UN PROBLÈME RELATIF À LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

par

D. V. Jonesco

Maître de Conférences à l'Université de Cluj

Reçue le 15 Mars 1928.

Relativement à l'équation aux dérivées partielles du second ordre, à caractéristiques réelles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a(x.y)\, z + b(x.y) \frac{\partial z}{\partial x} + c(x.y) \frac{\partial z}{\partial y} + f(x.y), \tag{1}$$

j'ai traité le problème suivant :

Trouver l'intégrale de l'équation (1) qui satisfait sur deux droites OI et OJ dont les équations sont $y = \alpha x$ et $x = \beta y$, et à l'origine, aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} a_1(x) z_A + b_1(x) p_A + c_1(x) q_A = 0 \\ a_2(y) z_B + b_2(y) p_B + c_2(y) q_B = 0 \\ z_0 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

où A est le point de la droite OI correspondant à l'abscisse x et B le point de OJ correspondant à l'ordonnée y, p et q désignent les dérivées partielles du premier ordre de z, par rapport à x et par rapport à y.

Dans un travail précédent[1]), j'ai traité le cas où $b_1(x)\, c_2(y) \neq 0$, et j'ai démontré l'existence de la solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions (2), dans toute la partie de l'angle $x\,O\,y$ comprise entre les droites OI et OJ, où les fonctions a, b, c, f et $a_1(x), \ldots, c_2(y)$ satisfont à des conditions très générales que j'ai d'ailleurs précisées. Dans la suite j'appelerai le cas où $b_1(x)\, c_2(y) \neq 0$, *le cas général.*

Dans ce travail je reprend dans le premier chapitre la même question pour le cas où le produit $b_1(x)\, c_2(y) = 0$, et dans le second chapitre je montrerai comment on peut traiter le problème précédent dans le cas où les conditions (2) ont un second membre.

[1]) „*Bulletin de la Société Mathématique de France*" 1927—28. p. 163.

Je ne traiterai dans le premier chapitre que de l'équation aux dérivées partielles simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y);$$

la méthode des approximations successives de M. Picard donnera ensuite l'intégrale de l'équation (1) avec les conditions (2). Dans mon travail déjà cité j'ai développé cette méthode pour le cas général.

CHAPITRE 1.

§ 1. $b_1(x) = 0 \quad , \quad c_2(y) \neq 0.$

1. Supposons $c_1(x) \neq 0$; on voit alors qu'on peut mettre les conditions (2) sous la forme suivante

$$\begin{cases} 0 = \alpha\, q_A + a(x)\, z_A \\ q_B = \beta\pi(y)\, p_B + b(y) z_B \\ 0 = z_0 \end{cases} \tag{3}$$

et le problème que nous allons traiter est de déterminer l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y) \tag{4}$$

qui satisfait aux conditions (3).

Cette intégrale sera donnée par la formule

$$z(x.y) = \zeta(x.y) + \varphi(x) + \psi(y), \tag{5}$$

où $\zeta(x.y)$ est une intégrale particulière de l'équation (4). Nous allons choisir pour la fonction $\zeta(x.y)$, l'intégrale de l'équation (4) qui s'annule le long des droites OI et OJ. D'autre part, nous pouvons supposer que

$$\varphi(0) = 0 \quad , \quad \psi(0) = 0,$$

car d'après les conditions (3) on a $z_0 = 0$.

En posant

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_A = \lambda(x) \quad , \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_B = \mu(y),$$

nous avons :

$$\begin{aligned} z_A &= \varphi(x) + \psi(\alpha x) \\ p_A &= \lambda(x) + \varphi'(x) \\ q_A &= -\frac{\lambda(x)}{\alpha} + \psi'(\alpha x) \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} z_B &= \varphi(\beta y) + \psi(y) \\ p_B &= -\frac{\mu(y)}{\beta} + \varphi'(\beta y) \\ q_B &= \mu(y) + \psi'(y) \end{aligned}$$

En écrivant que les conditions (3) sont satisfaites, on voit que $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont données par les équations fonctionnelles

$$
(6)\qquad \begin{cases} \alpha\psi'(\alpha x)+a(x)[\varphi(x)+\psi(\alpha x)]=\lambda(x) \\ \psi'(y)=\beta\pi(y)\varphi'(\beta y)+b(y)[\varphi(\beta y)+\psi(y)]-[1+\pi(y)]\mu(y). \end{cases}
$$

Nous allons transformer ces équations comme il suit. En intégrant la première équation en $\psi(\alpha x)$ on trouve :

$$
(7)\qquad \psi(\alpha x)=\int_0^x [\lambda(s)-a(s)\varphi(s)]\,e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\,ds
$$

De même en intégrant la seconde équation (6) en $\psi(y)$, on trouve :

$$
(8)\qquad \psi(y)=\pi(y)\varphi(\beta y)+\int_0^y b(t,y)\,\varphi(\beta t)\,dt-\int_0^y [1+\pi(t)]\,e^{\int_t^y b(\tau)\,d\tau}\mu(t)\,dt
$$

avec :

$$
(9)\qquad b(t,y)=[b(t)\pi(t)+b(t)-\pi'(t)]\,e^{\int_t^y b(\tau)\,d\tau}.
$$

Eliminons la fonction $\psi(y)$ entre les équations (7) et (8). Pour cela il suffit d'égaler le second membre de la formule (7) avec le second membre de la formule (8) où l'on remplace y par αx. On trouve l'équation fonctionnelle :

$$
(10)\qquad \pi(\alpha x)\varphi(\alpha\beta x)+\alpha\int_0^x b(\alpha s,\alpha x)\,\varphi(\alpha\beta s)\,ds
$$
$$
=\int_0^x a(s)\,e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\varphi(s)\,ds+h(x)
$$

avec :

$$
(11)\qquad h(x)=-\int_0^x \lambda(s)\,e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}ds-\int_0^{\alpha x}[1+\pi(t)]\,e^{\int_t^{\alpha x} b(\tau)\,d\tau}\mu(t)\,dt.
$$

L'équation (10) détermine la fonction $\varphi(x)$ et l'équation (7) donnera ensuite la fonction $\psi(y)$.

2. Supposons en premier lieu que la fonction $\pi(x)$ soit identiquement nulle. Alors les conditions aux limites du problème (3) se réduisent à

$$
q_A=-\frac{a(x)}{\alpha}z_A
$$
$$
q_B=\quad b(y)\,z_B
$$
$$
0=\quad z_0
$$

et l'équation (10) se réduit à :

$$
(12)\qquad \alpha\int_0^x b(\alpha s)\,e^{\int_{\alpha s}^{\alpha x} b(\tau)\,d\tau}\varphi(\alpha\beta s)\,ds=\int_0^x a(s)\,e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\varphi(s)\,ds+h(x),
$$

avec :

$$
(13)\qquad h(x)=-\int_0^x \lambda(s)\,e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}ds-\int_0^{\alpha x}\mu(t)\,e^{\int_t^{\alpha x} b(\tau)\,d\tau}dt.
$$

1°. Nous excluons l'hypothèse que $a(x)=b(y)=0$. En effet cela conduirait aux conditions

$$
q_A=q_B=0,
$$

qui ne déterminent pas $\varphi(x)$ et $\psi(y)$.

2°. Si une des fonctions $a(x)$ on $b(y)$ est nulle, l'équation (12) se réduit à une équation de Volterra de première espèce dont l'intégration se fait immédiatement. En effet supposons par exemple que $b(y)\equiv 0$. On a alors l'équation

$$
(14)\qquad \int_0^x a(s)\,e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\varphi(s)\,ds+h(x)=0.
$$

avec :

$$
(15)\qquad h(x)=-\int_0^x \lambda(s)\,e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}ds-\int_0^{\alpha x}\mu(t)\,dt.
$$

En dérivant l'équation (14) par rapport à x, on trouve

$$
a(x)\varphi(x)-a(x)\int_0^x a(s)\,e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\varphi(s)\,ds+h'(x)=0,
$$

d'où l'on tire :

$$
\varphi(x)=-h(x)-\frac{h'(x)}{a(x)}
$$

En remplaçant $h(x)$ par le second membre de la formule (15), ouve

$$\varphi(x)=\frac{\lambda(x)+\alpha\mu(\alpha x)}{a(x)}+\int_0^{\alpha x}\mu(t)\,dt.$$

L'équation (7) donnera ensuite par un calcul simple

$$\psi(y)=-\int_0^{y}\mu(t)\,dt,$$

de sorte que l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f(x,y),$$

qui satisfait aux conditions

$$q_A=-\frac{a(x)}{\alpha}z_A\quad,\quad q_B=0\quad,\quad z_0=0,$$

est

$$z(x,y)=\zeta(x,y)+\frac{\lambda(x)+\alpha\mu(\alpha x)}{a(x)}+\int_0^{\alpha x}\mu(t)\,dt-\int_0^{y}\mu(t)\,dt. \tag{16}$$

Remarquons qu'on peut trouver la formule (16) directement sans faire usage des équations (7) et (10).

3°. Supposons qu'aucune des fonctions $a(x)$, $b(y)$ ne soit pas nulle. Alors pour déterminer la fonction $\varphi(x)$, il faut intégrer l'équation fonctionnelle (12). En dérivant par rapport à x, on a :

$$\alpha\, b(\alpha x)\varphi(\alpha\beta x)+\alpha^2 b(\alpha x)\int_0^x b(\alpha s)\, e^{\int_{\alpha s}^{\alpha x} b(\tau)d\tau}\varphi(\alpha\beta s)\,ds$$

$$=a(x)\varphi(x)-a(x)\int_0^x a(s)\, e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\varphi(s)\,ds+h'(x).$$

En remplaçant l'intégrale du premier membre par le second membre de la formule (12), on est conduit à l'équation fonctionnelle :

$$\varphi(x)=\alpha\frac{b(\alpha x)}{a(x)}\varphi(\alpha\beta x)+\left[\alpha\frac{b(\alpha x)}{a(x)}+1\right]\int_0^x a(s)\, e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\varphi(s)\,ds=f(x), \tag{17}$$

avec :

$$f(x)=\frac{\alpha b(\alpha x)\,h(x)-h'(x)}{a(x)}$$

$$=\frac{\lambda(x)+\alpha\mu(\alpha x)}{a(x)}-\left[\alpha\frac{b(\alpha x)}{a(x)}+1\right]\int_0^x\lambda(s)\, e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\,ds.$$

Nous avons déjà rencontré l'équation fonctionnelle (17) dans notre travail sur le cas général.

On supposera que la droite $y=\alpha x$ est la plus rapprochée de Ox, tandis que la droite $x=\beta y$, est la plus rapprochée de Oy, de façon que $\alpha\beta<1$. Ensuite on fera sur les fonctions $a(x)$ et $b(y)$ des hypothèses analogues aux hypothèses faites sur les fonctions $\omega(x)$ et $\pi(y)$ du cas général.

3. Revenons à l'équation (10) et supposons que $\pi(x)\neq 0$. Nous allons faire une transformation qui ramenera cette équation à un type simple.

En divisant par $\pi(\alpha x)$, nous écrirons l'équation (10) sous la forme

$$\varphi(\alpha\beta x)+\int_0^x \mathrm{M}(x,s)\,\varphi(\alpha\beta s)\,ds=\int_0^x \mathrm{N}(x,s)\,\varphi(s)\,ds+h_1(x) \tag{18}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M}(x,s)&=\alpha\frac{b(\alpha s,\alpha x)}{\pi(\alpha x)}\\ \mathrm{N}(x,s)&=\frac{a(s)}{\pi(\alpha x)}\, e^{-\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\\ h_1(x)&=\frac{h(x)}{\pi(\alpha x)}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Désignons par $\Theta(x)$ le second membre de la formule (18) et calculons

$$\Theta(x)-\int_0^x \mathscr{M}(x,t)\,\Theta(t)\,dt, \tag{20}$$

où $\mathscr{M}(x,t)$ est le noyau résolvant de $\mathrm{M}(x,t)$, c'est à dire :

$$\mathscr{M}(x,t)=\mathrm{M}(x,t)-\mathrm{M}_1(x,t)+\mathrm{M}_2(x,t)-\ldots.$$

avec :

$$\mathrm{M}_1(x,t)=\int_t^x \mathrm{M}(x,s)\,\mathrm{M}(s,t)\,ds$$

$$\mathrm{M}_p(x,t)=\int_t^x \mathrm{M}(x,s)\,\mathrm{M}_{p-1}(s,t)\,ds.$$

Si l'on remplace dans (20) $\Theta(x)$ par le premier membre de la formule (18), cette expression se réduit à $\varphi(\alpha\beta x)$. On a donc l'équation:

$$\varphi(\alpha\beta x)=h_1(x)+\int_0^x \mathrm{N}(x,s)\varphi(s)\,ds$$

$$-\int_0^x \mathcal{M}(x,t)\left[h_1(t)+\int_0^t \mathrm{N}(t,s)\varphi(s)\,ds\right]dt,$$

ou bien

(21) $$\varphi(\alpha\beta x)=\int_0^x \mathrm{P}(x.s)\varphi(s)\,ds+f(x),$$

avec

(22) $$\begin{cases} \mathrm{P}(x,s)=\mathrm{N}(x,s)-\displaystyle\int_s^x \mathcal{M}(x,t)\,\mathrm{N}(t,s)\,dt \\ f(x)=h_1(x)-\displaystyle\int_0^x \mathcal{M}(x,t)\,h_1(t)\,dt. \end{cases}$$

Remarquons que d'après les formules (11), (19) et (22), on a:

(23) $$f(x)=\int_0^x \mathrm{A}(x.s)\lambda(s)\,ds+\int_0^x \mathrm{B}(x.s)\mu(\alpha s)\,ds$$

avec:

(24) $$\begin{cases} \mathrm{A}(x.s)=\dfrac{-1}{\pi(\alpha x)}e^{-\int_s^x a(\tau)d\tau}+\displaystyle\int_s^x \dfrac{\mathcal{M}(x.t)}{\pi(\alpha x)}e^{-\int_s^t a(\tau)d\tau}dt \\ \mathrm{B}(x.s)=-\dfrac{1+\pi(\alpha s)}{\pi(\alpha x)}e^{\int_{\alpha s}^{\alpha x} b(\tau)d\tau}+\alpha\displaystyle\int_s^x \mathcal{M}(x.t)\dfrac{1+\pi(\alpha s)}{\pi(\alpha x)}e^{\int_{\alpha s}^{\alpha t} b(\tau)d\tau}dt. \end{cases}$$

Remarque sur le noyau $\mathcal{M}(x,t)$. D'après les formules (19) et (20) le noyau $\mathrm{M}(x,t)$ est de la forme

$$\mathrm{M}(x.t)=\frac{m(t)}{n(x)}e^{\int_t^x b(\tau)\,d\tau},$$

qu'on peut encore écrire:

$$\mathrm{M}(x.t)=m(t)\,e^{-\int_0^t b(\tau)\,d\tau}\times\frac{1}{n(x)}e^{\int_0^x b(\tau)\,d\tau}.$$

$\mathrm{M}(x.t)$ est donc le produit d'une fonction de t par une fonction de x. Il résulte alors que le noyau résolvant est de la forme:

$$\mathcal{M}(x,t)=\mathrm{M}(x,t)\,\mathcal{K}(x,t)$$

avec:

$$\mathcal{K}(x.t)=1-\int_t^x \frac{m(\sigma_1)}{n(\sigma_1)}d\sigma_1+\int_t^x \frac{m(\sigma_1)}{n(\sigma_1)}d\sigma_1\int_{\sigma_1}^x \frac{m(\sigma_2)}{n(\sigma_2)}d\sigma_2$$

$$-\int_t^x \frac{m(\sigma_1)}{n(\sigma_1)}d\sigma_1\int_{\sigma_1}^x \frac{m(\sigma_2)}{n(\sigma_2)}d\sigma_2\int_{\sigma_2}^x \frac{m(\sigma_3)}{n(\sigma_3)}d\sigma_3+\ldots$$

5. Nous voyons donc que le problème posé au no. 1, se ramène à l'équation fonctionnelle (21). Nous allons supposer que la droite $y=\alpha x$ est la droite la plus approchée de $0y$, tandis que la droite $x=\beta y$, est la plus approchée de $0x$, de façon que $\gamma=\alpha\beta>1$.

Ensuite nous supposons que dans l'intervalle $(0,\alpha d')$ la fonction $\pi(y)$ est continue, qu'elle a une dérivée continue, et que $\dfrac{1}{\pi(y)}$ est également continue. Les fonctions $a(x)$, $b(y)$ sont supposées seulement continues dans les intervalles $(0,d)$ et $(0,\alpha d')$ respectivement.

Dans ces conditions, les fonctions $\mathrm{M}(x.s)$, $\mathrm{N}(x.s)$, $\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$ sont continues dans le rectangle R défini par

$$0\leq x\leq d\quad,\quad 0\leq s\leq \alpha d',$$

et par suite nous pouvons supposer dans l'équation (21) que le noyau $\mathrm{P}(x.s)$ ainsi que $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}$ sont continus.

Il résulte également que les noyaux $\mathrm{A}(x.s)$ et $\mathrm{B}(x.s)$ qui figurent dans les formules (23) et (24) ainsi que $\dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}$ sont continus. Alors en désignant par K, un nombre supérieur aux valeurs absolues de A, B, $\dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}$ dans R, on a:

(25) $$|f(x)|<\mathrm{K}\int_0^x\Big\{|\lambda(s)|+|\mu(\alpha s)|\Big\}ds$$

et

(25) $$|f'(x)| < K \left\{ |\lambda(x)| + |\mu(\alpha x)| + \int_0^x \left[|\lambda(s)| + |\mu(\alpha s)| \right] ds \right\}.$$

D'autre part on sait que si la fonction $f(x, y)$ est continue dans le rectangle R et si F désigne un nombre supérieur aux valeurs absolues de $f(x, y)$ dans R, on a pour l'intégrale $\zeta(x, y)$ s'annulant sur les droites OI et OJ, les inégalités suivantes

$$|\zeta(x,y)| < F \frac{1+\frac{1}{\gamma}}{1-\frac{1}{\gamma^2}} xy$$

$$\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right| < F y \quad , \quad \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right| < F x,$$

d'où résulte que

$$|\lambda(x)| < F\alpha x \quad ; \quad |\mu(y)| < F\beta y.$$

D'après les inégalités (25) et (26) il résulte alors que

$$|f(x)| < KF(\alpha+\gamma) \int_0^x s ds$$

$$|f'(x)| < KF(\alpha+\gamma) \left\{ x + \int_0^x s ds \right\}$$

c'est à dire:

(26) $$\begin{cases} |f(x)| < KFn \dfrac{x^2}{2} \\ |f'(x)| < KFn' x. \end{cases}$$

6. Nous allons maintenant démontrer que l'équation

(27) $$\varphi'(\gamma x) = \int_0^x P(x, s) \varphi(s) ds + f(x),$$

où γ, $P(x,s)$ et $f(x)$, satisfont aux conditions du no. précédent, admet une solution continue dans l'intervalle $(0, d)$, ayant une dérivée continue. Pour plus de généralité nous supposerons que la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions:

(28) $$\begin{cases} |f(x)| < S \dfrac{x^\mu}{\mu!} \\ |f'(x)| < S' \dfrac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \end{cases} \qquad (\mu \geq 2).$$

La démonstration se fait en employant la méthode des approximations successives. On satisfait formellement à l'équation (27) par le développement:

(29) $$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots$$

où

(30) $$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x) \\ \varphi_i(\gamma x) = \displaystyle\int_0^x P(x, s) \varphi_{i-1}(s) ds. \end{cases}$$

$(i = 1, 2, \dots)$

Démontrons maintenant la convergence de la série (28), ainsi que de la série

(31) $$\varphi'_0(x) + \varphi'_1(x) + \varphi'_2(x) + \dots$$

Désignons par H un nombre supérieur aux valeurs absolues de $P(x, s)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ dans R. D'après les inégalités (28), on a:

$$|\varphi_0(x)| < S \frac{x^\mu}{\mu!},$$

et par suite:

$$|\varphi_1(\gamma x)| < HS \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)!}$$

d'où

$$|\varphi_1(x)| < \frac{HS}{(\mu+1)!} \frac{x^{\mu+1}}{\gamma^{\mu+1}},$$

et ainsi de suite. On démontre en général que

$$|\varphi_p(x)| < \frac{SH^p}{(\mu+p)!} \frac{x^{\mu+p}}{\gamma^{p\left(\mu+\frac{p+1}{2}\right)}}$$

ce qui prouve que la série (29) est absolument et uniformément convergente.

En dérivant les formules (30) on a:

$$\gamma \varphi'_p(\gamma x) = P(x, x) \varphi_{p-1}(x) + \int_0^x \frac{\partial P(x, s)}{\partial x} \varphi_{p-1}(s) ds,$$

d'où:

$$\gamma |\varphi'_p(\gamma x)| < \frac{SH^p}{(\mu+p-1)!} \frac{x^{\mu+p-1}}{\gamma^{(p-1)\left(\mu+\frac{p}{2}\right)}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\mu+p}\right)$$

En désignant par

$$d_1 = 1 + \frac{d}{\mu},$$

on a:

$$|\varphi'_p(x)| < \frac{Sd_1 H^p}{(\mu+p-1)!}\;\frac{x^{\mu+p-1}}{\gamma^p\left(\mu+\frac{p+1}{2}\right)},$$

ce qui prouve que la série (31) est aussi absolument et uniformément convergente.

La solution donnée par la série (29) est *unique*. Nous n'insistons pas sur la démonstration.

En plus nous avons des inégalités simples pour $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$. En effet remarquons qu'on a:

$$\frac{1}{(\mu+p)!} < \frac{1}{\mu!}\,\frac{1}{p!}, \quad \gamma^p\left(\mu+\frac{p+1}{2}\right) > \gamma^{p(\mu+1)}$$

et par suite

$$|\varphi_p(x)| < \frac{Sx^\mu}{\mu!}\left(\frac{Hx}{\gamma^{\mu+1}}\right)^p\frac{1}{p!} \qquad (p=0, 1, 2, \dots)$$

$$|\varphi'_p(x)| < \frac{Sd_1x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\left(\frac{Hx}{\gamma\mu+1}\right)^p\frac{1}{p!} \qquad (p=1, 2, \dots)$$

ce qui prouve que

$$|\varphi(x)| < \frac{Sx^\mu}{\mu!}\,e^{\frac{Hx}{\gamma^{\mu+1}}}$$

$$|\varphi'(x)| < \frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\left(S'+Sd_1\,e^{\frac{Hx}{\gamma^{\mu+1}}}\right)$$

En désignant par

$$H_1 = e^{\frac{Hd}{\gamma^3}},$$

on a:

$$(32)\qquad \begin{cases} |\varphi(x)| < \dfrac{SH_1\,x^\mu}{\mu!} \\[2ex] |\varphi'(x)| < \dfrac{(S'+Sd_1H_1)\,x^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \end{cases}$$

En particulier pour $\mu=2$, on a:

$$(32')\qquad \begin{cases} |\varphi(x)| < \dfrac{SH_1x^2}{2!} \\[1ex] |\varphi'(x)| < (S'+Sd_1)\,x \end{cases}$$

où

$$d_1 = 1+\frac{d}{2}.$$

7. La formule (7) donne la fonction $\psi(y)$. En s'appuyant sur les inégalités (32'), on démontre sans peine que cette fonction satisfait à des inégalités analogues aux inégalités (32'). Ainsi le problème est complétement résolu. L'intégrale de l'équation (4) qui satisfait aux conditions (3) est donnée par la formule (5). En outre, on voit facilement d'après ce qui précède que cette intégrale satisfait aux inégalités de la forme

$$|z(x,y)| < L\,\frac{(x+y)^2}{2!}$$

$$|p(x,y)| < L(x+y), \qquad |q(x,y)| < L(x+y),$$

qui permettent d'appliquer avec succès la méthode des approximations succéssives de M. Picard relativement à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = a(x,y)\,z + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + c(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + f(x,y),$$

et aux conditions (3).

8. Reprenons la discussion des conditions (2) commencée au no. 1 et supposons que dans (2) à part les hypothèses $b_1(x)=0$, $c_2(y)\neq 0$, on a en outre $c_1(x)=0$. Alors les conditions (2) se mettent sous la forme

$$(33)\qquad \begin{cases} 0 = z_A \\ q_B = \beta\pi(y)\,p_B + b(y)\,z_B \\ 0 = z_0 \end{cases}$$

L'intégrale de l'équation (4) est toujours donnée par la formule (5), où $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont données par les équations fonctionnelles

$$\varphi(x) + \psi(\alpha x) = 0$$

$$\psi'(y) = \beta\pi(y)\,\varphi'(\beta y) + b(y)\,[\varphi(\beta y)+\psi(y)] - [1+\pi(y)]\,\mu(y).$$

Nous transformons la seconde équation et nous la mettons sous la forme (8), et en remplaçant ensuite $\varphi(\beta y)$ par $-\psi(\alpha\beta y)$, nous avons pour $\psi(y)$ l'équation fonctionnelle

$$\psi(y) = -\pi(y)\,\psi(\alpha\beta y) - \int_0^y b(t,y)\,\psi(\alpha\beta t)\,dt - \int_0^y [1+\pi(t)]\,e^{\int_t^y b(\tau)\,d\tau}\,\mu(t)\,dt$$

Nous avons déjà rencontré une équation de cette forme dans l'étude du cas général. On fera sur $\pi(y)$ et $b(y)$ des hypothéses analogues aux hypothèses faites dans le cas général, et on traitera le problème comme nous l'avons indiqué.

§ 2. $b_1(x)=0, \quad c_2(y)=0.$

9. Supposons maintenant dans les conditions (2) que $b_1(x)=0$ et $c_2(y)=0$. Supposons en outre que $c_1(x)\,b_2(y) \neq 0$. Alors nous mettons ces conditions sous la forme

$$(34)\qquad \begin{cases} \alpha q_A + a(x)\,z_A = 0 \\ \beta p_B + b(y)\,z_B = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

L'intégrale de l'équation (4) est donnée par l'équation (5) où $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont déterminées par les équations fonctionnelles:

$$(35)\qquad \begin{cases} \alpha\psi'(\alpha x) + a(x)\,[\varphi(x)+\psi(\alpha x)] = \lambda(x) \\ \beta\varphi'(\beta y) + b(y)\,[\psi(y)+\varphi(\beta y)] = \mu(y). \end{cases}$$

En intégrant ces équations avec la condition $\varphi(0)=\psi(0)=0$, on trouve

$$(36)\qquad \begin{cases} \psi(\alpha x) = -\int_0^x a(s)\, e^{-\int_s^x a(\sigma)\,d\sigma}\, \varphi(s)\,ds + \int_0^x \lambda(s)\, e^{-\int_s^x a(\sigma)\,d\sigma}\, ds \\ \varphi(\beta y) = -\int_0^y b(t)\, e^{-\int_t^y b(\tau)\,d\tau}\, \psi(t)\,dt + \int_0^y \mu(t)\, e^{-\int_t^y b(\tau)\,d\tau}\, dt. \end{cases}$$

Eliminons la fonction $\psi(y)$ entre ces équations. Pour cela on remplace dans la seconde équation y par αx et ensuite, dans l'intégrale du second membre on fait le changement de variable $t=\alpha t'$. On trouve

$$\varphi(\alpha\beta x) = \alpha\int_0^x b(\alpha t)\, e^{-\int_{\alpha t}^{\alpha x} b(\tau)\,d\tau}\, \psi(\alpha t)\,dt + \alpha\int_0^x \mu(\alpha t)\, e^{-\int_{\alpha t}^{\alpha x} b(\tau)\,d\tau}\, dt.$$

Maintenant, on remplace $\psi(\alpha t)$ par le sesond membre de la première formule (36). On trouve

$$\varphi(\alpha\beta x) = \alpha\int_0^x b(\alpha t)\, e^{-\int_{\alpha t}^{\alpha x} b(\tau)\,d\tau}\, dt \int_0^t a(s)\, e^{-\int_s^t a(\sigma)\,d\sigma}\, \varphi(s)\,ds$$

$$-\alpha\int_0^x b(\alpha t)\, e^{-\int_{\alpha t}^{\alpha x} b(\tau)\,d\tau}\, dt \int_0^t \lambda(s)\, e^{-\int_s^t a(\sigma)\,d\sigma}\, ds$$

$$+\alpha\int_0^x \mu(\alpha t)\, e^{-\int_{\alpha t}^{\alpha x} b(\tau)\,d\tau}\, dt,$$

et en appliquant une formule de DIRICHELET, on voit que cette équation se ramène à une équation de la forme

$$\varphi(\alpha\beta x) = \int_0^x M(x,s)\,\varphi(s)\,ds + f(x),$$

que nous avons déjà rencontrée précédemment[1])

10. Si on a $b_1(x)=0$, $c_1(x)=0$, $c_2(y)=0$, $b_2(y)\neq 0$, les conditions (2) se mettent sous la forme

$$(38)\qquad \begin{cases} z_A = 0 \\ \beta p_B + b(y)\,z_B = 0 \\ z_0 = 0. \end{cases}$$

et les équations qui déterminent les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ de la formule (5) sont:

$$\varphi(x)+\psi(\alpha x)=0$$
$$\beta\varphi'(\beta y) + b(y)\,[\psi(y)+\varphi(\beta y)] = \mu(y).$$

En remplaçant $\psi(\alpha t)$ par $-\varphi(t)$, dans la formule (37), on est conduit à l'équation

$$\varphi(\alpha\beta x) = \alpha\int_0^x b(\alpha t)\, e^{-\int_{\alpha t}^{\alpha x} b(\tau)\,d\tau}\, \varphi(t)\,dt + \alpha\int_0^x \mu(\alpha t)\, e^{-\int_{\alpha t}^{\alpha x} b(\tau)\,d\tau}\, dt,$$

étudiée au no. 6.

11. Enfin supposons que

$$b_1(x)=0, \qquad c_1(x)=0, \qquad b_2(y)=0, \qquad c_2(y)=0.$$

Les conditons (2) deviennent

$$z_A = 0 \quad , \quad z_B = 0\,;$$

on est dans le cas du problème de M. GOURSAT.

CHAPITRE II.

12. Reprenons l'équation aux dérivées partielles du second ordre:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = a(x.y)\,z + b(x.y)\frac{\partial z}{\partial x} + c(x.y)\frac{\partial z}{\partial y} + f(x.y),$$

[1]) Nos 3, 5, et 6.

et cherchons l'intégrale de cette équation, qui satisfait relativement aux droites $y=\alpha x$ et $x=\beta y$, aux conditions

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1(x) z_A + b_1(x) p_A + c_1(x) q_A = f(x) \\ a_2(y) z_B + b_2(y) p_B + c_2(y) q_B = g(y) \\ \qquad\qquad z_0 = 0 \end{cases}$$

où A est le point de la droite $y=\alpha x$, correspondant à l'abscisse x et B le point de la droite $x=\beta y$, correspondant à l'ordonnée y.

Les conditions précédentes, sont les conditions (2), du premier chapitre avec un second membre.

Je veux montrer qu'on ramène l'étude de ce problème à l'étude du même problème avec des conditions (2) sans second membre, en faisant sur la fonction $z(x, y)$ une transformation convenable.

Dans les formules (2) faisons $x=0$ et $y=0$. On trouve

$$(3)\qquad \begin{cases} b_1(0) p_0 + c_1(0) q_0 = f(0) \\ b_2(0) p_0 + c_2(0) q_0 = g(0). \end{cases}$$

Nous supposons dans la suite que les coefficients $b_1(0) \ldots . g(0)$ remplissent toutes les conditions nécessaires pour que le système (3) en p_0 et q_0 soit compatible.

13. Faisons le changement de fonction défini par la formule

$$(4)\qquad z(x, y) = Z(x, y) + \lambda\left(\frac{y-\alpha x}{1-\alpha\beta}\right) + \mu\left(\frac{x-\beta y}{1-\alpha\beta}\right),$$

$\lambda(x)$ et $\mu(y)$ étant deux fonctions inconnues pour le moment.

En dérivant l'équation (4) par rapport à x et à y, nous avons

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\lambda'\left(\frac{y-\alpha x}{1-\alpha\beta}\right) + \frac{1}{1-\alpha\beta}\mu'\left(\frac{x-\beta y}{1-\alpha\beta}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{1}{1-\alpha\beta}\lambda'\left(\frac{y-\alpha x}{1-\alpha\beta}\right) - \frac{\beta}{1-\alpha\beta}\mu'\left(\frac{x-\beta y}{1-\alpha\beta}\right),$$

et par suite

$$z_A = Z_A + \mu(x) + \lambda(0)$$

$$p_A = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_A + \frac{1}{1-\alpha\beta}\mu'(x) - \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\lambda'(0)$$

et

$$q_A = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_A - \frac{\beta}{1-\alpha\beta}\mu'(x) - \frac{1}{1-\alpha\beta}\lambda'(0),$$

$$z_B = Z_B + \lambda(y) + \mu(0)$$

$$p_B = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_B - \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\lambda'(y) + \frac{1}{1-\alpha\beta}\mu'(0)$$

$$q_B = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_B + \frac{1}{1-\alpha\beta}\lambda'(y) - \frac{\beta}{1-\alpha\beta}\mu'(0).$$

Les équations (2) peuvent alors s'écrire

$$(5)\qquad \begin{cases} a_1(x) Z_A + b_1(x)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_A + c_1(x)\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_A \\ \quad + a_1(x)\mu(x) + \frac{b_1(x)-\beta c_1(x)}{1-\alpha\beta}\mu'(x) + a_1(x)\lambda(0) + \frac{c_1(x)-\alpha b_1(x)}{1-\alpha\beta}\lambda'(0) = f(x) \\ a_2(y) Z_B + b_2(y)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_B + c_2(y)\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_B \\ \quad + a_2(y)\lambda(y) + \frac{c_2(y)-\alpha b_2(y)}{1-\alpha\beta}\lambda'(y) + a_2(y)\mu(0) + \frac{b_2(y)-\beta c_2(y)}{1-\alpha\beta}\mu'(0) = g(y) \\ \qquad Z_0 + \lambda(0) + \mu(0) = 0. \end{cases}$$

Supposons qu'on ait choisi les fonctions $\lambda(x)$ et $\mu(y)$, tel que

$$(6)\qquad \begin{cases} a_1(x)\mu(x) + \frac{b_1(x)-\beta c_1(x)}{1-\alpha\beta}\mu'(x) + a_1(x)\lambda(0) + \frac{c_1(x)-\alpha b_1(x)}{1-\alpha\beta}\lambda'(0) = f(x) \\ a_2(y)\lambda(y) + \frac{c_2(y)-\alpha b_2(y)}{1-\alpha\beta}\lambda'(y) + a_2(y)\mu(0) + \frac{b_2(y)-\beta c_2(y)}{1-\alpha\beta}\mu'(0) = g(y) \\ \qquad \lambda(0)=0, \qquad \mu(0)=0; \end{cases}$$

alors les équations (5) se réduisent aux équations

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1(x) Z_A + b_1(x)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_A + c_1(x)\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_A = 0 \\ a_2(y) Z_B + b_2(y)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_B + c_2(y)\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_B = 0 \\ \qquad Z_0 = 0, \end{cases}$$

c'est à dire aux équations (2), où on a fait

$$f(x) = 0 \text{ et } g(y) = 0.$$

La question revient donc à déterminer les fonctions $\lambda(x)$ et $\mu(y)$, par les conditions (6). Les constantes $\lambda'(0)$ et $\mu'(0)$ sont déterminées par les équations (6). En effet en faisant $x=0$, $y=0$, dans les équations (6), on obtient

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{b_1(0)-\beta c_1(0)}{1-\alpha\beta}\mu'(0)+\dfrac{c_1(0)-\alpha b_1(0)}{1-\alpha\beta}\lambda'(0)=f(0) \\ \dfrac{b_2(0)-\beta c_2(0)}{1-\alpha\beta}\mu'(0)+\dfrac{c_2(0)-\alpha b_2(0)}{1-\alpha\beta}\lambda'(0)=g(0) \end{cases}$$

Le système (8) en $\lambda'(0)$ et $\mu'(0)$ est compatible. En effet calculons son déterminant Δ_1, on trouve :

$$\Delta_1=\frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\begin{vmatrix} b_1(0) & c_1(0) \\ b_2(0) & c_2(0)\end{vmatrix}.(1-\alpha\beta)=\frac{\Delta}{1-\alpha\beta},$$

où Δ est le déterminant du système (3).

Supposons $\Delta \neq 0$, il résultera que $\Delta_1 \neq 0$ et par suite que le système (8) est compatible.

Supposons $\Delta=0$, mais qu'un élément au moins n'est pas nul, $b_1(0)$, par exemple. Comme le système (3) est compatible, le déterminant caractéristique

$$\delta=\begin{vmatrix} b_1(0) & f(0) \\ b_2(0) & g(0)\end{vmatrix}$$

est nul.

Dans le système (8) au moins un des coefficients

$$b_1(0)-\beta c_1(0)\quad,\quad c_1(0)-\alpha b_1(0),$$

n'est pas nul. En effet si les deux coefficients seraient nuls, on aurai

$$b_1(0)=\beta c_1(0)\quad,\quad c_1(0)=\alpha b_1(0)$$

et par suite $\alpha\beta=1$. Ceci entrainerait que les droites $x=\beta y$ et $y=\alpha x$, soient confondues, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Supposons alors que le coefficient $b_1(0)-\beta c_1(0)$ ne soit pas nul et formons le déterminant caractéristique correspondant

$$\delta_1=\begin{vmatrix} \dfrac{b_1(0)-\beta c_1(0)}{1-\alpha\beta} & f(0) \\ \dfrac{b_2(0)-\beta c_2(0)}{1-\alpha\beta} & g(0)\end{vmatrix}.$$

Le déterminant Δ étant nul, nous avons

et par suite $\qquad c_1(0)=kb_1(0)\quad,\quad c_2(y)=kb_2(0),$

$$\delta_1=\frac{1-k\beta}{1-\alpha\beta}\delta=0.$$

Le système (8) est donc compatible.

Enfin supposons que tous les éléments du déterminant Δ soient nuls. Le système (3) étant compatible nous avons

$$f(0)=0,\quad,\quad g(0)=0,$$

et par suite, le système (8) est encore compatible.

J'ai ainsi démontré que le système (8) est compatible. En portant les valeurs trouvées pour $\lambda'(0)$ et $\mu'(0)$ dans le système (6) nous obtenons deux équations différentielles du premier ordre qui déterminent complétement $\lambda(x)$ et $\mu(y)$.

On peut donc dans les formules (2) supposer $f(x)=0$ et $g(y)=0$, sans diminuer la généralité du problème.

14. La méthode précédente ne s'applique pas dans deux cas :

1^er cas.

$$a_1(x)=0\quad,\quad b_1(x)=\beta c_1(x)\neq 0,$$

tadis que $a_2(y)$ et $c_2(y)-\alpha b_2(y)$ ne sont pas nuls à la fois.

2^d cas.

$$a_1(x)=0\qquad b_1(x)=\beta c_1(x)\neq 0$$
$$a_2(y)=0\qquad c_2(y)=b_2(y)\neq 0.$$

Pour démontrer qu'on peut rendre dans les formules (2), $f(x)=0$ et $g(y)=0$, nous allons modifier légérement la méthode exposée au no. 13.

1º Supposons que

$$a_1(x)=0,\qquad b_1(x)=\beta c_1(x)\neq 0.$$

Alors les conditions (2) peuvent s'écrire sous la forme

$$(9)\quad \begin{cases} \beta p_A+q_A=f(x) \\ a_2(y)\,z_B+b_2(y)\,p_B+c_2(y)\,q_B=g(y) \\ z_0=0. \end{cases}$$

Faisons le changement de fonction défini par

$$z(x,y)=Z(x,y)+\lambda\left(\frac{y-\alpha x}{1-\alpha\beta}\right)+x\mu\left(\frac{x-\beta y}{1-\alpha\beta}\right).$$

En dérivant par rapport à x et à y on a :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\lambda'\left(\frac{y-\alpha x}{1-\alpha\beta}\right)+\mu\left(\frac{x-\beta y}{1-\alpha\beta}\right)+\frac{x}{1-\alpha\beta}\mu'\left(\frac{x-\beta y}{1-\alpha\beta}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{1}{1-\alpha\beta}\lambda'\left(\frac{y-\alpha x}{1-\alpha\beta}\right)-\frac{\beta x}{1-\alpha\beta}\mu'\left(\frac{x-\beta y}{1-\alpha\beta}\right).$$

Il résulte que

$$p_A=\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_A+\mu(x)+\frac{x}{1-\alpha\beta}\mu'(x)-\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\lambda'(0)$$

$$q_A=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_A-\frac{\beta x}{1-\alpha\beta}\mu'(x)+\frac{1}{1-\alpha\beta}\lambda'(0),$$

de sorte que la première équation (9) devient

$$\beta\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_A+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_A+\beta\mu(x)+\lambda'(0)=f(x). \tag{10}$$

Ensuite on a :

$$z_B=Z_B+\lambda(y)+\beta y\mu(0)$$

$$p_B=\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_B-\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\lambda'(y)+\mu(0)+\frac{\beta y}{1-\alpha\beta}\mu'(0)$$

$$q_B=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_B+\frac{1}{1-\alpha\beta}\lambda'(y)-\frac{\beta^2 y}{1-\alpha\beta}\mu'(0),$$

de sorte que la seconde équation (9) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & a_2(y)Z_B+b_2(y)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_B+c_2(y)\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_B \\ & +a_2(y)\lambda(y)+\frac{c_2(y)-\alpha b_2(y)}{1-\alpha\beta}\lambda'(y)+[b_2(y)+\beta y a_2(y)]\mu(0) \\ & +\frac{\beta y[b_2(y)-\beta c_2(y)]}{1-\alpha\beta}\mu'(0)=g(y) \end{aligned} \tag{11}$$

Déterminons $\lambda(y)$ et $\mu(x)$ par les conditions suivantes

$$\left\{\begin{aligned} & \beta\mu(x)+\lambda'(0)=f(x) \\ & a_2(y)\lambda(y)+\frac{c_2(y)-\alpha b_2(y)}{1-\alpha\beta}\lambda'(y)+[b_2(y)+\beta y a_2(y)]\mu(0) \\ & \qquad +\frac{\beta y[b_2(y)-\beta c_2(y)]}{1-\alpha\beta}\mu'(0)=g(y) \\ & \lambda(0)=0. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Alors les équations (10) et (11) se ramènent aux équations (9) sans second membre. Toute la question est donc de déterminer deux fonctions $\lambda(y)$ et $\mu(x)$ satisfaisant aux équations (12).

Posons

$$\lambda'(0)=k,$$

De la première équation (12) on déduit

$$\mu(x)=\frac{f(x)-k}{\beta}.$$

Faisons dans la seconde équation (12) $y=0$. On obtient

$$\frac{c_2(0)-\alpha b_2(0)}{1-\alpha\beta}k+b_2(0)\frac{f(0)-k}{\beta}=g(0)$$

ou bien

$$\frac{\beta[c_2(0)-\alpha b_2(0)]-b_2(0)(1-\alpha\beta)}{1-\alpha\beta}k=\beta g(0)-b_2(0)f(0)$$

c'est à dire

$$\frac{\beta c_2(0)-b_2(0)}{1-\alpha\beta}k=\beta g(0)-b_2(0)f(0). \tag{13}$$

Cette équation nous donne k.

En effet, nous avons déjà remarqué au no. 12 que si dans les équations (9) on fait $x=0$ et $y=0$, on obtient un système compatible.

$$\left\{\begin{aligned} & \beta p_0+q_0=f(0) \\ & b_2(0)p_0+c_2(0)q_0=g(0). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta=\beta c_2(0)-b_2(0).$$

Si $\Delta\neq 0$, l'équation (13) nous donnera bien la valeur de k. Si $\Delta=0$, le système (14) étant compatible, on a :

$$\begin{vmatrix} \beta & f(0) \\ b_2(0) & g(0) \end{vmatrix}=\beta g(0)-b_2(0)f(0)=0,$$

et par suite les deux membres de l'équation (13) sont identiquement nuls ; k est donc indéterminé.

De toute façon k étant déterminé par l'équation (13), la fonction $\lambda(y)$ est déterminée par la seconde équation (12) avec la condition $\lambda(0)=0$.

2°. Supposons maintenant que

$$a_1(x)=0 \qquad b_1(x)=\beta c_1(x)\neq 0$$
$$a_2(y)=0 \qquad c_2(y)=\alpha b_2(y)\neq 0.$$

Le système (2) peut se mettre sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} & \beta p_A+q_A=f(x) \\ & p_B+\alpha q_B=g(y) \\ & z_0=0 \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Remarquons d'abord que les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ doivent satisfaire à la condition

$$f'(0)=g'(0).$$

En effet, dérivons les équations (15) par rapport à x et à y respectivement. On a:

$$\beta(r_A+\alpha s_A)+(s_A+\alpha t_A)=f'(x)$$
$$\beta r_B+s_B+\alpha(\beta s_B+t_B)=g'(y)$$

on bien

$$\beta r_A+(1+\alpha\beta)s_A+\alpha t_A=f'(x)$$
$$\beta r_B+(1+\alpha\beta)s_B+\alpha t_B=g'(y).$$

En faisant $x=0$ et $y=0$, on trouve nécessairement

$$f'(0)=g'(0).$$

Cela posé, faisons la transformation

$$z(x,y)=Z(x,y)+x\mu\left(\frac{x-\beta y}{1-\alpha\beta}\right)+\psi(y).$$

En dérivant par rapport à x et á y on a:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial x}+\mu\left(\frac{x-\beta y}{1-\alpha\beta}\right)+\frac{x}{1-\alpha\beta}\mu'\left(\frac{x-\beta y}{1-\alpha\beta}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\beta x}{1-\alpha\beta}\mu'\left(\frac{x-\beta y}{x-\alpha\beta}\right)+\psi'(y).$$

En faisant les combinaisons (15) on trouve:

$$\left\{\begin{aligned}&\beta\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_A+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_A+\beta\mu(x)+\psi'(\alpha x)=f(x)\\&\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_B+\alpha\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_B+\alpha\psi'(y)+\mu(0)+\beta y\mu'(0)=g(y).\\&Z_0+\psi(0)=0.\end{aligned}\right.$$

Déterminons les fonctions $\mu(x)$ et $\psi(y)$ par les conditions

$$(16)\qquad\left\{\begin{aligned}&\beta\mu(x)+\psi'(\alpha x)=f(x)\\&\alpha\psi(x)+\mu(0)+\beta x\mu'(0)=g(x)\\&\psi(0)=0\end{aligned}\right.$$

En eliminant $\psi'(x)$ entre ces équations on trouve

$$(17)\qquad\alpha\beta\mu(x)-\mu(0)-\alpha\beta x\mu'(0)=\alpha f(x)-g(\alpha x).$$

Si l'on fait $x=0$, on trouve:

$$\mu(0)=\frac{g(0)-\alpha f(0)}{1-\alpha\beta};$$

ensuite pour déterminer $\mu'(0)$ dérivons l'équation (17) par rapport à x. On trouve

$$(18)\qquad\alpha\beta[\mu'(x)-\alpha(0)]=\alpha[f'(x)-g'(\alpha x)].$$

Si l'on fait $x=0$, cette équation est identiquement satisfaite. La fonction

$$\mu(x)=\frac{\alpha f(x)-g(\alpha x)}{\alpha\beta}+\frac{g(0)-\alpha f(0)}{\alpha\beta(1-\alpha\beta)}$$

satisfait bien aux équations (17) et (18).

On déduit ensuite

$$\psi(y)=\frac{1}{\alpha}\int_0^y g(s)\,ds-\frac{g(0)-\alpha f(0)}{1-\alpha\beta}\frac{y}{\alpha}.$$

Le problème est ainsi complétement résolu.