

DEUX REMARQUES SUR LES FONCTIONS CONVEXES

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Note présentée par M. G. Tzitzéica, M. A. R.

I

1. Considérons une fonction $f(x)$ non-concave sur un ensemble linéaire E . Si E est borné nous désignerons par $a = \min E$, $a < b = \max E$ ses extrémités. La fonction $f(x)$ est bornée sur tout sous-ensemble borné E_1 de E qui contient ses extrémités c, d . De plus, le maximum de $f(x)$ sur E_1 est toujours atteint et ne l'est qu'en l'une au moins des extrémités c, d , à moins que la fonction ne se réduise pas à une constante sur E_1 . Il en est ainsi pour toutes les fonctions $f(x) + ax + \beta$, a, β étant deux constantes. D'après une remarque de M. S. Saks¹⁾ la réciproque est vraie et on peut énoncer la propriété suivante:

Pour que la fonction $f(x)$ soit non-concave sur E il faut et il suffit que, quel que soit la constante a et le sous-ensemble borné E_1 de E contenant ses extrémités, la fonction $f(x) + ax$ atteigne son maximum en l'une au moins de ses extrémités c, d .

On vérifie, en effet, que la propriété est équivalente à l'inégalité de définition

$$\begin{vmatrix} \text{I} & x_1 & f(x_1) \\ \text{I} & x_2 & f(x_2) \\ \text{I} & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geq 0, \quad x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in E$$

de la fonction non-concave $f(x)$.

Les fonctions convexes peuvent être caractérisées de la même manière, mais il faut alors dire dans l'énoncé que $f(x) + ax$ atteint son maximum seulement en l'une au moins des extrémités.

2. Si une fonction non-concave atteint son minimum en deux points x_1, x_2 de E , elle l'atteint en tout point de E compris entre x_1, x_2 . Nous

¹⁾ S. Saks, *O funkcjach wypukłych i podharmonicznych*, « Mathesis Polska », t. VI (1931), pp. 43—65.

chercherons encore à énoncer une réciproque. Nous supposons maintenant E borné et fermé et nous dirons qu'une fonction est continue sur E si elle est continue en tout point du dérivé E' de E . Nous avons alors la propriété suivante:

La fonction $f(x)$ finie, uniforme et continue sur l'ensemble fermé et borné E est non-concave si lorsque pour un a , $f(x) + ax$ atteint son minimum en deux points x_1, x_2 de E , elle l'atteint en tout point de E compris entre x_1 et x_2 .

Remarquons d'abord que la fonction $f(x) + ax + \beta$ où β est une constante jouit de la même propriété. Nous tiendrons compte du fait qu'une fonction continue sur un ensemble fermé atteint toujours son minimum.

Toute la difficulté consiste en à montrer que, quel que soit $x_0 \in E$ et différent des extrémités de E , on peut trouver un a tel que le minimum, égal à zéro pour un choix convenable de β , de $f(x) + ax + \beta$ soit atteint pour $x = x_0$. Ceci revient à dire que par tout point $A_0(x_0, f(x_0))$, d'abscisse $x_0 \in E$ passe une droite d'appui²⁾ de la courbe $y = f(x)$. On sait alors que la fonction est nécessairement non-concave.

Quel que soit λ il existe une droite d'appui de la courbe de direction λ (de coefficient angulaire λ). La courbe est d'ailleurs non-audessous de cette droite. Il faut donc démontrer que si $x_0 \in E$ il existe une droite d'appui passant par A_0 .

Si la parallèle à l'axe Ox , menée par A_0 , est une droite d'appui, la propriété est démontrée. Dans le cas contraire, menons la droite d'appui Δ_0 parallèle à Ox ³⁾. Cette droite contient au moins un point de la courbe $y = f(x)$; soit A un de ces points et, pour fixer les idées, supposons son abscisse $x_1 < x_0$. Considérons maintenant toutes les droites d'appui Δ_λ (de direction λ) de la courbe C représentée par $y = f(x)$ lorsque $x \in E$ varie dans l'intervalle fermé (a, x_0) et soit C' la courbe représentée par $y = f(x)$ lorsque $x \in E$ varie dans l'intervalle fermé (x_0, b) . Tous les points de C' sont au-dessus de toute droite Δ_λ avec $\lambda < 0$. Lorsque λ commence à croître à partir de 0, deux cas peuvent se présenter:

I. On arrive (en vertu de la continuité) à une valeur $\lambda' \geq 0$ telle que $\Delta_{\lambda'}$ est une droite d'appui de C . Dans ce cas, cette droite $\Delta_{\lambda'}$ contient au moins un point de C et au moins un point de C' . Il faut donc que A_0 appartienne aussi à cette droite et la propriété est démontrée.

II. La courbe C' est au-dessus de Δ_λ quel que soit λ . Je dis que ceci est impossible. En effet, Δ_λ est non-audessous de la droite δ_λ , de direction λ , passant par la projection de A_0 sur Δ_0 . La courbe C' doit donc être au-dessus de δ_λ quel que soit λ , ce qui est manifestement impossible.

La propriété énoncée est donc démontrée.

3. — Supposons, en particulier, que E soit un intervalle fermé et fini (a, b) , nous pouvons énoncer la propriété suivante:

²⁾ Une droite d'appui est une droite qui passe par un point de la courbe qui est située toute entière d'un même côté de cette droite.

³⁾ Le lecteur est prié de faire la figure.

La fonction $f(x)$ finie et continue dans l'intervalle fini et fermé (a, b) est convexe si, quel que soit le nombre a , la fonction $f(x) + ax$ atteint son minimum en un seul point.

L'hypothèse de la continuité ne peut être supprimé dans ces énoncés pour tirer les conclusions précédentes. Considérons pour cela la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - (x-1)^2} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ (2-x) & \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

On vérifie facilement que $g(x) + ax$ atteint toujours son minimum et en un seul point, la fonction $g(x)$ n'est pourtant pas convexe. On peut, au contraire, substituer à la continuité une hypothèse moins restrictive, par exemple la semi-continuité inférieure.

II

1. — Soit E un ensemble linéaire. Je dis que E est décomposé en deux sous-ensembles consécutifs E_1 et E_2 si: 1° E_1, E_2 ne contiennent que des points de E , 2° tout point de E appartient à un et à un seul des ensembles E_1, E_2 , 3° tout point de E_1 est à gauche de tout point de E_2 . Tout point compris entre $\max E_1$ et $\min E_2$ est un point de décomposition. Un tels point peut ou non appartenir à l'un des ensembles E_1, E_2 . Il peut d'ailleurs arriver que l'un des ensembles E_1, E_2 soit vide, l'autre coïncide alors avec E . Dans ce cas il n'y a pas de point de décomposition.

On sait que:

Si $f(x)$ est non-concave sur E on peut décomposer l'ensemble E en deux sous-ensembles consécutifs E_1, E_2 tels que sur chacun la fonction soit monotone.

Si E_1 est vide $f(x)$ est non-décroissante sur E et si E_2 est vide $f(x)$ est non-croissante sur E . En général, la fonction est non-croissante sur E_1 et non-décroissante sur E_2 ⁴⁾.

Mais, il y a des fonctions plus générales qui jouissent de la même propriété. Nous nous proposons de caractériser ces fonctions par des inégalités entre trois de leurs valeurs.

2. — De l'inégalité de définition il résulte immédiatement que si $f(x)$ est non-concave on a

$$(I) \quad f(x_2) \leq \max [f(x_1), f(x_3)], \quad x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in E.$$

Mais, cette inégalité ne caractérise pas les fonctions non-concaves. L'inégalité est vérifiée, par exemple, par toute fonction non-négative dont la $p^{\text{ème}}$ puissance, avec $p \geq 1$, est non-concave. Les fonctions qui vérifient

⁴⁾ L'exemple $E = \text{intervalle } (0,1)$, $f(0) = 1$, $f(x) = x$ pour $0 < x \leq 1$ nous montre que E_1 peut bien être formé par un seul point (de même E_2). Nous convenons, bien entendu, que toute fonction définie sur un seul point est monotone et indifféremment croissante ou décroissante.

l'inégalité (I) peuvent être regardées justement comme le cas limite pour $\phi \rightarrow +\infty$.

Nous nous proposons de démontrer que:

Soit $f(x)$ une fonction finie, uniforme, et définie sur l'ensemble E . Pour qu'on puisse décomposer E en deux sous-ensembles consécutifs E_1, E_2 sur chacun la fonction étant monotone, il faut et il suffit que cette fonction vérifie la propriété (I).

Nous supposons que si E_1, E_2 ne sont pas vides la fonction est non-croissante sur E_1 et non-décroissante sur E_2 . Dans le cas contraire la fonction $-f(x)$ doit vérifier l'inégalité (I).

On voit facilement que la condition est nécessaire. Il reste à montrer qu'elle est aussi suffisante, donc que:

Si la fonction $f(x)$, finie, uniforme et définie sur l'ensemble E vérifie la propriété (I), on peut décomposer l'ensemble E en deux sous-ensembles consécutifs tels que sur chacun la fonction soit monotone.

3. — Démontrons donc cette dernière propriété. Soit $m = \min_{(E)} f(x)$

qui peut être un nombre fini ou $-\infty$. Soit

$$(2) \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

une suite de points, distincts ou non, telle que $f(\xi_n) \rightarrow m$ pour $n \rightarrow \infty$. Nous pouvons toujours supposer que la suite (2) est ou bien convergente ou bien tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Pour simplifier on peut dire que la suite tend vers un point ξ fini ou infini. On voit d'ailleurs facilement que si $m = -\infty$ il n'existe qu'un seul point ξ . Trois cas peuvent se présenter:

I. ξ est fini. Considérons deux points $x_1 < x_2$ à gauche de ξ . On ne peut avoir $f(x_1) < f(x_2)$ puisqu'alors on pourrait trouver un $\xi_n > x_2$ tel que l'on ait $f(\xi_n) < f(x_2)$. En prenant donc $x_3 = \xi_n$ on est en contradiction avec l'inégalité (I). Il faut donc que $f(x_1) \geq f(x_2)$. On voit de la même manière que si $x_1 < x_2$ sont à droite de ξ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$. Si donc le point ξ n'appartient pas à E la propriété est démontrée. Il reste à montrer qu'il en est encore ainsi si $\xi \in E$. Deux cas peuvent se présenter: 1° $f(\xi) = m$, ce qui n'est possible que si m est fini. Dans ce cas on a évidemment $f(x_1) \geq f(\xi)$ pour $\xi > x_1 \in E$ et $f(\xi) \leq f(x_2)$ pour $\xi < x_2 \in E$. La propriété résulte donc dans ce cas aussi et ξ appartient indifféremment à E_1 ou E_2 , 2° $f(\xi) > m$. Dans ce cas ξ ne peut être que limite d'un seul côté. S'il est limite de gauche (de droite) on a $f(\xi) \leq f(x_2)$ pour tout $\xi < x_2 \in E$ [$f(x_2) \geq f(\xi)$ pour tout $\xi > x_1 \in E$] et la propriété résulte encore, le point de décomposition ξ appartenant à E_2 (resp. à E_1).

II. $\xi = -\infty$. Ce cas ne peut arriver que si E est non-borné inférieurement. On voit alors, comme plus haut, que si $x_1 < x_2$ sont deux points de E on a $f(x_1) \leq f(x_2)$. La fonction est donc non-décroissante sur E .

III. $\xi = +\infty$. On voit de la même manière que la fonction est non-croissante sur E .

La propriété est donc complètement démontrée.

On peut encore remarquer que si dans (I) l'égalité n'est jamais possible, la fonction est strictement monotone (décroissante et croissante) sur les sous-ensembles de décomposition E_1 et E_2 et réciproquement.

Seminarul Matematic, Universitatea Cernăuți