

Periodic
I
35

ACADÉMIE ROUMAINE

BULLETIN
DE LA
SECTION SCIENTIFIQUE

DE
L'ACADÉMIE ROUMAINE

PUBLIÉ

PAR
LE SECRÉTAIRE DE LA SECTION

GR. ANTIPA
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

TOME XX-ÈME

1938

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ BUCUREȘTI, 1939

după 1946

BULLETIN
DE LA
SECTION SCIENTIFIQUE
DE
L'ACADÉMIE ROUMAINE
TOME XX^{ÈME}

Med. 19466

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE TOME XX-ème, 1938

	<u>Page</u>
SPACU (G.) et DRĂGULESCU (C.), Titration potentiométrique de l'ion stanneux à l'aide de l'iodate de potassium	1
GRIMALSCHI (Dr. V.) u. HOHOR (Ing. Vl.), Beitrag zum Studium der Salzgehalten in den Raseinseen	17
ATANASIU (I. A.) u. BABOR (M.), Über die Gewinnung von Cer aus Monaziterde	27
ATANASIU (I. A.) u. BABOR (M.), Beiträge zum Studium der Ceriphosphats	32
MAVRODI-CORNEA (Jeanette) u. NICULESCU (Virgil), Beiträge zur selectiven Raffination von Mineralölen	35
POGÂNGEANU (P.) et ȚINTEA (H.), Sur les méthodes d'obtenir les spectres d'absorption	46
NICULESCO (Constant-Pierre), Loess récent, . . dans la Haute Normandie et en Picardie	48
ROȘCA (Dr. Al.), Contribution à la connaissance de la faune des Araignées de Moldavie	59
DĂNĂILA (Prof. Dr. Ing. N.) u. SAMUEL (Jacob), Über die Konstitution der Mineralschmieröle	69
POPA (Ilie), Géometrie projective différentielle du point conique des surfaces	79
CELAN (Marie), Notes sur la flore algologique du littoral roumain de la Mer Noire, V	84
GRIMALSCHI (Dr. V.), Über das Wachstum und die Nahrung des Zanders aus dem Raseinseen	90
ȚINTEA (H.) et POGÂNGEANU (P.), Sur les méthodes d'obtenir les spectres d'absorption	96
FILIPESCO (M. G.), L'étude pétrographique de quelques roches sédimentaires miocènes de l'Olténie (Roumanie)	100
ARABU (N.), Classification des ammonoidés trasiques basée sur le plan de la cloison	105
ARABU (N.), Précisions sur la succession des dépôts dans la série permomésozoïque des environs de Bălța, département du Bihor	109
SPACU (G.) et MACAROVICI (C. Gh.), Sur une classe d'ammines complexes nouvelles, appartiennent au groupe du fer et du cobaltdinitrosothio-sulfates	[113]
BOUTARIC (M. Augustin), Absorption et diffusion de la lumière par les milieux troubles	[124]

Imp. 19466

	<u>Page</u>
MITRINOVITCH (D. S.), Sur un problème de Darboux	[135]
BOGDAN (Hélène), Contribution à l'étude de la condensation de l'acénaphthène-quinone	[138]
MANOLESCU (Lucie), Phénomènes de coloration des dérivés de la Thio — 2 — aryl — 3 — hydroxy — 4 — tétrahydro — 1, 2, 3, 4 — quinoxaline	[140]
MENDIKIAN (A. H.), Aspects présentés par la diffusion de la créoline dans l'eau	[142]
SAVULESCU (Prof. Tr.), Nouvelle contribution à la connaissance des pérone-sporacées et ustilaginacées de Roumanie	[143]
GRIMALSCHI (Dr. V.), Zur Biologie der Balta Zagän	[150]
STAMATIU (Dr. Ing. M.), Observations sur les déformations plastiques du sel gemme	[166]
CALUGAREANU (Georges), Sur les surfaces de M. Tzitzeica qui sont des surfaces de révolution	[173]
GHITULESCU (T. P.) et GIUȘCĂ (Dan), Contribution à l'étude de la minéralisation des gisements de Bucium (distr. Alba)	[176]
POPOVICIU (Tiberiu), Deux remarques sur les fonctions convexes	[187]
POPOVICIU (Tiberiu), Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur	[192]
POPOVICIU (Tiberiu), Sur le prolongement des fonctions monotones et des fonctions convexes définies sur un nombre fini de points	[196]
SPACU (G.) et DRĂGULESCU (C.), Le titrage potentiométrique de l'ion stanneux par l'hypoiodite alcaline	[199]
SPACU (G.) et MACAROVICI (C. G.), L'action de la pyridine et de l'ammoniac sur certaines amines complexes avec benzidine	[209]
POGANCIANU (P.), Les spectres d'absorption par la méthode Hartley-Baly des quelques hydrocarbures à noyaux benzéniques condensés	[222]
ARABU (N.), Essai sur le genre Cératites	[227]
SĂVULESCU (Olga), Une maladie du riz récemment constatée en Roumanie	[235]
OPREA (Dr. Chr. V.), Le gisement de diatomite de Hațeg (Dobroudja-Roumanie)	[247]

SUR LE PROLONGEMENT DES FONCTIONS MONOTONES ET DES FONCTIONS CONVEXES DÉFINIES SUR UN NOMBRE FINI DE POINTS

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Note présentée par M. G. Tătălica, M. A. R.

I. — Je considère des fonctions $f(x)$ réelles, de la variable réelle x , définies et uniformes sur m points

$$(I) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_m.$$

J'ai démontré que si la fonction $f(x)$ est d'ordre n et $n > 1$ on ne peut pas, en général, prolonger cette fonction dans un intervalle contenant les points (I)¹. Le prolongement est a fortiori impossible, en général, sur tout l'axe réel $(-\infty, +\infty)$. Il en résulte qu'il n'existe pas, en général, un polynôme d'ordre n prenant les valeurs $f(x_i)$ aux points x_i . Il est d'ailleurs évident qu'il en est ainsi si la fonction n'est pas convexe ou concave, sans être polynomiale d'ordre n sur (I). D'autre part une fonction monotone et une fonction d'ordre 1 sont toujours et partout prolongeables.

Dans la suite je me propose de démontrer que si la fonction est strictement monotone (donc croissante ou décroissante) ou bien si elle est convexe ou concave d'ordre 1, le prolongement est toujours possible par un polynôme. En d'autres termes, je démontrerai les théorèmes suivants:

I. Si $m > 2$ et $f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_m)$, on peut trouver un polynôme croissant $P(x)$ tel que l'on ait $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

II. Si $m > 3$ et $f(x)$ est convexe sur (I), donc $[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f] > 0$, $i = 1, 2, \dots, m-2$ ², on peut trouver un polynôme convexe $P(x)$ tel que l'on ait $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Dans ces deux théorèmes et dans la suite il s'agit de polynômes croissants et de polynômes convexes sur tout l'axe réel $(-\infty, +\infty)$, à moins qu'on ne dit pas le contraire.

¹) Voir: Tiberiu Popoviciu, *Sur le prolongement des fonctions convexes d'ordre supérieur*, « Bull. Math. Soc. Roumaine des Sc. », t. 36 (1934), pp. 75—108.

²) Pour les notations voir mes travaux antérieurs.

2. — Démontrons le théorème I. Soit $P(x)$ le polynôme cherché. Il faut alors que les nombres

$$(2) \quad p_i = P(x_{i+1}) - P(x_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

soient positifs. On voit immédiatement que le théorème I revient au

Lemme I. *Étant donnés $m-1$ nombres positifs $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$, on peut trouver un polynôme croissant $P(x)$ tel que l'on ait*

$$p_i = a_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m-1,$$

p_i étant les nombres (2).

Considérons le point $M(p_1, p_2, \dots, p_{m-1})$ de coordonnées p_i dans l'espace ordinaire à $m-1$ dimensions. À chaque polynôme croissant $P(x)$ correspond ainsi un point M . Lorsque $P(x)$ varie, M décrit un domaine qui est évidemment convexe (puisque si P, P_1 sont deux polynômes croissants, le polynôme $\frac{P+P_1}{2}$ est aussi croissant). D'autre part, le point

$A(a_1, a_2, \dots, a_{m-1})$ de coordonnées positives a_i appartient aussi à un domaine convexe. On en conclut que le lemme I résultera du

Lemme II. *Pour chaque valeur de $j = 1, 2, \dots, m-1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un polynôme croissant $P(x)$ tel que l'on ait*

$$p_j = 1, \quad p_i < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m-1.$$

Pour faire la démonstration soit (a, b) un intervalle contenant les points (1) et considérons la fonction continue $g(x)$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } a \leq x \leq x_j \\ \text{linéaire} & \text{dans } (x_j, x_{j+1}) \\ 1, & \text{pour } x_{j+1} \leq x \leq b. \end{cases}$$

Nous savons qu'on peut trouver un polynôme $Q(x)$ croissant dans $(-\infty, +\infty)$ tel que l'on ait ²⁾

$$|g - Q| < \varepsilon', \quad \text{dans } (a, b),$$

où $\varepsilon' < \min\left(\frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$. On voit alors immédiatement que le polynôme

$$P(x) = \frac{Q(x)}{Q(x_{j+1}) - Q(x_j)}$$

vérifie le lemme II.

²⁾ Voir Tiberiu Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieure*, dans ce Bulletin.

3. — Passons à la démonstration du théorème II. Dans ce cas il faut que les nombres

$$(3) \quad p_i = [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f], \quad i = 1, 2, \dots, m-2$$

soient positifs. Le théorème revient alors au

Lemme III. *Étant donnés $m-2$ nombres positifs $a_1, a_2, \dots, a_{m-2}$, on peut trouver un polynôme convexe $P(x)$ tel que l'on ait*

$$p_i = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m-2,$$

p_i étant les nombres (3).

Comme plus haut, on voit que cette propriété résulte de la suivante, exprimée par le

Lemme IV. *Pour chaque valeur de $j = 1, 2, \dots, m-2$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un polynôme convexe $P(x)$ tel que l'on ait*

$$p_i = 1, \quad p_i < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m-2.$$

La démonstration se fait comme plus haut pour le lemme II, en considérant la fonction

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{dans } (a, x_{j+1}) \\ x - x_{j+1}, & \text{dans } (x_{j+1}, b) \end{cases}$$

Dans ce cas nous pouvons trouver un polynôme $Q(x)$ convexe dans $-\infty, +\infty$ tel que l'on ait

$$|h - Q| < \varepsilon', \quad \text{dans } (a, b),$$

quel que petit que soit le nombre positif ε' ⁴⁾.

4. — Sans insister sur les démonstrations disons, pour terminer, que nous avons encore les propriétés suivantes:

III. Si $m > 2$ et la fonction $f(x)$ est croissante et convexe sur (1) , on peut trouver un polynôme $P(x)$, croissant dans un intervalle $(a, +\infty)$ où $a \leq x_1$ et convexe dans $(-\infty, +\infty)$ tel que l'on ait $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

IV. Si $m > 2$ et la fonction $f(x)$ est décroissante et convexe sur (1) , on peut trouver un polynôme $P(x)$, décroissant dans un intervalle $(-\infty, b)$ où $b \geq x_m$ et convexe dans $(-\infty, +\infty)$ tel que l'on ait $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Cernăuți, 28 septembre 1938.

⁴⁾ Voir loc. cit. (note précédente).