SUR UN MOUVEMENT TAUTOCHRONE

par

D. V. Ionesco

Professeur à l'Université de Cluj.

Reçu le 13 Avril 1938.

On sait que lorsqu'un point matériel mobile sur la courbe

$$r = \frac{a}{2}(1 + \cos\theta) \tag{1}$$

est soumis à une force répulsive constante émanant du point 0, le mouvement est tautochrone, le point de tautochronisme étant le sommet A qui correspond à $\theta = 0$ [1].

Dans ce travail nous allons démontrer en employant la méthode de Puiseux [2], que la force répulsive constante est la seule force répulsive fonction de r, émanant de 0, qui rend le mouvement d'un point matériel sur la courbe (1) tautochrone, le point de tautochronisme étant le sommet A. On suppose que le mouvement du point matériel sur la courbe a lieu sans frottement.

Le mouvement d'un point matériel M de masse m, sur la courbe (1), soumis à la force répulsive $\overrightarrow{F}$ émanant de 0, fonction de r, c'est à dire

$$F = f(r) \tag{2}$$

et placé sans vitesse au moment initial au point M_0 qui correspond a $r = r_0$, est donné par le théorème des forces vives

$$mv^2 = 2\int_{r_0}^{r} f(r)\, dr. \tag{3}$$

---

[1] E. VILLIÉ, Compositions d'analyse, mécanique et astronomie, tome II, p. 165.

[2] P. APPEL, Traité de Mécanique Rationnelle, tome I, 5-e édition, p. 351.

Posons

$$\int_r^a f(r)\,dr = \varphi(r). \tag{4}$$

La fonction $\varphi(r)$ est positive, décroissante et nulle pour $r=a$. L'équation (3) devient

$$mv^2 = 2[\varphi(r_0) - \varphi(r)].$$

On peut exprimer la vitesse v^2 en fonction de r. On a

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

et d'après l'équation (1)

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{a}{2}\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\cos\theta = \frac{2r-a}{a}$$

de sorte que

$$v^2 = \frac{a}{a-r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

et par suie

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{am}(a-r)[\varphi(r_0)-\varphi(r)]. \tag{5}$$

Au départ, $\dfrac{dr}{dt}=0$, mais $\dfrac{d^2r}{dt^2}>0$; on prendra donc

$$\sqrt{\frac{2}{am}}\,t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{(a-r)[\varphi(r_0)-\varphi(r)]}}.$$

Le temps T pour arriver en A est donné par la formule

$$\sqrt{\frac{2}{am}}\,\mathrm{T} = \int_{r_0}^{a} \frac{dr}{\sqrt{(a-r)[\varphi(r_0)-\varphi(r)]}}. \tag{6}$$

Pour que le mouvement soit tautochrone il faut que le second membre de la formule (6) soit indépendant de r_0, ce qui exige que

$$\frac{d\mathrm{T}}{dr_0} = 0.$$

Pour dériver par rapport à r_0 la formule (6), nous employons l'artifice de Puiseux. Désignons par ψ la fonction inverse de φ. En

posant

$$\varphi(r) = x,$$

nous aurons donc

$$r = \psi(x).$$

La fonction $\psi(x)$ est décroissante et l'on a $\psi(0)=a$.
La formule (6) devient

$$\sqrt{\frac{2}{am}}\,\mathrm{T} = \int_{x_0}^{0} \frac{\psi'(x)\,dx}{\sqrt{[a-\psi(x)][x_0-x]}}$$

où x_0 est la valeur de x qui correspond à $r=r_0$.
Faisons dans cette intégrale le changement de variable

$$x = x_0 u;$$

nous aurons

$$\sqrt{\frac{2}{am}}\,\mathrm{T} = \int_{1}^{0} \frac{\sqrt{x_0}\,\psi'(x_0u)\,du}{\sqrt{(1-u)[a-\psi(x_0u)]}}.$$

La dérivée par rapport à x_0 est

$$\sqrt{\frac{2}{am}}\,\frac{d\mathrm{T}}{dx_0} = \int_{1}^{0} \frac{[a-\psi(x_0u)][\psi'(x_0u)+2x_0u\psi''(x_0u)]+x_0u\psi'^2(x_0u_0)}{2\sqrt{x_0-x_0u}\,\left(\sqrt{a-\psi(x_0u)}\right)^3}\,du.$$

En revenant à la variable x, nous avons

$$\sqrt{\frac{2}{am}}\,\frac{d\mathrm{T}}{dx_0} = \int_{x_0}^{0} \frac{(a-\psi)(\psi'+2x\psi'')+x\psi'^2}{2x_0\sqrt{x_0-x_0}\,\left(\sqrt{a-\psi}\right)^3}\,dx.$$

Cette intégrale doit être nulle quel que soit x_0. Nous avons donc

$$(a-\psi)(\psi'+2x\psi'')+x\psi'^2 = 0.$$

Pour intégrer cette équation différentielle nous remarquons qu'on peut l'écrire

$$\frac{\psi'+2x\psi''}{x\psi'} = \frac{\psi'}{\psi-a}$$

ou

$$\frac{d(x\psi'^2)}{x\psi'^2} = \frac{d\psi}{\psi-a}.$$

En intégrant et en remarquent que $a-\psi$ est positif le long de la courbe, nous avons

$$x\psi'^2 = \frac{a-\psi}{k^2}$$

k^2 étant une constante arbitraire.

De cette équation il résulte que

$$\sqrt{x}\,\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\sqrt{a-\psi}}{k}$$

ou

$$\frac{d\psi}{\sqrt{a-\psi}} = -\frac{1}{k}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

et en intégrant nous avons

$$\sqrt{a-\psi} = \frac{\sqrt{x}}{k} + k'$$

k' étant une constante. Mais pour $x=0$, ψ étant égale à à a il résulte que $k'=0$. Nous avons donc

$$x = k^2(a-\psi)$$

ou bien

$$\varphi(r) = k^2(a-r).$$

La formule (4) montre qu'on aura

$$f(r) = k^2,$$

et par suite la seule force répulsive, fonction de r, émanant de 0, qui rend le mouvement d'un point matériel sur la courbe (1) tautochrone, est la force constante.