOTA, M. C. MACKAY, *Probabilistic properties of deterministic systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
11. W. HORSTHEMKE, R. LEFEVER, *Noise-induced transitions*, Springer Series in Synergetics, 15, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
12. M. GHIL (ed.), *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, *Proceedings of the International School of Physics „Enrico Fermi”, course LXXXVIII*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
13. I. P. GORNFIELD, S. V. FOMIN, YA. G. SINAI, *Ergodic Theory, seria Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 245, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
14. K. IKEDA, K. MATSUMOTO, *A very high-dimensional chaotic attractor*, in „*Dynamical systems and nonlinear oscillations* (ed. G. Ikegami), vol. I, World Scientific Advanced Series in Dynamical Systems, 1986, p. 247–253.
15. E. HOPF, *A mathematical example displaying features of turbulence*, *Comm. Appl. Mat.*, 1, 4 (1948).
16. L. LANDAU, *On the problem of turbulence*, *C.R. Acad. Sc. USSR*, 44 (1944).
17. D. RUELLE, F. TAKENS, *On the nature of turbulence*, *Comm. Math. Phys.*, 20 (1971); 23 (1971).
18. M. J. FEIGNBAUM, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, *J. Statist. Phys.*, 19 (1978).
19. B. B. MANDELBROT, *Les objets fractals*, Flammarion, Paris, 1975.
20. ADELINA GEORGESCU, *Fractali și unele aplicații ale lor*, *St. Cerc. Fiz.*, 41, 3 (1989).
21. G. PFISTER, *Deterministic chaos in rotational Taylor-Couette flow*, *LNP* 235, Springer-Verlag, Berlin, 1985, p. 190–210.