# SUR LE MOUVEMENT RELATIF

par

**D. V. Ionesco**

Professeur à l'Université de Cluj.

Reçu le 26 Oct. 1938.

1. Considérons un système invariable fixe $S_0$, un système invariable $S_1$ mobile par rapport à $S_0$ et un système invariable $S_2$ mobile par rapport à $S_1$. Désignons par $\vec{\omega}_a$, $\vec{\omega}_r$, $\vec{\omega}_e$ les rotations instantanées dans les mouvements $\left(\frac{S_2}{S_0}\right)$, $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$, $\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$ (¹) et par $\vec{V}_a$, $\vec{V}_r$, $\vec{V}_e$ les vitesses d'un point M de $S_2$ dan les mouvements $\left(\frac{S_2}{S_0}\right)$, $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$, $\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$.

Désignons par $(\Sigma_r)$ le système des vecteurs dont la résultante générale est $\vec{\omega}_r$ et dont le moment résultant en M est $\vec{V}_r$. Nous considérons également les systèmes des vecteurs $(\Sigma_a)$ et $(\Sigma_e)$.

On sait que *le système des vecteurs $(\Sigma_a)$ est la somme des systèmes des vecteurs $(\Sigma_r)$ et $(\Sigma_e)$* (²), c'est à dire

$$(\Sigma_a) = (\Sigma_r) + (\Sigma_e . \tag{1}$$

Ce théorème résulte de la formule de composition des vitesses

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \tag{2}$$

et d'un théorème sur les systèmes des vecteurs: *lorsque deux systèmes des vecteurs ont le même moment résultant en deux points quelconques, ils sont identiques.*

(¹) Notations du Cours de Cinématique par G. JULIA 2-e édition p. 48.

(²) *Encyclopédie des Sc. Mathématiques*, 1916, Tome IV, vol. 2, fasc. 2. p. 241.



Il résulte du théorème précédent la relation importante

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e \tag{3}$$

Lorsque le système $S_2$ coïncide avec le système $S_0$, on a $\vec{\omega}_a = 0$ et par suite

$$\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e = 0.$$

Cette formule montre que dans deux mouvements inverses $\left(\frac{S_0}{S_1}\right)$ et $\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$ les rotations $\vec{\omega}_{01}$ et $\vec{\omega}_{10}$, sont liées par la relation (³)

$$\vec{\omega}_{01} + \vec{\omega}_{10} = 0$$

2. Désignons par $\vec{\omega}'_a$, $\vec{\omega}'_r$ et $\vec{\omega}'_e$ les dérivées par rapport au temps des rotations $\vec{\omega}_a$, $\vec{\omega}_r$, $\vec{\omega}_e$. Dans ce travail nous allons démontrer la formule importante

$$\boxed{\vec{\omega}'_a = \vec{\omega}'_r + \vec{\omega}'_e + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r} . \tag{4}$$

Considérons les trièdres rectangulaires $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$ attachés aux systèmes $S_1$ et $S_2$. Désignons par $p$, $q$, $r$ *et* $p_2$, $q_2$, $r_2$ les composantes de $\vec{\omega}_a$ et de $\vec{\omega}_r$ sur les axes $O_2x_2$, $O_2y_2$, $O_2z_2$; les composantes de $\vec{\omega}'_a$ et de $\vec{\omega}'_r$ sur les mêmes axes sont $p'$, $q'$, $r'$, et $p'_2$, $q'_2$, $r'_2$. Désignons enfin par $p_1$, $q_1$, $r_1$, les composantes de $\vec{\omega}_e$ sur les axes $O_1x_1$, $O_1y_1$, $O_1z_1$; les composantes de $\vec{\omega}'_e$ sur les axes $O_1x_1$, $O_1y_1$, $O_1z_1$ seront $p'_1$, $q'_1$, $r'_1$.

Soient $\vec{i}_2$, $\vec{j}_2$, $\vec{k}_2$ des vecteurs unitaires placés sur les axes $O_2x_2$, $O_2y_2$, $O_2z_2$ et $\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ leurs composantes sur les axes $O_1x_1$, $O_1y_1$ et $O_1z_1$. Les projections $\overline{p_1}$, $\overline{q_1}$, $\overline{r_1}$ de $\vec{\omega}_e$ sur les axes $O_2x_2$, $O_2y$, $O_2z_2$ seront

$$\overline{p_1} = \alpha p_1 + \beta q_1 + \gamma r_1$$
$$\overline{q_1} = \alpha_1 p_1 + \beta_1 q_1 + \gamma_1 r_1$$
$$\overline{r_1} = \alpha_2 p_1 + \beta_2 q_1 + \gamma_2 r_1 .$$

La formule (3) montre que

$$p = p_2 + \alpha p_1 + \beta q_1 + \gamma r_1$$
$$q = q_2 + \alpha_1 p_1 + \beta_1 q_1 + \gamma_1 r_1$$
$$r = r_2 + \alpha_2 p_1 + \beta_2 q_1 + \gamma_2 r_1 .$$

(³) G. JULIA Cours de cinématique 2-e édition, page 56.

En dérivant ces formules nous avons:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
p' &= p'_2+\alpha p'_1+\beta q'_1+\gamma r'_1+\alpha' p_1+\beta' q_1+\gamma' r_1\\
q' &= q'_2+\alpha_1 p'_1+\beta_1 q'_1+\gamma_1 r'_1+\alpha'_1 p_1+\beta'_1 q_1+\gamma'_1 r_1\\
r' &= r'_2+\alpha_2 p'_1+\beta_2 q'_1+\gamma_2 r'_1+\alpha'_2 p_1+\beta'_2 q_1+\gamma'_2 r_1.
\end{aligned}
$$

Le vecteur dont les composantes sur les axes $O_2x_2$, $O_2y_2$, $O_2z_2$ sont

$$\alpha p'_1+\beta q'_1+\gamma r'_1,\quad \alpha_1 p'_1+\beta_1 q'_1+\gamma_1 r'_1,\quad \alpha_2 p'_1+\beta_2 q'_1+\gamma_2 r'_1$$

a les composantes $p'_1$, $q'_1$, $r'_1$ sur les axes $O_1x_1$, $O_1y_1$, $O_1z_1$; c'est donc le vecteur $\overrightarrow{\omega'_e}$.

Les formules (5) montrent que

$$(6)\qquad \overrightarrow{\omega'_a}=\overrightarrow{\omega'_r}+\overrightarrow{\omega'_e}+\overrightarrow{\Omega}$$

où $\overrightarrow{\Omega}$ est le vecteur qui a sur les axes $O_2x_2$, $O_2y_2$, $O_2z_2$ les composantes

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\Omega_x &= \alpha' p_1+\beta' q_1+\gamma' r_1\\
\Omega_y &= \alpha'_1 p_1+\beta'_1 q_1+\gamma'_1 r_1\\
\Omega_z &= \alpha'_2 p_1+\beta'_2 q_1+\gamma'_2 r_1.
\end{aligned}
$$

Mais on sait [4] que

$$\frac{d\overrightarrow{i_2}}{dt}=\overrightarrow{\omega_2}\times\overrightarrow{i_2}=r_2\overrightarrow{j_2}-q_2\overrightarrow{k_2}$$

$$\frac{d\overrightarrow{j_2}}{dt}=\overrightarrow{\omega_2}\times\overrightarrow{j_2}=p_2\overrightarrow{k_2}-r_2\overrightarrow{i_2}\ .$$

$$\frac{d\overrightarrow{k_2}}{dt}=\overrightarrow{\omega_2}\times\overrightarrow{k_2}=q_2\overrightarrow{i_2}-p_2\overrightarrow{j_2}$$

En projetant ces formules sur les axes $O_1x_1$, $O_1y_1$, $O_1z_1$ nous avons

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha_1 r_2-\alpha_2 q_2; & \alpha'_1 &= \alpha_2 p_2-\alpha r_2; & \alpha'_2 &= \alpha q_2-\alpha_1 p_2\\
\beta' &= \beta_1 r_2-\beta_2 q_2; & \beta'_1 &= \beta_2 p_2-\beta r_2; & \beta'_2 &= \beta q_2-\beta_1 p_2\\
\gamma' &= \gamma_1 r_2-\gamma_2 q_2; & \gamma'_1 &= \gamma_2 p_2-\gamma r_2; & \gamma'_2 &= \gamma q_2-\gamma_1 p_2.
\end{aligned}
$$

En introduisant ces expressions dans les formules (7) nous aurons

$$
\begin{aligned}
\Omega_x &= p_1(\alpha_1 r_2-\alpha_2 q_2)+q_1(\beta_1 r_2-\beta_2 q_2)+r_1(\gamma_1 r_2-\gamma_2 q_2)\\
\Omega_y &= p_1(\alpha_2 p_2-\alpha r_2)+q_1(\beta_2 p_2-\beta r_2)+r_1(\gamma_2 p_2-\gamma r_2)\\
\Omega_z &= p_1(\alpha q_2-\alpha_1 p_2)+q_1(\beta q_2-\beta_1 p_2)+r_1(\gamma q_2-\gamma_1 p_2)
\end{aligned}
$$

[4] G. JULIA Cours de cintmatique 2-e édition, p. 33.



ou bien

$$
\begin{aligned}
\Omega_x &= r_2(p_1\alpha_1+q_1\beta_1+r_1\gamma_1)-q_2(p_1\alpha_2+q_1\beta_2+r_1\gamma_2)\\
\Omega_y &= p_2(p_1\alpha_2+q_1\beta_2+r_1\gamma_2)-r_2(p_1\alpha+q_1\beta+r_1\gamma)\\
\Omega_z &= q_2(p_1\alpha+q_1\beta+r_1\gamma)-p_2(p_1\alpha_1+q_1\beta_1+r_1\gamma_1),
\end{aligned}
$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
\Omega_x &= \overline{q}_1 r_2-\overline{r}_1 q_2\\
\Omega_y &= \overline{r}_1 p_2-\overline{p}_1 r_2\\
\Omega_z &= \overline{p}_1 q_2-\overline{q}_1 p_2.
\end{aligned}
$$

Ces formules montrent que $\overrightarrow{\Omega}$ est le produit vectoriel des vecteurs qui ont pour composantes sur les axes $O_2x_2$, $O_2y_2$, $O_2z_2$ $\overline{p}_1$, $\overline{q}_1$, $\overline{r}_1$ et $p_2$, $q_2$, $r_2$, c'est à dire

$$\overrightarrow{\Omega}=\overrightarrow{\omega_e}\times\overrightarrow{\omega_r}.$$

En revenant à la formule (6) nous avons

$$\overrightarrow{\omega'_a}=\overrightarrow{\omega'_r}+\overrightarrow{\omega'_e}+\overrightarrow{\omega_e}\times\overrightarrow{\omega_r}$$

et par suite la formule (4) est démontrée.

*Note.* J'adresse mes remerciements chaleureux à M. le Professeur V. VÂLCOVICI qui a bien voulu me signaler la démonstration suivante de la formule (4).

Considérons trois trièdres $T_1$, $T_2$, $T_3$ en mouvement, l'un par rapport à l'autre, et désignons par $\overrightarrow{\omega_{ik}}$ la rotation du trièbre $T_i$ par rapport au trièdre $T_k$. On a alors la formule

$$\overrightarrow{\omega_{12}}+\overrightarrow{\omega_{23}}+\overrightarrow{\omega_{31}}=0,$$

qui coïncide avec la formule (3), et que M. le Professeur V. VÂLCOVICI a recontré dans un travail recent [5].

On peut écrire la formule précédente de la façon suivante

$$\overrightarrow{\omega_{21}}=\overrightarrow{\omega_{23}}+\overrightarrow{\omega_{31}}$$

et en dérivant par rapport au temps, nous avons

$$(8)\qquad D_1\overrightarrow{\omega_{21}}=D_1\overrightarrow{\omega_{23}}+D_1\overrightarrow{\omega_{31}}$$

où d'une manière générale, $D_i$ représente la dérivée par rapport au trièdre $T_i$.

[5] V. VÂLCOVICI Asupra caracterului involutiv al ecuaţiilor din mişcarea relativă. *Extrait du »Omagiu lui Constantin Kiriţescu«*, p. 4.

Mais on sait que

$$D_1\vec{\omega}_{23} = D_3\vec{\omega}_{23} + \vec{\omega}_{31} \times \vec{\omega}_{23}.$$

En remplaçant cette expression dans la formule (8), nous avons

$$D_1\vec{\omega}_{21} = D_1\vec{\omega}_{31} + D_3\vec{\omega}_{23} + \vec{\omega}_{31} \times \vec{\omega}_{23} \tag{4'}$$

qui est justement la formule (4).

Il est à remarquer que dans la formule (4′), $D_1\vec{\omega}_{31}$ est la dérivée du vecteur $\vec{\omega}_{31}$ par rapport au trièdre $T_1$, tandis que $D_3\vec{\omega}_{23}$ est la dérivée du vecteur $\vec{\omega}_{23}$ par rapport au trièdre $T_3$.